

離散系論 演習 (K. Asai)

1. 普遍集合 U を $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ とし, $A = \{1, 3, 5, \dots\}$, $B = \{2, 3, 4, \dots, 15\}$, $C = \{5, 10, 15, 20\}$, $P = \{\text{すべての素数}\}$ とするとき, 次を求めよ.

- (1) $P \cap A$. (2) $P \cap B$. (3) $A^c \cap P$. (4) U^c . (5) \emptyset^c .
 (6) $A \Delta B$. (7) $B - (A - P)$. (8) $(A \cap B) \Delta (C \cap P)$.
 (9) $(A - P) \cap (B \cup P)$. (10) $A \Delta B \Delta C$.

2. ベン図をつかって次の仮定から導かれる結論を記せ.

- i: 行列の固有多項式が重根を持たなければ対角化可能.
 ii: 行列 A は対角化できない. iii: 行列 B の固有多項式は重根を持つ.

2.1 集合 A, B, C, D に対する以下の (1) – (8) の条件について, (a) (1) – (4) を条件の強い順に並べよ. (b) (5) – (8) を条件の強い順に並べよ.

- (1) $A \subset B \cup C$. (2) $A \subset B \cap C$. (3) $A \subset B$ または $A \subset C$. (4) $A \subset B$ かつ $A \subset C$.
 (5) $B \cup C \subset D$. (6) $B \cap C \subset D$. (7) $B \subset D$ または $C \subset D$. (8) $B \subset D$ かつ $C \subset D$.

2.2 (1) $A \subset B \iff A^c \supset B^c$ を論証により示せ.

(2) $A \subset B \cup C$ かつ $A^c \subset B^c \cap C^c$ ならば, $A = B \cup C$ となることを示せ.

2.3 $D \subset C \subset A \cap D$ または $D \subset C \subset B \cap D$ ならば, $C \subset A \cup B$ かつ $C = D$ となることを示せ.

3. (1) ド・モルガンの法則をベン図をつかって証明せよ.

(2) 裏のベン図に書き加えて, 一般の 4 つの集合の包含関係を表すベン図をつくれ. (3)(a) $A \cap (A \cup B) = A$ の双対をかけ. (b) $A \cup A^c = U$ の双対をかけ.

4. $A = \{\{a\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{e\}\}$ とするとき, 次のうちで正しい命題に○をつけ, 間違った命題には×をつけて間違いの理由をのべよ.

- (1) $a \in A$. (2) $\{a, b, c\} \in A$. (3) $\{e\} \subset A$. (4) $\{\{a\}\} \in A$.
 (5) $A \in A$. (6) $\emptyset \subset A$. (7) $\{\emptyset\} \notin A$. (8) $\{\{e\}, \{a, c\}, \{e\}\} \subset A$.
 (9) $\{\{a, c\}, a\} \in A$. (10) $\emptyset \notin A$. (11) $\{\{a, b, c\}, \{a\}, \emptyset\} \subset A$.

5. $A = \{p, q, r\}$ に対して, A の部分集合全体の集合 (ベキ集合) 2^A を求めよ.

6. (1) いくつかの学生に対して, 4 つの質問 a, b, c, d に yes か no で答えさせた. その結果, 以下のような表を得た. 少なくとも 1 つの質問に yes と答えた学生は何人いるか? (質問 q に yes と答えた学生の集合を S_q で表せ)

question	a	b	c	d	a&b	a&c	a&d	b&c	b&d	c&d
# of yes	14	14	11	15	8	6	5	4	7	6
question	a&b&c		a&b&d		a&c&d		b&c&d		all	
# of yes	3		3		2		2		1	

(2) ある 108 人のクラスにおいて, 選択科目のうち, 文学選択者, 心理学選択者, 芸術学選択者ともおのおの 53 人で, 文学のみが 17 人, 心理学のみが 16 人, 芸術学のみが 15 人, すべてを選択したものは 11 人だった. 裏のベン図の各領域に人数を書き込め.

7. A, B, C, D, E, F を以下のベン図で示される集合とするとき, 次の集合を斜線で示せ.

(1) $A \Delta B \Delta C \Delta D \Delta E \Delta F \Delta G$. (2) $(A \cup B \cup C) \Delta (C \cup D \cup E) \Delta (E \cup F \cup G)$.

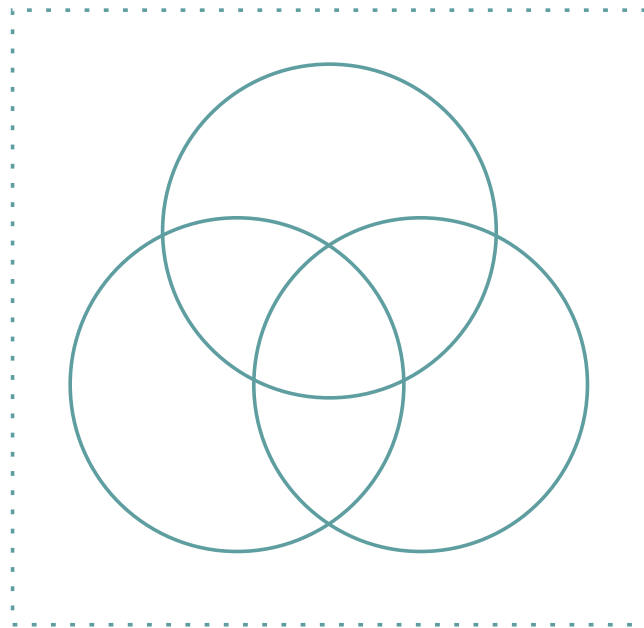
7.1 等式 (1) $A^c \Delta B^c = A \Delta B$, (2) $A^c \Delta B^c \Delta C^c = (A \Delta B \Delta C)^c$ を示せ.

8. 次の特性関数を計算せよ.

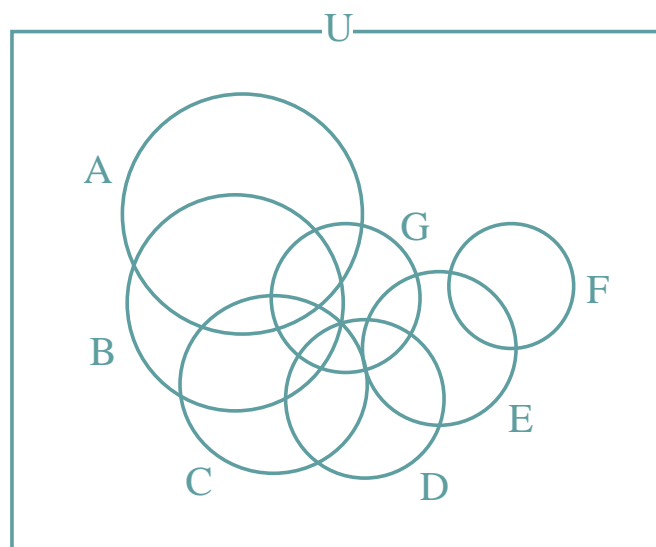
(1) $\chi_{A \cap (B \cup C)}$ (2) $\chi_{A^c \cup B^c \cup C^c}$ (3) $\chi_{A \Delta B}$ (4) $\chi_{(A-B)-C}$

[3] (2)

[6] (2)



[7]



9. 2 から 8 までの整数に対して, 関係 R を, ' $xRy \iff x$ と y は互いに素' で定義する. このとき, R を (1) ダイグラフ, (2) 行列で表せ. ただし, 互いに素とは, 最大公約数が 1 となることである.

10. 上の関係は, 反射的, 対称的, 反対称的, 推移的のうちどれか.

11. 次の A 上の関係 R を (a) ダイグラフ, (b) 行列で表せ.

(1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(2, 3), (2, 1), (1, 1), (1, 2), (4, 2), (4, 4)\}$.

(2) $A = \{\heartsuit, \clubsuit, \diamond, \spadesuit\}$,

$R = \{(\heartsuit, \spadesuit), (\heartsuit, \clubsuit), (\diamond, \spadesuit), (\diamond, \clubsuit), (\spadesuit, \heartsuit), (\clubsuit, \heartsuit), (\spadesuit, \diamond), (\clubsuit, \diamond)\}$.

(3) $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$,

$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$.

12. $A = \{a, b, c, d\}$ とするとき, 以下の A 上の関係 R について考える.

(1) $\{(a, a), (c, d)\}$, (2) $\{(a, a), (a, b), (b, a)\}$, (3) $\{(a, b), (b, d)\}$,

(4) $\{(a, c), (c, d), (a, d), (c, c)\}$, (5) \emptyset , (6) $\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$,

(7) $\{(a, a), (a, d), (b, b), (b, c), (c, c), (d, a), (d, d)\}$, (8) $A \times A$,

(9) $\{(a, a), (c, c), (d, d), (a, c), (c, a), (b, a)\}$,

(10) $\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, c), (c, a), (b, a), (c, b), (a, c)\}$.

上の各々をダイグラフで表し, 反射的, 対称的, 反対称的, 推移的のどれが該当するかを答えよ.

13. $\{1, 2, 3, 4\}$ 上の推移的関係をいくつかあげよ. (3-4 個)

14. (1) 集合 $\{a, b, c\}$ の分割をすべて求めよ. (5 個) (2) $\{a, b, c, d\}$ の分割をすべて求めよ. (15 個) (3) $\{a, b, c, d\}$ 上の同値関係はいくつあるか.

15. $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{x, y, z\}$ とする. A 上の関係 $R = \{(a, a), (a, c), (b, d), (d, c)\}$, A から B への関係 $S = \{(b, y), (b, z), (c, x), (d, y)\}$, B 上の関係 $T = \{(x, x), (y, x), (y, z), (z, y), (z, z)\}$ に対して, 次の関係をダイグラフで表せ.

また, (3)–(6) については, 反射的, 対称的, 反対称的, 推移的のうちどの性質を持つかをいえ.

(1) RST (2) TS^{-1} (3) RR (4) $S^{-1}R^{-1}S$ (5) SS^{-1} (6) $TT^{-1}T$

16. 次の関係は, 反射的, 対称的, 反対称的, 推移的のうちどれか. また同値関係を選べ.

(1) 日本人全体の上の同姓同名という関係 (誰にもただ 1 つの姓名があるとする).

(2) 動物全体の上の, 同種 (子孫が残せる) という関係.

(3) 猫全体の上の異性という関係.

(4) 面積確定の平面図形全体の上の, 面積が等しいという関係.

(5) 日本の都道府県全体の上の, 隣接するという関係.

(6) 人間全体の上の, 誕生日 (日にちだけ) の差が 5 で割り切れるという関係.

(7) 人間全体の上の, 相手が自分より年下であるという関係.

(8) 人間全体の上の, 相手が自分より年上ではない (同じか年下) という関係.

(9) あるクラスにおいて, 学籍番号が同じかまたは小さいという関係.

(10) 日本人全体の上の次のような関係. 名前に少なくとも 1 つ同じ漢字が使われている.

17. $A = \{a, b, c, d\}$ とする. 以下の性質を持つ A 上の関係はそれぞれいくつあるか? 計算または推論により求めよ.

- (1) すべての関係. (2) 反射的. (3) 対称的. (4) 反射的かつ対称的.
 (5) 反射的かつ対称的かつ推移的. (6)* 反対称的. (7)* 反射的でなく反対称的.

17.1 0 または 1 を成分とする 2 次行列全体の集合を M とおく. M 上の次のような関係 R を定める.

$A, B \in M$ に対して, $ARB \iff AB = BA = E$. (E は 2 次単位行列)

このとき, R を順序対の集合の形で求め, これが, 反射的, 対称的, 反対称的, 推移的のうちのどの性質を持つかを言え.

18.* A 上の任意の関係 R に対して, (1) $R \cup R^{-1}$, (2) $R \cap R^{-1}$, (3) RR^{-1} は対称的であることを示せ.

19.* ベキ集合 2^A 上に関係 R を $xRy \iff x \subset y$ で定義する. このとき, $RR = R$ を示せ.

19.1* A, B, C を集合とし, R を A から B への関係, S を B から C への関係とする. このとき, $(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}$ を示せ.

20.* $\{1, 2, \dots, n\}$ 上の推移的関係 R が, その要素として $(1, 2), (2, 3), \dots, (n, 1)$ を含むとき, R は全体関係となることを示せ. わからぬものは, $n = 5$ で示せ.

21. $A = \{a, b, c, d, e\}$ とし, A 上の同値関係を

$$R = \{(a, c), (c, a), (a, a), (c, c), (b, d), (d, b), (b, e), (e, b), (d, e), (e, d), (b, b), (d, d), (e, e)\}$$

とする. R による A の商集合 A/R を求めよ.

22.a* (Russell's paradox, 1903) これは集合論において有名な逆理である. (逆理とは, たしかに矛盾しているのだがそれがなぜなのかを指摘することが難しい論法のことを言う)

すべての集合から成る集合 A を考えよう. これは定義から, A すなわち自分自身をその要素として含んでいることになる. こう考えると, 集合は次の 2 種類に分類できる. (1) 第 1 種集合: 自分自身を要素として持たない集合. (2) 第 2 種集合: 自分自身を要素として持つ集合.

さて, 第 1 種集合全体から成る集合を B とおく. この B は第 1 種か第 2 種かのいずれかである. もし B が第 1 種集合と仮定すると, 第 1 種なのだから B は B を要素として持たないのであるが, 他方 B は第 1 種集合すべてを含んでいるのだから, B を要素として持つはずである. これは矛盾である.

それでは B が第 2 種集合であるとしたらどうだろうか. 第 2 種なのだから B は B を要素として持つ. しかるに B は第 1 種集合以外は含まないので, 第 2 種である B を要素として持たないはずである. よってここでも矛盾を来した.

このようにして, B は第 1 種としても第 2 種としても矛盾してしまう.

22.b** (範囲外おまけ) 1 行目に適当な, 有限項よりなる自然数列を書く. 2 行目 j 列には, 1 行目 j 列にある数が, 1 行目において, そこまでに何回登場したかを書く. これを繰り返すとき, 2 行目からは, 1 つおきに同一の行が現れる. これを示せ.

* : やや難

** : 難

23. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ が与えられている. 次のうちどれが分割か答えよ.

- (1) $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 7\}, \{9\}, \{8\}\}$.
- (2) $\{\{1, 2, 5, 6, 8, 7, 9, 3, 1, 2, 7, 4\}\}$.
- (3) $\{\{4\}, \{5\}, \emptyset, \{1, 2, 3, 6, 9\}, \{7, 8\}\}$.
- (4) $\{\{7\}, \{5, 8\}, \{1, 2, 3\}, \{9\}\}$.
- (5) $\{\{3, 4, 6, 7\}, \{3, 5\}, \{6, 8, 9\}, \{1, 2, 3\}\}$.

24. (1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ を 3 元からなる細胞と 2 元からなる細胞にわけける分割はいくつあるか.

(2) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の分割で, 3 つの 2 元からなる細胞からなるものはいくつあるか.

25. A を集合とすると, A の部分集合全体の集合 2^A に対する次の関係 R は, 反射的, 対称的, 反対称的, 推移的 のどれが該当するか答えよ.

- (1) $xRy \iff x \cap y = \emptyset$.
- (2) $xRy \iff x \subset y$.
- (3) $xRy \iff x \cup y = A$ かつ $x \cap y = \emptyset$.

26. $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ とし, R を $ad = bc$ のとき $(a, b)R(c, d)$ で定義される \mathbf{N}^2 上の関係とすると, R は同値関係である. これを示せ.

27.* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上の同値関係 R で, 次の関係 R' を含むようなものによる A の商をすべて求めよ.

$$R' = \{(2, 1), (2, 4), (3, 5)\}.$$

28. (1) 自然数の集合 $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ から, 奇数の集合 (負数を含む) O への 1 対 1 対応を 1 つ求めよ. (2) 偶数の集合 (負数を含む) E から, 正の偶数の集合 E^+ への 1 対 1 対応を 1 つ求めよ.

(3) 奇数の集合 (負数を含む) O から, 正の 3 の倍数の集合 T^+ への 1 対 1 対応を 1 つ求めよ.

29. 1 対 1 対応の合成はまた 1 対 1 対応であることを示せ.

30. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$ とする.

- (1) A から B への関数はいくつあるか. (2) A から B への全射はいくつあるか.
- (3) B から A への単射はいくつあるか.

30.1 $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ とするとき, [30.] と同じ問いを解け.

31. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ とする.

(1) A から A への関数 f であって, $f \circ f = \text{id}$ となるようなものはいくつあるか. ただし id は恒等関数を表す.

(2)* B から B への関数 f であって, $f \circ f \circ f = \text{id}$ となるようなものはいくつあるか.

32. 次の集合の濃度を求めよ.

- (1) $\{0, 1, \dots, 9\}$. (2) $\{a, b, \dots, z\}$. (3) $\{\alpha, \beta, \dots, \omega\}$. (4) $\{\text{日本の祝日全体}\}$.
- (5) $\{\text{区を持つ日本の都市全体}\}$. (6) $\{\text{21 世紀のすべての日}\}$.
- (7) $\{\text{100 以下の素数全体}\}$. (8)* $\{\text{1000 以下の素数全体}\}$.
- (9) $\{\text{太陽系の惑星}\}$. (10) $\{\text{冥王星より大きい太陽系の衛星}\}$.
- (11) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z}, x^2 + y^2 = 25\}$. (12) \mathbf{Z} . (13) $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. (14) \mathbf{Q} .
- (15) $\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbf{Z}, x^2 + y^2 + z^2 = 17\}$.

33.* 次の集合の濃度が \aleph_0 となることを示せ. ただし, n はある自然数とする.

- (1) n 項整数ベクトル (成分が整数のベクトル) 全体の集合.
- (2) 整数行列 (成分が整数の行列) 全体の集合. (すべての型を含む)

34.* $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ と, $\{B_1, \dots, B_n\}$ を X の分割とすると,

$$\{A_i \cap B_j; i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\} - \{\emptyset\}$$

もまた X の分割となることを示せ. (これを交差分割という.)

35.* (1) $\mathbf{R} \cup \{i, -i\} = M$ とおく. \mathbf{R} と M との間の 1 対 1 対応を 1 つ求めよ.

(2) 実数の开区間 $(0, 1)$ と半开区間 $(0, 1]$ との間の 1 対 1 対応を 1 つ求めよ.

36.* 奇数 m, n を固定する. $m \times n$ 個の正方形からなる長方形の升目の中にある, 大きさが奇数のヤング図形の集合と, 大きさが偶数 (0 も含む) のヤング図形の集合の間の 1 対 1 対応を考えよ. これを利用して, これらの集合の大きさを求めよ. ヒント: かみをさかさにしてみよ.

37. 別紙の図のうち、一筆書き可能なものを選び、一筆書きせよ。
38. 次で与えられる各グラフ、または多重グラフの図を描け。ただし、(2) の E は、重複の有無を区別する多重集合と考える。
- (1) $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$,
- $$E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{f, a\}, \{f, g\}, \{g, b\}, \{b, h\}, \\ \{h, d\}, \{d, i\}, \{i, f\}, \{g, h\}, \{h, i\}, \{i, g\}, \{a, g\}, \{c, h\}, \{e, i\}, \{a, l\}, \{l, c\}, \\ \{c, j\}, \{j, e\}, \{e, k\}, \{k, a\}, \{d, j\}, \{f, k\}, \{b, l\}, \{j, k\}, \{k, l\}, \{l, j\}\}$$
- (2) $V = \{a, b, c, d, e, f\}$,
- $$E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{c, d\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{f, d\}\}$$
- (3) $K_{2,1}$ (4) $K_{3,4}$ (5) $K_{1,1,1}$ (6) K_7 (7) $K_{3,2,2}$
39. 別紙に示したグラフ G に関する以下の問いに答えよ。
- (1) $a, x; a, y; b, x; b, z; c, y$ の各距離を求めよ。
 (2) $cd\dots$ で始まり x へ至る道をすべて求めよ。
 (3)* c から x への道をすべて求めよ。 (4)* G の直径を求めよ。
 (5) G の切断点を求めよ。 (6) G の橋を求めよ。
40. 別紙のグラフについて、次のものをすべて求めよ。(道、サイクルは頂点の列で、小道は辺の列で答えよ。)
- (1) a から d への道。 (2)* $cva\dots$ で始まり、 d へ至る小道。
 (3)* b から e への小道。 (4) a から始まるサイクル。
41. [40.] のグラフに対して、(1) 直径はいくらか。(2) $V' = \{a, b, c, d, e\}$ で誘導される部分グラフを求めよ。(3) $V' = \{b, d, e\}$ で誘導される部分グラフを求めよ。
 (4) 4頂点で誘導される部分グラフのうち、非連結なものはいくつあるか。
42. 別紙のグラフ G について、以下の問いに答えよ。
- (1) G はどのようなグラフか。なるべく詳しく答えよ。(2) G の頂点数と辺数を求めよ。(3)* G のオイラー回路を1つ求めよ。(4) G に含まれるサイクルをなるべくたくさん求めよ。(5)* G のハミルトンサイクルを1つ求めよ。
43. 別紙の多重グラフの、(1) 隣接行列、(2) 接続行列、(3) 連結行列を求めよ。
44. m, n を奇数とする。 m 頂点からなる、 n -正則グラフは存在しないことを示せ。
45. (1) サイクルグラフを6個含む5頂点グラフを1つ求めよ。
 (2) サイクルグラフを7個含む5頂点グラフを1つ求めよ。
 (3) サイクルグラフを12個含む5頂点グラフを1つ求めよ。
 (4) サイクルグラフを13個含む5頂点グラフを1つ求めよ。
 (5)* サイクルグラフを22個含む5頂点グラフを1つ求めよ。
46. (1) 8頂点からなる連結3-正則グラフをいくらか求めよ。(2) 切断点と橋を3つずつ持つグラフをいくらか求めよ。

47. 5個以下の頂点を持つ木をすべてかけ。
48. 6個の頂点を持つ木をすべてかけ。
49. 次の次数列を持つグラフを描け. ((1)(2)はすべて求めよ. (3)は1つでよい.)
 (1) 2,1,1,1,1 (2) 2,2,2,2,2,2,2,2 (3) 6,5,4,3,2,2,2,0
50. 次の次数列を持つグラフは存在しないことを示せ.
 (1) 3,2,1 (2) 3,1,1,1,1 (3) 5,3,1,1,1,1
51. 別紙の各平面(多重)グラフに対して, (a): 各領域の次数を答えよ. また,
 (b): 双対(多重)グラフを求めよ.
52. ある木の頂点の数 p と辺の数 q の比 p/q を求めたところ, 1.0016であった. p, q を求めよ.
53. ある2つの木 T, T' の次数列を調べたところ, 各々次のようになった.
 $T: 5,4,3,2,1, \dots, 1; T': 6,6,4,3,3,2, \dots, 2,1, \dots, 1.$
 (1) T の完全な次数列を求めよ.
 (2) T' の次数1の頂点の数を求めよ.
54. (1) 7頂点からなる木をすべて求めよ. (11個)
 (2) 直径が3で, 頂点が8個ある木をすべて求めよ. (3個)
 (3) 直径が3で, 頂点が n 個ある木はいくつあるか.
55. (1) 次の隣接行列を持つ多重グラフを辺を交差させずに描け.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (2) $K_{5,2}$ を辺を交差させずに描け. (3) $K_{2,2,1}$ を辺を交差させずに描け.
 (4) $K_{2,2,2}$ を辺を交差させずに描け. (5) $K_{3,2,1}$ は平面的か?
56. (1) $K_{m,n}$ がハミルトングラフであるための必要十分条件を求めよ.
 (2)* $K_{l,m,n}$ がハミルトングラフであるための必要十分条件を求めよ.

57. $m \times n$ の大きさの長方形を mn 個の大きさ 1×1 の正方形に分割してできた図形を $B(m, n)$ とおく. $B(m, n)$ における Hamilton knight cycle とは, $B(m, n)$ のある升目から出発してチェスの knight の動きですべての升目を 1 回ずつ通り, 元の升目に戻ってくるサイクルのことである. 始点と終点が違うときは Hamilton knight path と呼ぶ.

- (1) $B(4, 3)$ の Hamilton knight path をなるべく多く求めよ.
- (2)* $B(4, 5)$ の Hamilton knight path を求めよ.
- (3)* $B(6, 6)$ の Hamilton knight cycle を求めよ.

58. 別紙の平面グラフの (a) 領域彩色 (外側も), (b) 頂点彩色を最小の色数で行なえ.

59. 別紙の各グラフの最小全域木を 1 つずつ求めよ. またその重みの和もかけ.

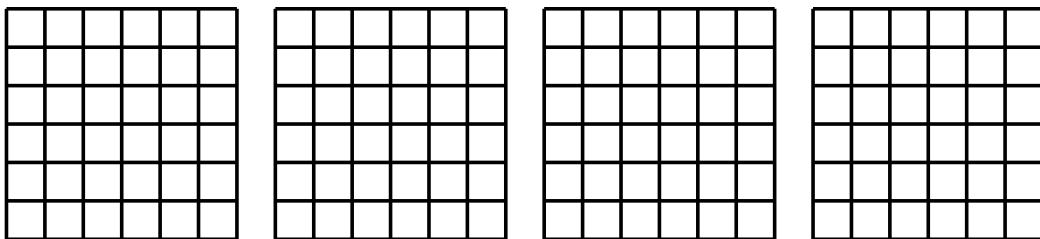
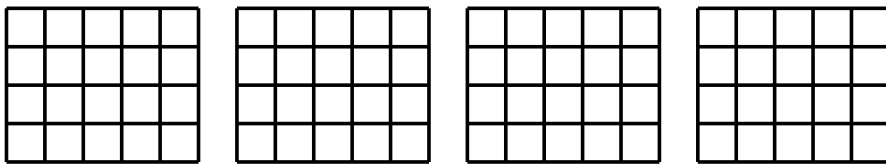
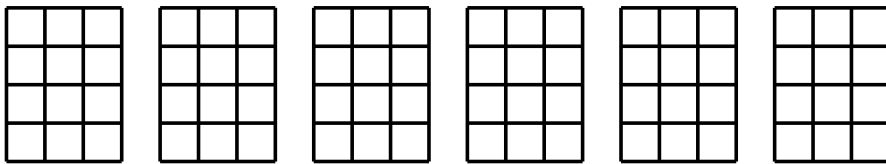
60. 別紙に示された木に対して, 次の各頂点を根としたとき, 与えられた深さの頂点をすべて求めよ.

- (1) h , 深さ 3 (2) p , 深さ 4 (3) x , 深さ 8

61. 3 個の連結成分よりなる森の頂点の数 p と辺の数 q に対して, $p - q$ はいくらか.

62. 別紙の各グラフの全域木はいくつあるか.

.....



63. I: 次の計算式に対応する順序根つき木を書き, 計算式を II: ポーランド記法 (前置記法), 並びに III: 逆ポーランド記法 (後置記法) で書き表せ.

- (1) $(a + b) / ((c - d) \times e)$
- (2) $((a \times b) / (c - d)) + ((e / (f - g)) - (h + i))$
- (3) $(((((a - b) - c) - d) - e) / (f - (g - (h - (i - j)))))$

64.* ある多重グラフの隣接行列 A がベキ零 (ある k が存在して $A^k = O$) のとき, A は零行列でなければならないことをグラフ理論を用いて示せ.

65.* グラフ G の頂点の最大次数を n とするとき, このグラフの彩色数 $\chi(G)$ は, $n + 1$ 以下であることを示せ.

66. (1) 別紙のグラフの集合を, 同型なもの同士に分類せよ.
(2) 別紙のグラフのうち, 平面的なものはどれか.

67.* 別紙グラフ (o) は (i) と同型なグラフを部分グラフとしていくつ含んでいるか.

68.* 別紙グラフ (g),(h),(j),(l) の各グラフについて, K_5 か $K_{3,3}$ と同相な部分グラフを見つけよ.

69. (1) 別紙グラフのうちで, 2色で頂点を塗れるものはどれか. (2) (g),(h),(o) のグラフを, できるだけ少ない色数で頂点彩色せよ.

70. 別紙のグラフについて, 次を行なえ.

- (1) 領域を4色で彩色せよ.
- (2) 双対を求めよ.
- (3) ハミルトン道を1つ求めよ.
- (4) 最小全域木を1つ求め, その重みの和を答えよ.

71. (1) 5-正則平面グラフの例をいくらかあげよ. (1つでも可)

(2) 5-正則平面グラフの頂点数を p とするとき, $p \geq 12$ であることを示せ.

(3) 6-正則平面グラフは存在しないことを示せ.

72. 別紙のグラフの全域木はいくつあるか.

73. (1) 別紙のように, ドーナツの面上に6つの点がある. これらをドーナツ面上で結んで K_6 を描け. ただし, 辺は交差してはいけない.

(2) 同様にして辺を交差させずに $K_{4,3}$ を描け.

(3)* 同様にして辺を交差させずに K_7 を描け.

74. 次を示された頂点と弧を持つダイグラフを描け.

(1) 頂点: a, b, c, d, e, f ;

弧: $(a, a), (a, b), (b, c), (b, a), (f, a), (c, d), (c, d), (d, e), (e, f), (e, f)$

(2) 頂点: a, b, c ; 弧: $(a, a), (a, a), (a, a), (a, b), (b, c), (c, a)$

75. [74.(1)] のダイグラフに対して, a から始まるサイクルをすべて求めよ. (頂点列で答えよ)

76.* トーナメントが, ハミルトン道を持つことを示せ.

(トーナメントとは, 完全グラフの各辺に適当に向きをつけてダイグラフにしたものである. したがって頂点数が同じでも互いに同型でないものが存在する.)

77. 別紙に示したラベルつきダイグラフの a から w への最短道をすべて求めよ. またその長さはいくらか.

78. 別紙に示されたラベルつきダイグラフの, (1) a から q への最短道をすべて求め, その長さをかけ. (2) b から r への最短道をすべて求め, その長さをかけ.

79. (1) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく. ダイグラフを利用して, M^3, M^7 を求めよ.

(2)* n を自然数とする. ダイグラフを利用してジョルダン細胞 $J = \begin{pmatrix} n & 1 & 0 \\ 0 & n & 1 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$

の m 乗を求めよ.

(3)* $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく. ダイグラフを利用して, M^3, M^5 を求めよ.

80. k 次単位行列を E_k とかく. k 次行列 $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & E_{k-1} \\ 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = J_k$ とおく.

(1) 10 次行列 $M = \begin{pmatrix} J_5 & E_5 \\ 0 & J_5 \end{pmatrix}$ に対して M^5 を求めよ.

(2) 12 次行列 $N = \begin{pmatrix} J_4 & E_4 & O \\ O & J_4 & E_4 \\ O & O & J_4 \end{pmatrix}$ に対して N^5 を求めよ.

(3) N^4 を求めよ.

(ヒント: M, N はあるダイグラフの隣接行列である. このダイグラフをうまく表せ.)

81. 別紙のダイグラフは狭義の弱連結, 狭義の片方向連結, 強連結のうちどれか.

82. 次に示された (1) 有限状態機械, および (2) 有限オートマトンの状態遷移表を状態遷移図に書き換えよ. ただし (2) の受理状態は q_5, q_6 である.

		a	b	q_5	a	b
	q_0	q_1, x	q_1, y	q_5	q_2, x	q_8, x
(1)	q_1	q_2, x	q_1, z	q_6	q_4, x	q_1, y
	q_2	q_2, x	q_7, y	q_7	q_6, z	q_8, z
	q_3	q_2, x	q_5, z	q_8	q_9, z	q_3, y
	q_4	q_7, z	q_1, z	q_9	q_9, y	q_8, x

		a	b	q_4	a	b
	q_0	q_1	q_5	q_4	q_5	q_0
(2)	q_1	q_2	q_5	q_5	q_6	q_1
	q_2	q_5	q_3	q_6	q_6	q_6
	q_3	q_4	q_5			

83. (1) [82.(1)] で, 次の記号列を入力した際の出力を求めよ.

(a) $aabbbabab$ (b) $abbabaabaaa$ (c) $babbbbbbbbaab$.

(2) [82.(2)] で, 受理される記号列を無限個見つけよ.

84. (1) 別紙に示された有限オートマトンの状態遷移表をかけ.

(2) これが受理する記号列はどのようなものか.

85. a, b を入力記号とする有限オートマトンで, 以下の記号列のみを受理するものを構成せよ.

- (1) a が丁度 1 回現れる記号列.
- (2) a と b の個数の和が 4 の倍数 +1 となる記号列.
- (3) a と b の個数の差が 3 の倍数となる記号列.

86. a, b を入力記号とする有限オートマトンで, 以下の記号列のみを受理するようなものを構成せよ.

- (1) a が奇数回, b が 3 の倍数 +1 回現れる記号列.
- (2) $aabb$ を部分列として含む記号列.
- (3) $bababb$ を部分列として含む記号列.
- (4) aab を部分列として 2 つ以上含む記号列.
- (5) aab を部分列として 1 つだけ含む記号列.

87.* a, b を入力記号とする有限オートマトンで, 以下の記号列のみを受理するようなものを構成せよ.

- (1) a が丁度 2 回, b が丁度 3 回現れる記号列.
- (2) baa を部分列として 4 の倍数個含む記号列.
- (3) a が偶数回かつ b が奇数回, または, a が 3 の倍数回かつ b が偶数回現れる記号列.

88. 11問のうち, 6問を選んで答える試験がある. ただし, 1—5からは, 3問以上を選択しなければならない. 選び方は何通りか.
89. (1) 11個の異なる玩具を5人の子どもに分けることにする. ここで, 広志, 武志には3個ずつ, ユウタ, さおりには2個ずつ, ミキオには1個与えるとすると, 何通りの分け方があるか.
- (2)* 11個の異なる玩具を5人の子どもに 3,3,2,2,1個に分けて与えることにする. 何通りの方法があるか.
90. 10個の玩具がある. これを5人の子供に分けたい. ただし, 10個のうち, 2つのゲームは同一なので, 別々の子供に与える. また, 10個は, 年齢順に 3,2,2,2,1個ずつに分けて与える. 何通りの分け方があるか.
91. 8人でテニス(シングルス)の試合を行う. トーナメント方式とし, シードはなしとする. (1) 組合せは何通りか. (2) また, 選手Aと選手Bが, ファイナル以外では当たらないようにする時, 組合せは何通りか.
92. 次を計算せよ.

$$(1) \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} \quad (2) \binom{2n}{n} + \binom{2n-1}{n-1} + \cdots + \binom{n}{0}$$

93. ある mn 個の相異なる玉を, m 個ずつに分割する方法は何通りあるか.
94. 色の異なる n 個のビーズがある. これらをつなげて腕輪を作る方法は何通りか. ただし, ビーズには糸を通す向きによる違いはないとし, 糸のつなぎ目は無視する.
95. $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$ を示せ.
96. ある人が, ルーレットを6回する時間がある. 各回に1ドル得るか1ドル失う. この人は, 2ドル持ってゲームを始めた. 6回に満たなくても, お金がなくなるか, 6ドルになればやめるとするとき, このゲームの起こり得る経過の場合の数, および, 持ち金が6ドルとなる場合の数を求めよ. (グラフをかいて考えよ.)
97. $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$ を示せ.
98. 次の等式を示せ. (ヒント: $(1+i)$ を何乗かすると.....)

$$\binom{4n}{0} - \binom{4n}{2} + \binom{4n}{4} - \binom{4n}{6} + \cdots + \binom{4n}{4n} = (-4)^n$$

99. 6人ずつの男女から, 2組以上4組以下のカップルをつくる場合の数を求めよ.
100. 男性 m 人, 女性 n 人のパーティーをする. そこから k 組のカップルをつくる場合の数を求めよ.
101. 5人でトーナメント試合をする. この時の組合せは何通りか. ただし, 組合せは不公平でもよいとする. (自由にシードしてよい.)

102. 正多面体 P とその面の数だけの色が与えられている. 次の各場合において, 面を与えられた色すべてを使って塗り分ける方法は何通りあるか. ただし, 回転によって互いに移り合うような塗り方は同一視する.

- (1) $P =$ 正 4 面体 tetrahedron (2) 立方体 cube (3)* 正 8 面体 octahedron
 (4)* 正 12 面体 dodecahedron (5)* 正 20 面体 icosahedron

103. 7 人の気の合った仲間で晚餐会を開く. 円卓に 7 人が誰とでも 1 度ずつ隣り合うように座るためには, 何回席替えをすればよいか.

104. (1) $100!$ は, 2 で何回割り切れるか. また, (2) 十進法で表すと, 末尾にいくつの 0 がつくか.

105.* $2^n!$ は, 2 で何回割り切れるか.

106. $\sum_{k=1}^n \binom{k+\ell-1}{\ell} = \binom{n+\ell}{\ell+1}$ を示せ.

107.* [106.] を用いて, 1 から n までの数の 4 乗和を求める公式を作れ.

108.* $\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(n-2i)!(i!)^2} 2^{n-2i}$ を示せ. (ヒント: $(1+t)^{2n}$.)

109. ([57.] 参照) (1) m, n を奇数とするとき, $B(m, n)$ における Hamilton knight cycle は存在しないことを示せ.

(2)* $B(2n, 2n)$ には, 左右対称の Hamilton knight cycle が存在しないことを示せ. ここで左右対称とは, Hamilton knight cycle の始点と進行方向の違いを無視して, その軌跡を単なるグラフと見たとき, それがチェス盤の縦の中心線に関して左右対称形になっていることである.

110.* ある n 元集合 (n 個の元よりなる集合) A を, 1 元集合 m_1 個, 2 元集合 m_2 個, 3 元集合 m_3 個, \dots , g 元集合 m_g 個よりなる部分集合の族に分割する仕方は何通りか. ただし, $n = \sum im_i$ である.

111.* (1) 円形の生地を中心から放射状に 8 等分に切ったピザにトッピングをすることにした. 3 種類の材料があって, A, B は 3 片分, C は 2 片分の分量があるとする. 何通りのピザができるか. (2) A, B, C の分量をそれぞれ 4, 2, 2 片分とするとき同じ問題を解け. (3) 9 等分したピザで, A, B, C の分量をそれぞれ 3 片分ずつとするとき同じ問題を解け.

112.* (1) 赤 3 つ, 青 3 つ, 白 2 つの計 8 個のビーズをつなげて腕輪をつくる. 何通りの腕輪ができるか. ただし, 同色のビーズは区別できないとし, その他の条件は, [94.] に準ずる. (2) 赤 3 つ, 青 3 つ, 白 3 つの計 9 個の場合はどうなるか.

113.* n 人のお互いに背丈の異なる人が 1 列に並んでいる. これを前から見たとき, 前の人に完全には隠れずに少しでも頭が見える人が p 人, 同様に後ろから見える人が q 人いるとする. このような条件をみたす並び方の数を $B(n, p, q)$ とする. (ただし遠近法による効果は無視するものとする)

(1) $B(n, 1, 1)$ を求めよ. (2) $B(n, 1, 2)$ を求めよ.

(3)* $B(n, p, q)$ に関する漸化式を求めよ.

114. $t \neq 1$ のとき, 次を示せ: $\sum_{n_1+\dots+n_s=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_s!} t^{n_1+2n_2+\dots+sn_s} = t^n \frac{(1-t^s)^n}{(1-t)^n}$.

117. 有理数体 \mathbf{Q} において, 演算 $*$ を $a * b = a + b - ab$ で定義する. (1) この演算は可換か, また, 結合的か. (2) $*$ の単位元を求め, 逆元のある元 a に対して, a^{-1} を求めよ.
118. 実数体 \mathbf{R} に対して演算 \square を $x \square y = \log(e^x + e^y)$ で定義する. (1) このとき, \square の単位元はあるか. (2) 分配法則 $a + (b \square c) = (a + b) \square (a + c)$ がなりたつことを示せ.
119. 正の実数全体の集合 R_+ に対して演算 $**$ を $x ** y = e^{\log x \log y}$ で定義する. (1) このとき $**$ の単位元を求めよ. (2) 分配法則 $a **(bc) = (a ** b)(a ** c)$ がなりたつことを示せ.
124. (1) \mathbf{Z}_7 の乗法表をつくれ. (2) \mathbf{Z}_9 の乗法表をつくれ.
125. \mathbf{Z}_{26} において, 次の元を求めよ.
 (1) -17 (2) $25 \cdot 4$ (3) 11^{-1} (4) 5^{-1} (5) 15^{-1}
126. \mathbf{Z}_{18} の単元をすべてあげ, それらの乗法的逆元を求めよ.
127. 3次対称群 S_3 に対して, $H = \{e, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$ は正規部分群であることを示し, 剰余群 S_3/H と同型な群を1つ求めよ.
128. 指数2の部分群は正規であることを示せ.
129. (1) 位数(元の数)4の同型でない可換群を2つ構成せよ. (2) 位数9の同型でない可換群を2つ構成せよ.
130. M で, 整数を成分とする2次行列全体の集合を表す. また, N で偶数(負も含めて)を成分とする2次行列全体の集合を表す. このとき, (1) N は M のイデアルであることを示せ. (2) 商環 M/N は成分が0または1の2次行列の集合とみることができる. E, A, B, C, D, F をそれぞれ行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと, それらについての乗法表をつくれ.

141. 奇数全体の集合 P 上の関係 R を $xRy \iff x \leq y + 1$ で定義する. R は順序関係か.
142. 自然数全体の集合 \mathbf{N} を整除で順序づけ, それを \mathcal{N} とかく. すなわち \mathcal{N} においては, y が x で割り切れる ($x \mid y$ とかく) とき, またそのときに限り $x \leq y$ と定める. 以下に示す \mathcal{N} の部分順序集合およびそれらの直積に対して, そのハッセ図を描け.
- (1) $\{1, 9, 15\}$ (2) $\{2, 4, 5, 8, 16, 55\}$ (3) $\{20 \text{ 以下の自然数全体}\}$
 (4) $\{60 \text{ の正の約数}\}$ (5) $\{72 \text{ の正の約数}\}$
 (6) $\{63 \text{ か } 24 \text{ の正の約数}\}$ (7) $\{35 \text{ の正の約数}\} \times \{1, 2, 3\}$
 (8) $\{1, 2, 3, 6\} \times \{2, 4, 5\}$
143. 6 の分割全体の集合を細分で順序づけるとき, そのハッセ図を描け.
144. (1) 4 元以下からなる束をすべて求めよ. (5 個) (2) 5 元以下からなる束をすべて求めよ. (5 個) (3) * 6 元以下からなる束をすべて求めよ. (15 個)
145. [144.] において, 束を分配束に置き換えた問を解け.
146. $S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ は, 関係 \subset を \leq と思うことで相補束となる. そのハッセ図を描き, 各元に対応する補元を示せ.
147. $\{a, b, c, d\}$ の部分集合全体の集合を包含関係で順序づけるとき, そのハッセ図を求めよ. これは相補的か. 原子はいくつあるか. $\{a, b, d\}$ を原子の結びで表せ.
148. 別紙の束の以下の元に対して, (a) これらを余分のない結び既約な元の結びとして表せ. また (b) これらを余分のない交わり既約な元の交わりとして表せ.

$$(1) b, g, h, i, \hat{1}. \quad (2) a, e, h, k, m, n, q.$$

149. 別紙の束の, 結び既約な元からなる部分順序集合を図示せよ.
150. 有界だが有限でない束を 1 つ求めよ.
151. $n = 1, \dots, 4$ とする. (n) n 個の原子 a, b, \dots を持つブール代数のハッセ図を描け.
152. 次の各集合 A に対して, A の分割全体の集合 $\mathcal{P}(A)$ を細分で順序づけるとき, そのハッセ図を描け.

$$(1) A = \{1, 2, 3\} \quad (2) A = \{1, 2, 3, 4\}$$

153. n の正の約数全体を整除で順序づけた集合を D_n とかく. 以下の D_n のハッセ図を描け. またそのハッセ図から, ブール代数になるのはどれか言え.

$$(1) D_8 \quad (2) D_{14} \quad (3) D_{30} \quad (4) D_{12} \quad (5) D_{21} \quad (6) D_{18}$$

154. [153.] で一般に n がどういうときに D_n がブール代数になるのか考えよ.

155. 次の命題を簡単にせよ.

- (1) $(p \wedge p) \vee \sim p$ (2) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q)$ (3) $p \vee q \vee (p \wedge q)$
 (4) $(p \wedge q \wedge r) \vee ((\sim p \vee \sim q) \wedge r)$ (5) $\sim(p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)$
 (6)* $(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r)$

156. 次の命題の真理値表を求めよ.

- (1) $\sim(p \vee q) \wedge r$ (2) $\sim p \wedge (\sim q \vee p)$ (3) $(\sim p \vee p) \rightarrow (q \wedge p)$
 (4) $\{p \wedge (q \vee r)\} \leftrightarrow \{(p \wedge q) \vee (p \wedge r)\}$ (5) $\sim(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$
 (6) $\{(p \vee q) \wedge (p \vee r)\} \rightarrow (q \wedge \sim r)$ (7) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

157. (1) 命題 $p \wedge \sim(p \vee q)$ が矛盾命題であることを示せ.

(2) 次の命題が恒真命題であることを示せ.

$$\{(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p)\} \leftrightarrow \{(p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)\}$$

158. 次の論法は妥当か.

- (1) $p, q, r \vdash p \wedge q \wedge r$ (2) $(p \wedge q), (\sim p \vee r) \vdash r$ (3) $p \wedge \sim p \vdash q$
 (4) $p \rightarrow q, p \vdash p \vee q$ (5) $p \leftrightarrow q, q \rightarrow r, r \vdash \sim p \wedge \sim q \wedge r$

159. 3段論法を用いて, $p \rightarrow q, q \rightarrow r, r \rightarrow s \vdash p \rightarrow s$ が妥当であることを示せ.

160. ブール代数 D_{30} の部分代数をすべて求めよ.

161. ブール代数 D_{330} を考える. (別紙参照)

- (1) 2元からなる部分代数をすべて求めよ.
 (2) 4元からなる部分代数をすべて求めよ.
 (3) 8元からなる部分代数をすべて求めよ.
 (4) 部分代数は全部でいくつあるか.

162. 別紙に示した各束について, 4元または5元よりなる部分束をすべて求めよ. ただし, 同型なものを除かずにあげよ.

163. (1) 別紙の順序集合 L は束になるか? なる場合は, D_6 と同型な部分束はいくつあるか?

(2) 別紙の順序集合 P は束になるか? 理由をつけて答えよ.

164. ブール代数 B において, 次の各等式を (a) 公理から証明し, (b) その双対形をかけ. ((3) は (1) または (2) を使ってよい.)

$$(1) a * a = a \quad (2) a * 0 = 0 \quad (3) a * (a + b) = a$$

165. ド・モルガンの法則を示せ. (ブール代数の公理と, ベキ等, 有界, 結合律, 補元の一意性は用いてもよい.)

166. 次の各ブール等式を (a) 示し, (b) その双対形をかけ.

$$(1) (a * 1) * (0 + a') = 0 \quad (2) [(a * b) + a + b] * b = b \\ (3) a + (a' * b) = a + b$$

167. ブール代数において, (a) $a + b = b$, (b) $a * b = a$, (c) $a' + b = 1$, (d) $a * b' = 0$ は同値である. このことを次によって示せ.

$$(1) (a) \iff (b) \quad (2) (c) \iff (d) \\ (3) \text{すべての同値性} \quad ((1),(2) \text{ を使ってよい.})$$

168. 次の x, y, z, t に関するブール式を, 完全加法標準形に直せ.

$$(1) (x + y')' \quad (2) x(t + y'z) \quad (3) (x' + y + zx)' + (yzx)'t'z \\ (4) (x + y)'z'(t + x) + xyz \quad (5) (xy + y'z' + zt + t'x)''' \\ (6) ((x + y'z)' + t)' + ((xt)' + z)' \quad (7) (xy + tx + x'y)'z'$$

169*. 変数 x, y に関するブール式全体は, ブール代数 $B[x, y]$ を構成する. その原子をすべて求めよ.

170. [169.] で, $a = xy, b = xy', c = x'y, d = x'y'$ とおくと, 次の式を a, b, c, d で表せ.

$$(1) x \quad (2) y + x' \quad (3) x'(x + y + x') \quad (4) (y' + x')(y' + x)$$

171. 合意法を用いて, 次の各ブール式の主項をすべて求めよ.

$$(1) xy + y'z + y'zt + x'y' \quad (2) xyz' + yz + x'z' \\ (3) x'y + y'z + z'x + xyz \quad (4)^* xy + y't + x'z' + xy'zt'$$

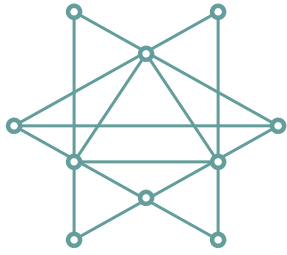
172. カルノー一図により, 次の各ブール式の最簡形をすべて求めよ.

$$(1) xyz' + xy'z' + x'y'z + x'yz \quad (2) x'y + xy' + xy \\ (3) xyz + xy'z + xyz' + x'y'z + x'y'z' + x'yz' \\ (4) xyzt + xy'zt + x'yzt + xy'zt' + x'y'zt' + xyz't + x'y'z't + x'yz't \\ (5) xyz' + xt' + x'y'z + y'zt + x'yt$$

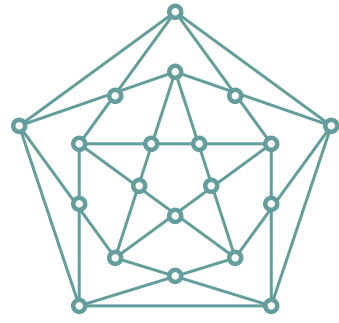
173. カルノー一図により, 次の完全乗法標準形で表されたブール式の最簡形をすべて求めよ.

$$(1) (x' + y' + z' + t')(x' + y' + z + t')(x + y' + z + t) \\ (2) (x + y + z' + t)(x' + y + z + t) \\ (3) (x + y + z' + t')(x + y + z + t')(x + y' + z' + t)(x' + y' + z' + t) \\ (4)^* (x + y' + z + t')(x' + y + z' + t)$$

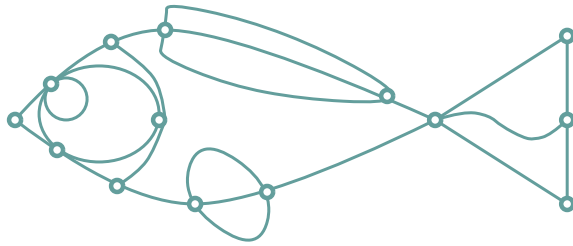
37. 1



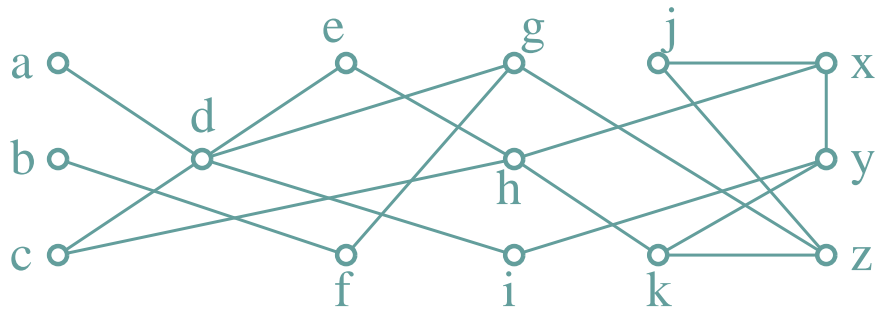
2



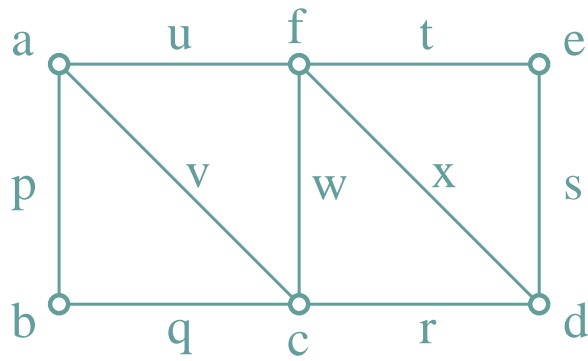
3



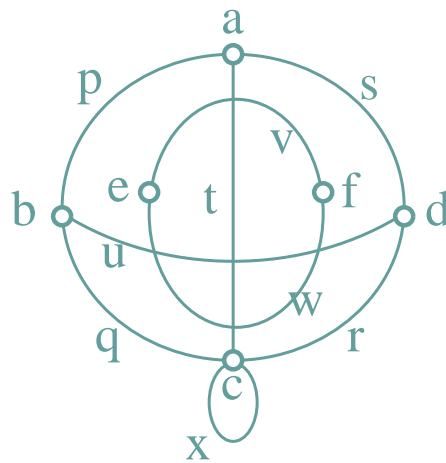
39.



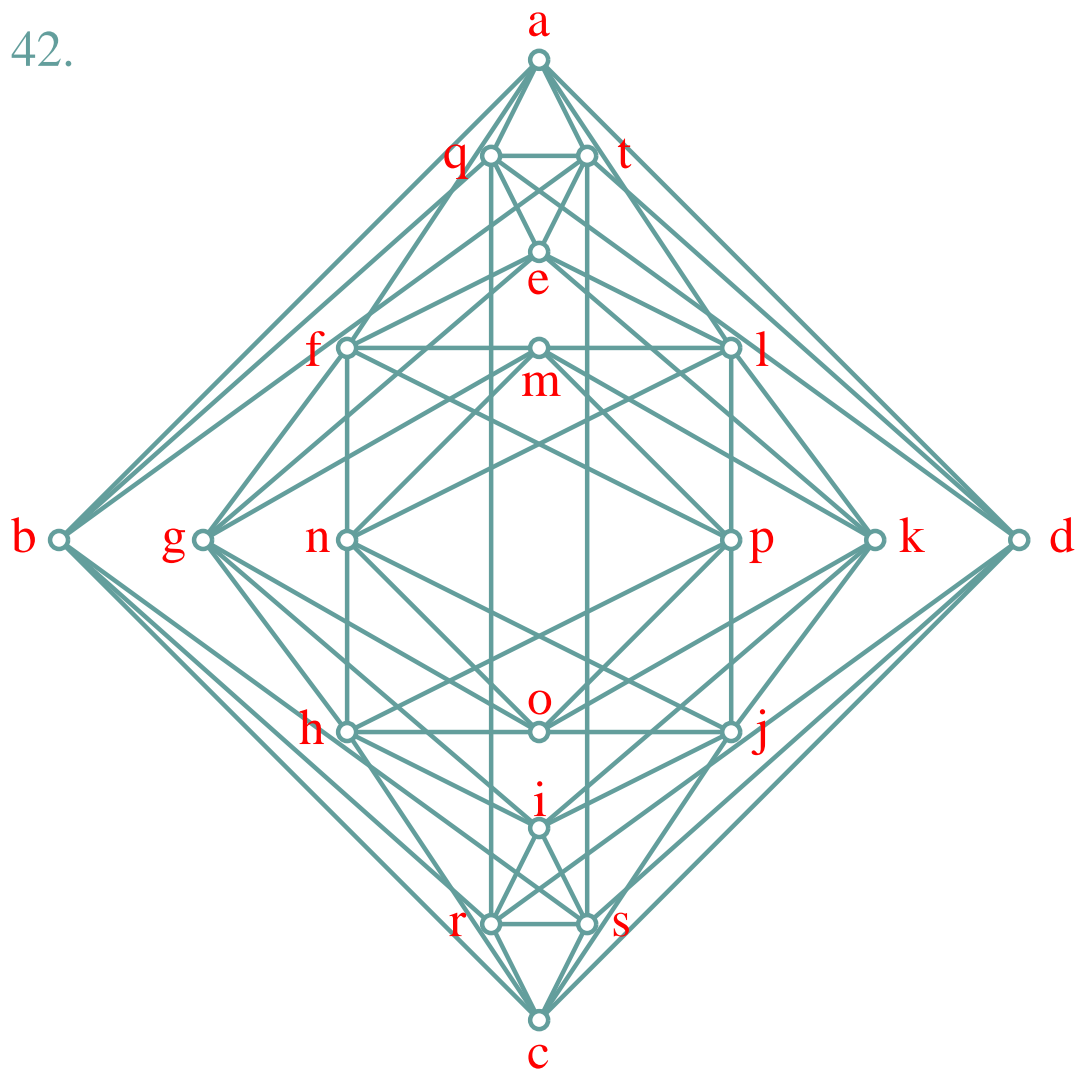
40.



43.

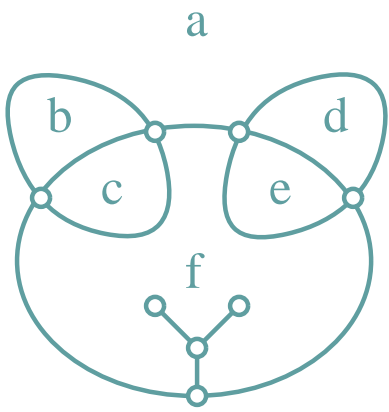


42.

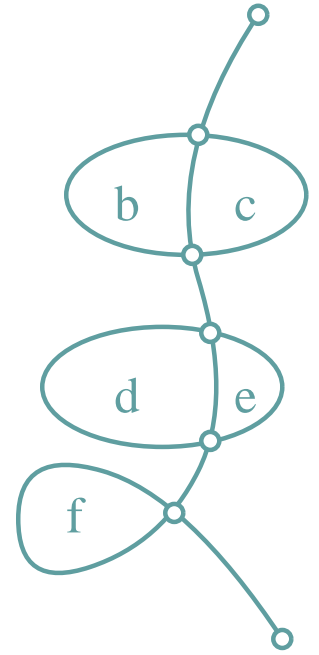


51.

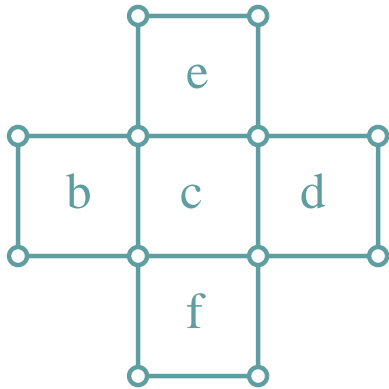
(1)



(4)

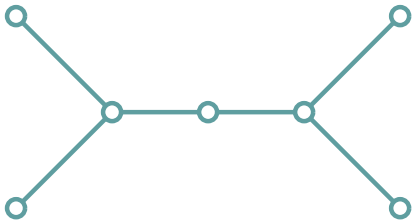


(2)



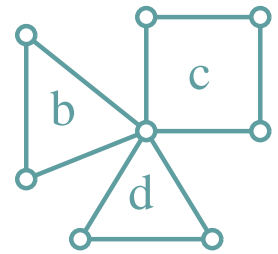
a

(3)

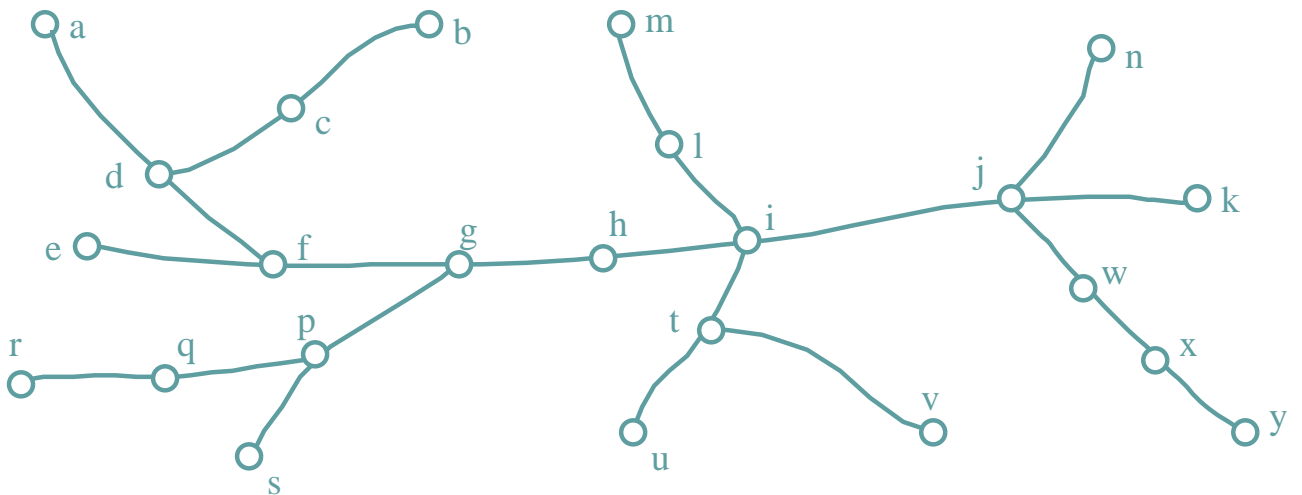


a

(5)

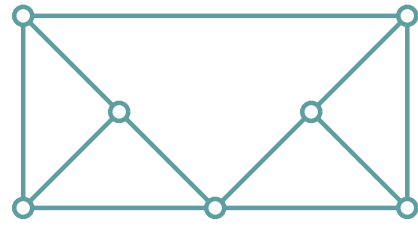
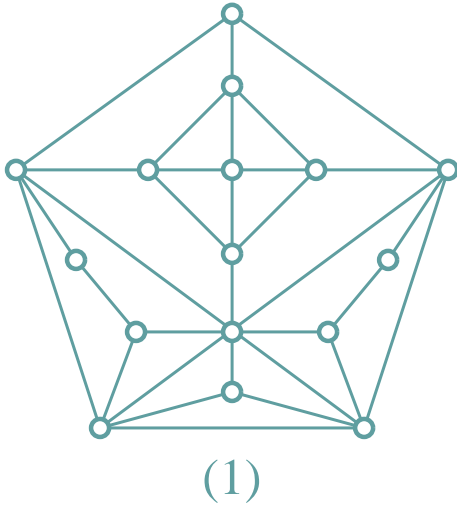


60.



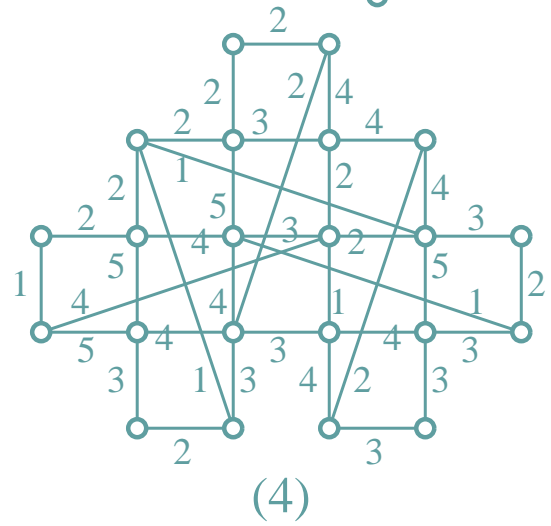
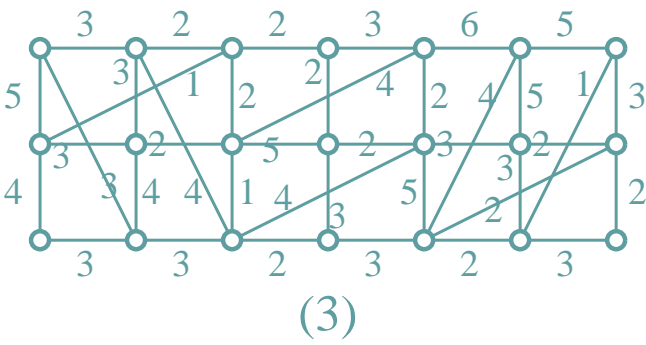
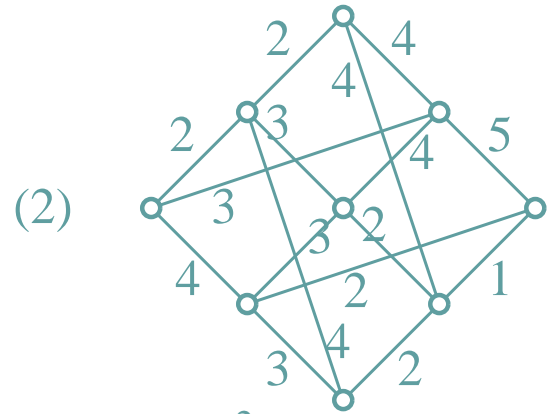
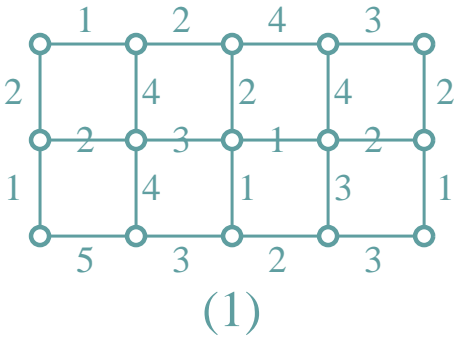
T

58.

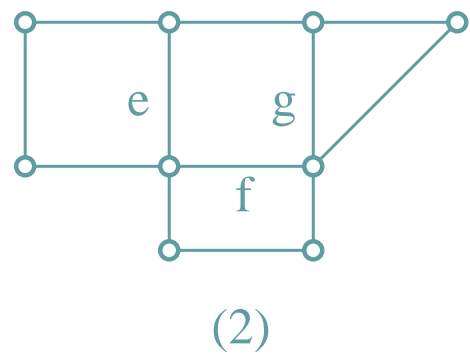
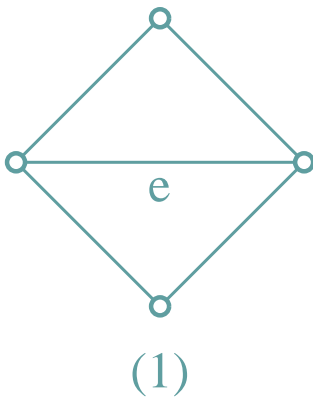


(2)

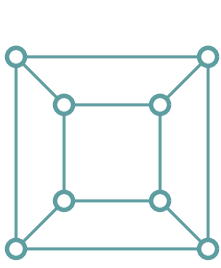
59.



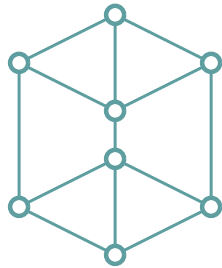
62.



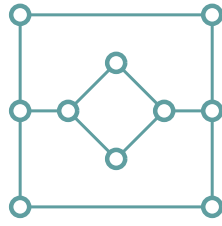
66-69.



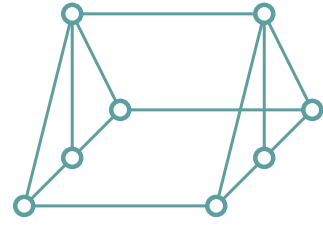
(a)



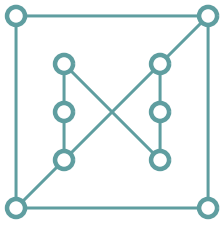
(b)



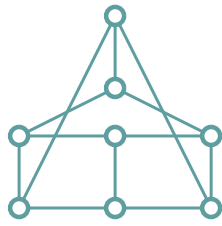
(c)



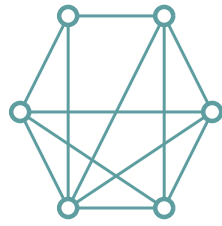
(d)



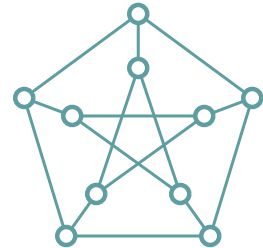
(e)



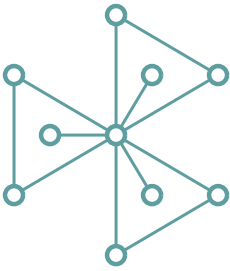
(f)



(g)



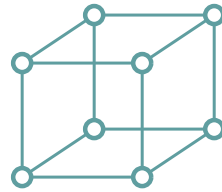
(h)



(i)



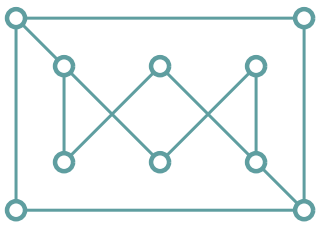
(j)



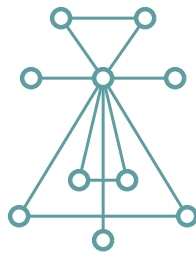
(k)



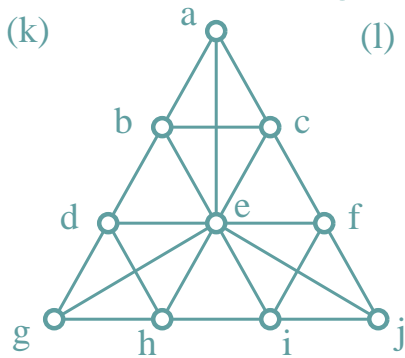
(l)



(m)

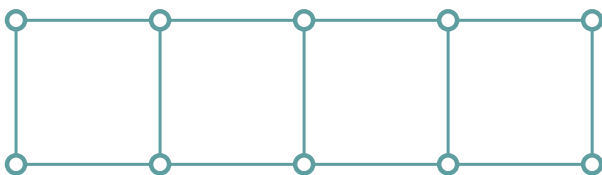


(n)

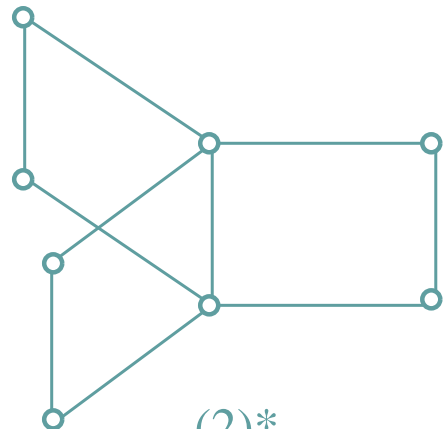


(o)

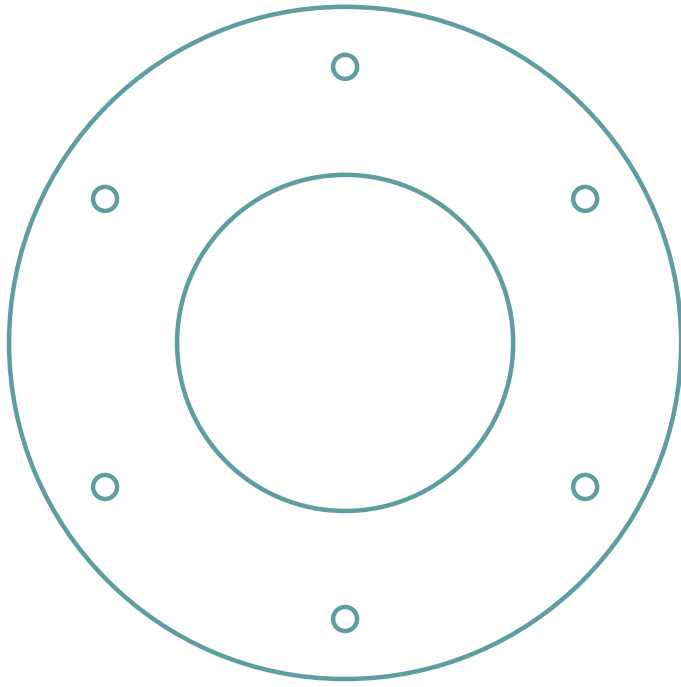
72.



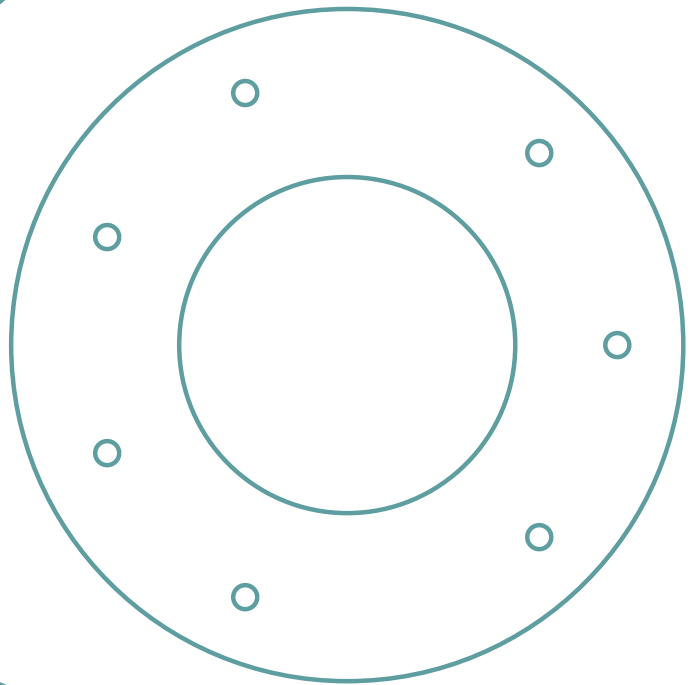
(1)



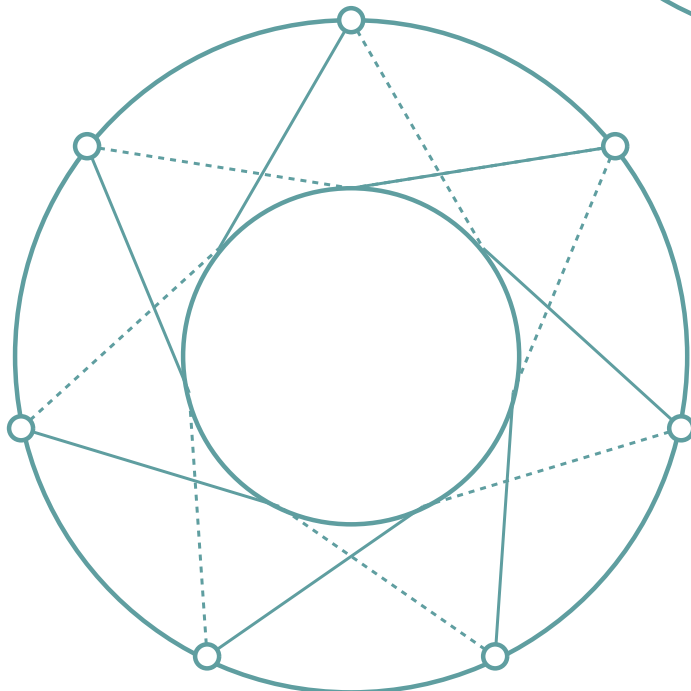
(2)*



73 (1)

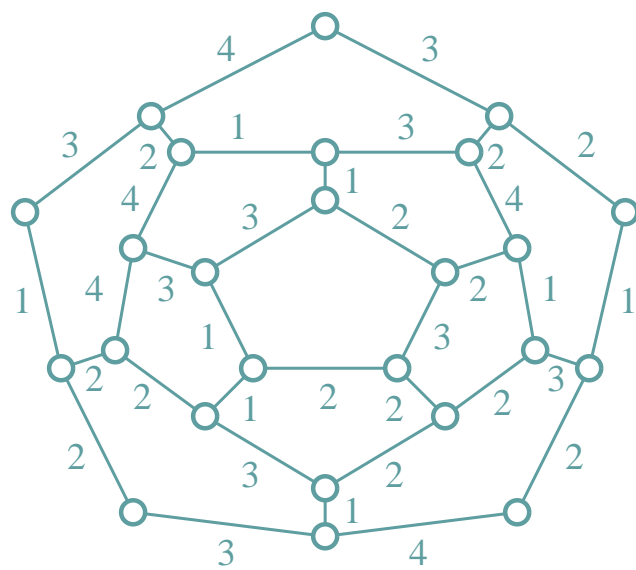
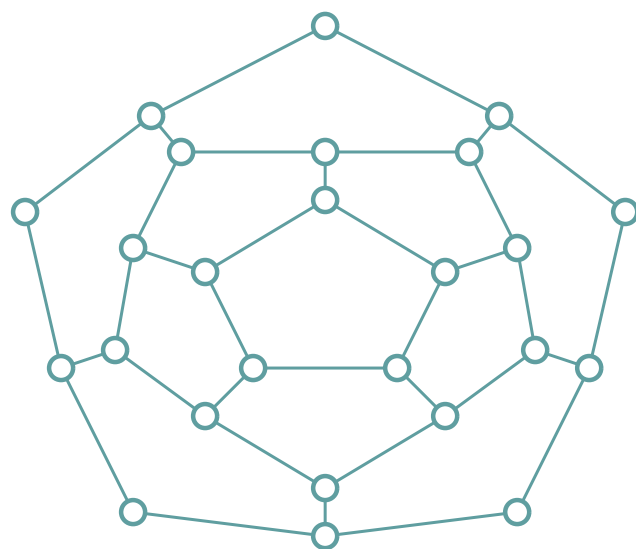


(2)

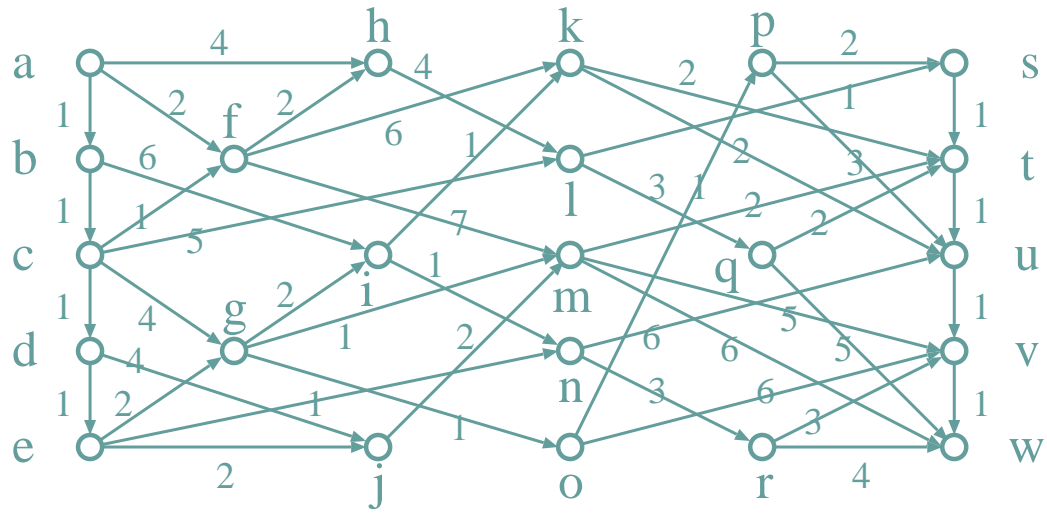


(3)

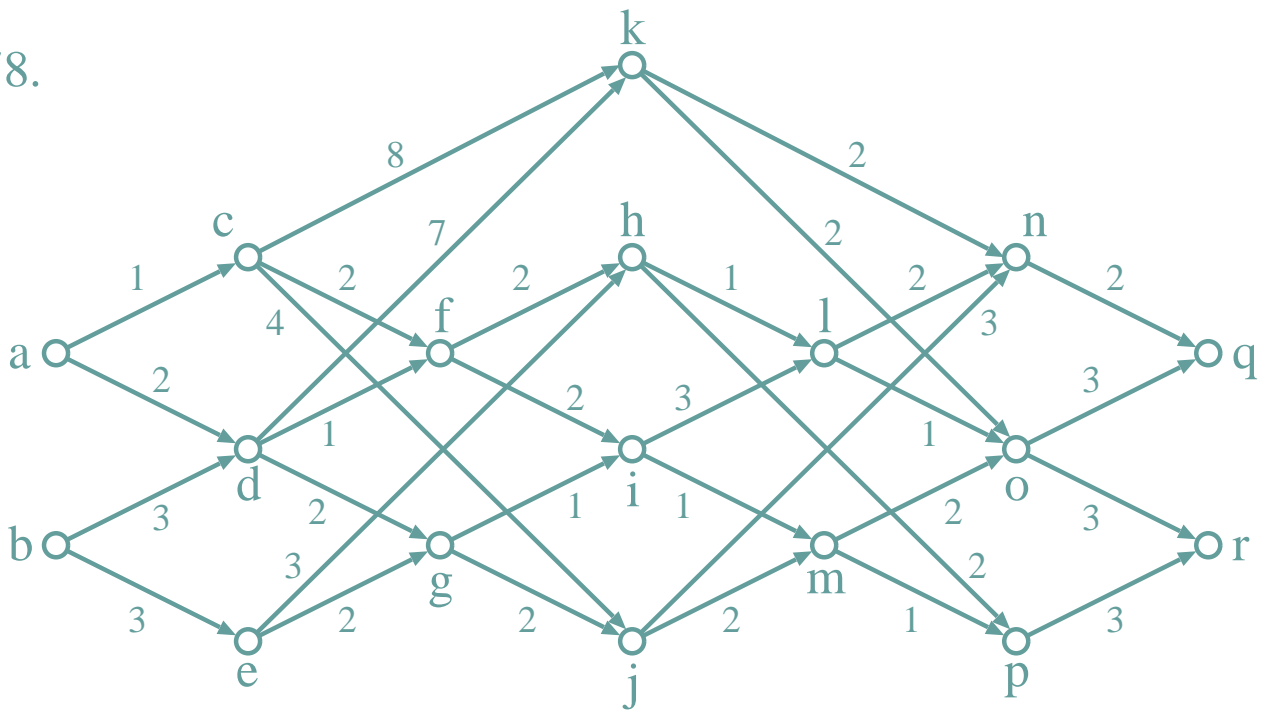
70.



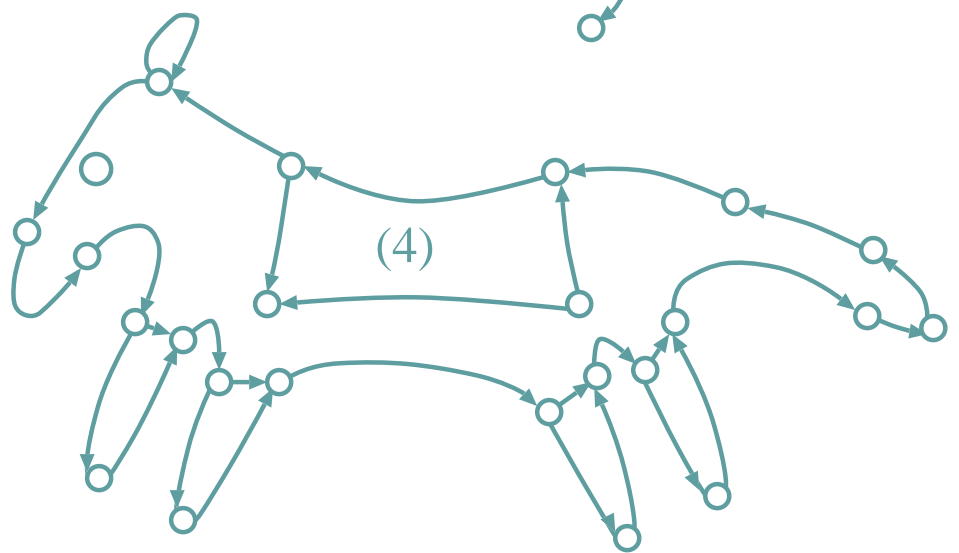
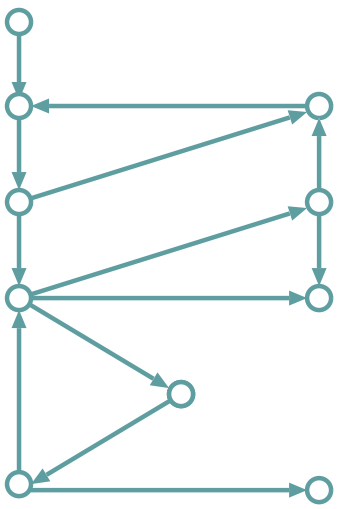
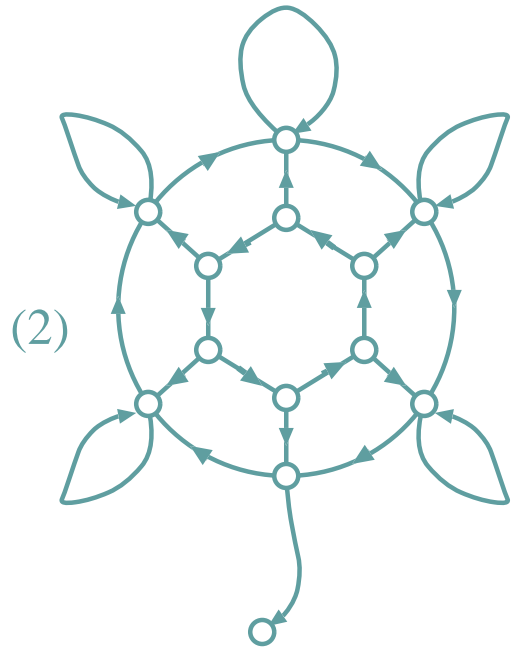
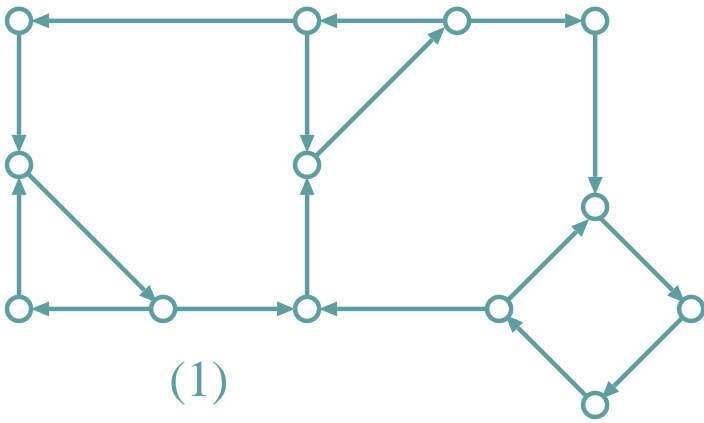
77.



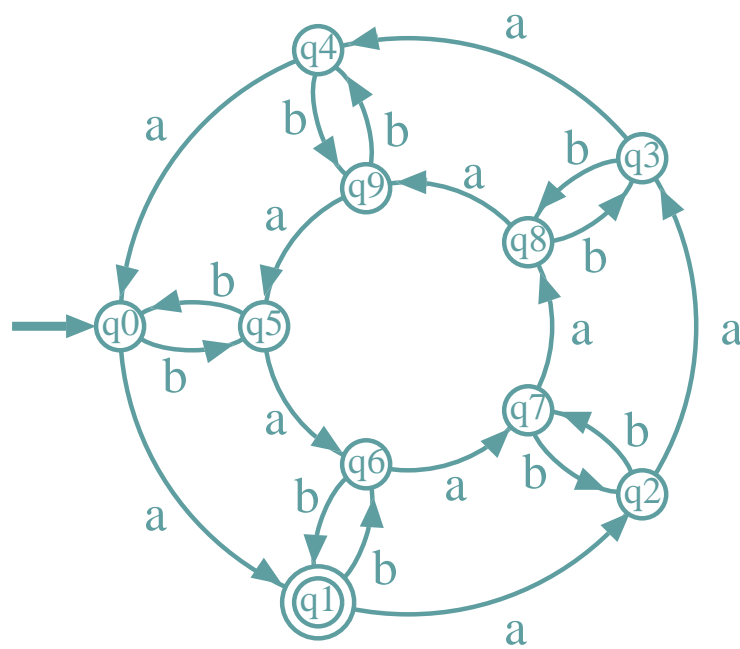
78.



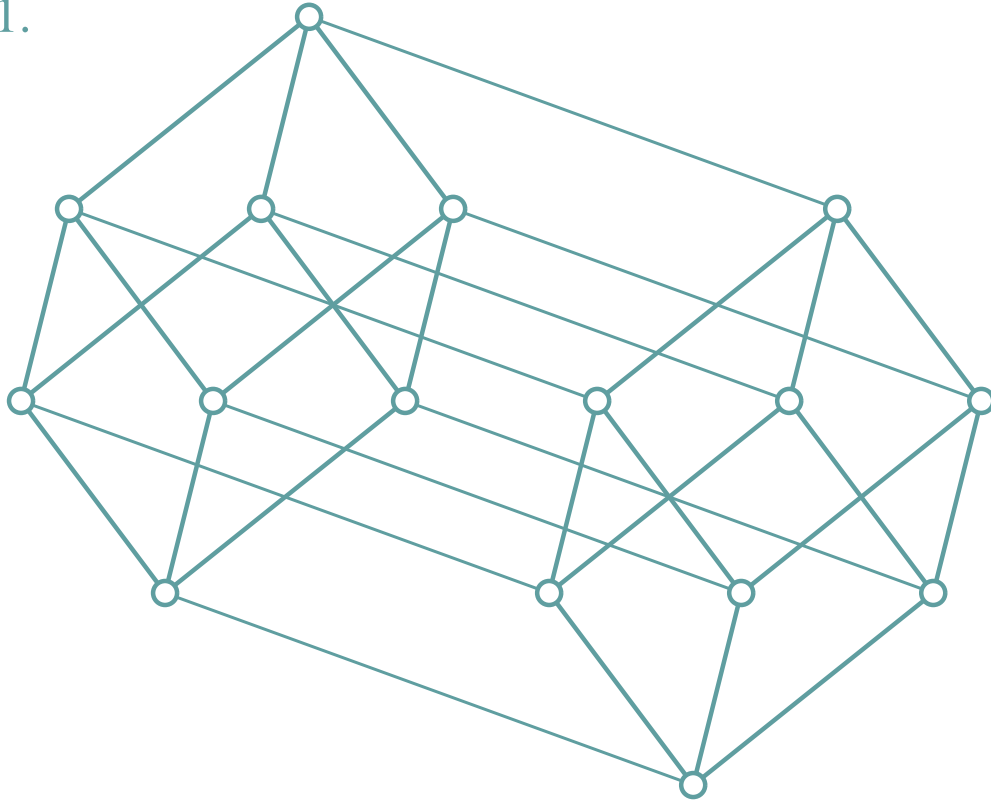
81.



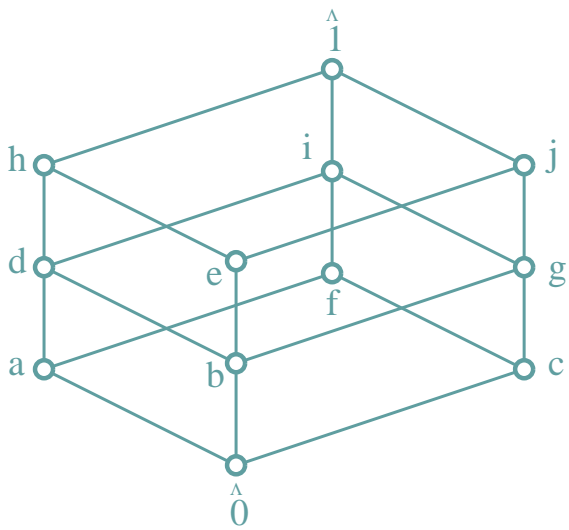
84.



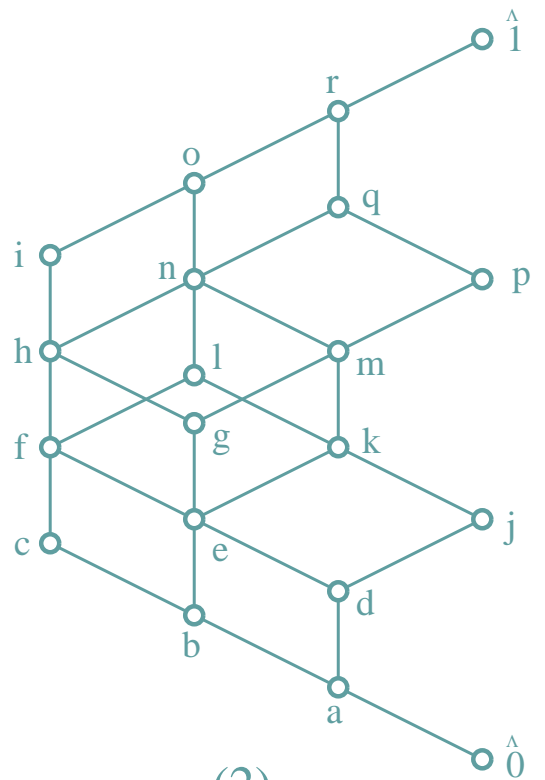
147,161.



148,149.

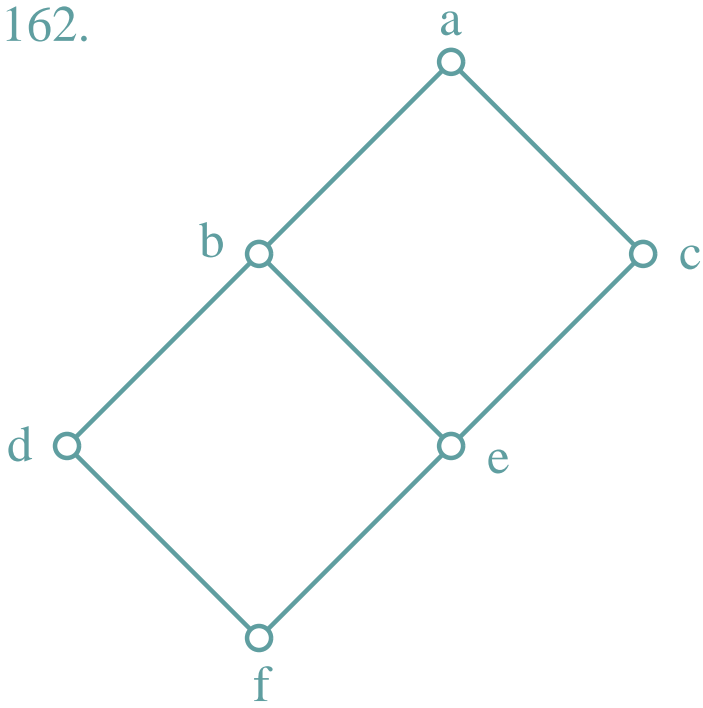


(1)

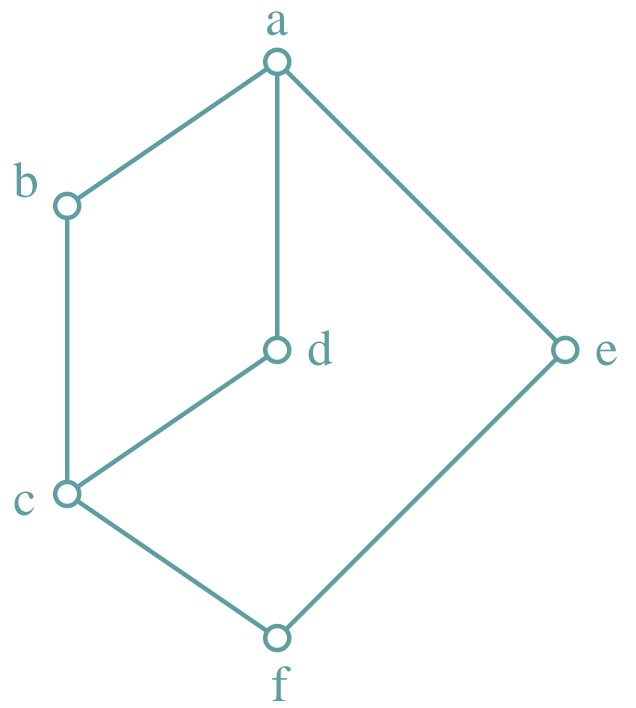


(2)

162.

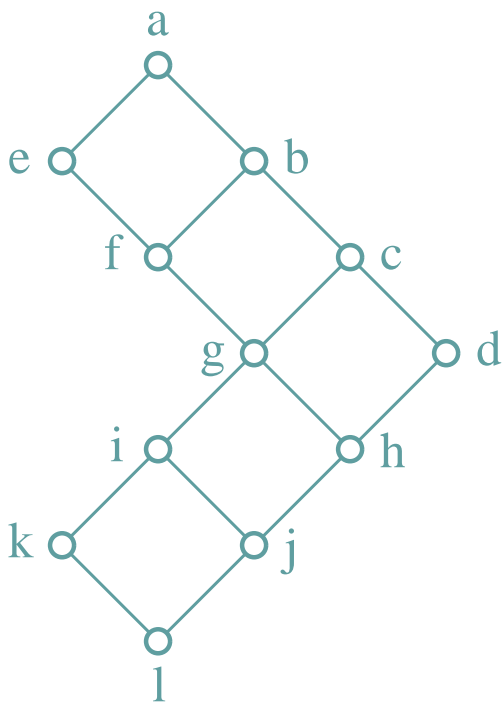


(1)

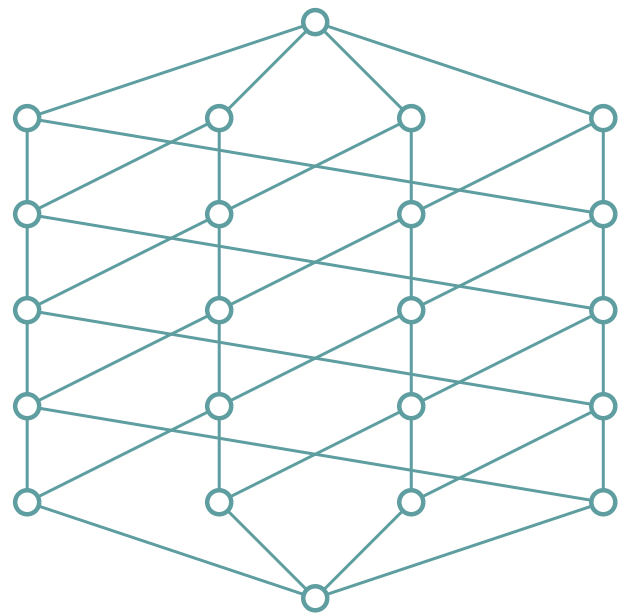


(2)

163.



(1)



(2)