– 離散系論 授業コンテンツ –

by K. Asai

#1　0章　記号の列と結合律

これから離散系論の授業をします．離散系論は，離散的な量を扱う数学あるいは応用数学で，この授業では，

集合，関係，関数，グラフ，ダイグラフ，組合せ論，順序集合，束，ブール代数

を学びます．この項目を見ても感じられるように，比較的独立した内容を幅広く扱っています．ただし，独立しているようでも，互いに関連し合っている場合がよくあります．

これからは，テキストを参照しながら進んでいってください．この章は，記号の列と結合律というタイトルがついていますが，離散系論あるいは数学において，結合律は極めてしばしば現れる計算法則で，みなさんもよく耳にすると思います．そして，ある演算 $*$ について結合律

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

がみたされれば，

$$a_1 * a_2 * \cdots * a_n$$

のような計算はどのように括弧をつけても結果が変わらないこと（これを一般結合律といいます）が証明されます．そのため，このような式では括弧を省略できます．

しかし，その証明がなかなか本にかいていないので，この章で証明を紹介しています．証明は帰納法によっていますが，詳しい内容については，テキストを見てください．

ある集合に演算 $*$ が定義されて，集合の任意の元 x, y, z について上の結合律がなりたつとき，その集合は $*$ について結合律をみたすといいます．以下，結合律をみたす集合の例をあげてみましょう．ただし，**Z**，**Q**，**R**，**C** はそれぞれ，すべての整数の集合，すべての有理数の集合，すべての実数の集合，すべての複素数の集合，を表します．

集合	演算
Z，**Q**，**R**，**C** などの数の集合	加法，乗法
n 項ベクトルの集合	加法
n 次行列の集合	加法，乗法
集合代数（1 章）	結び，交わり
束（12 章）	結び，交わり
ブール代数（13 章）	加法，乗法

ブレイク: (ex1) に色々な演算が与えられているので，結合律をみたすかどうかを調べてみましょう．

1章　集合，集合代数，論理

- 1 -

この章では集合とその演算について学びます．といっても，すでに知っていることとの復習のような内容が多いかも知れません．まずは集合を定義します．ここでは，集合は素朴にものの集まりと考えています．ただし，1つの集合の要素（すなわち元）はすべて異なるものとします．そのため，集合の中に元が重複してかいてあっても無視します．また，集まりなので，並べる順序の違いは無視します．したがって，

$$\begin{aligned}\{1,2,5\} &= \{1,5,2\} = \{2,5,1\} = \{2,1,5\} = \{5,1,2\} = \{5,2,1\} \\ &= \{1,2,2,5,5,5,5,5\} = \{5,1,1,2,2,2,2,5,1,5\}\end{aligned}$$

となりますね．

A を集合とするとき，x が A の元であることを，x は A に属するといい，$x \in A$ で表します．x が A に属さないときは，$x \notin A$ とかきます．

集合は元を並べるだけでなく，条件を使ったり，言葉で説明して表すこともあります．たとえば，

$$B = \{x \mid x \in \mathbf{Q},\ 1 \leq x \leq 5\}, \qquad P = \{\text{ すべての素数 }\}$$

などのように表します．この B は，

$$B = \{x \in \mathbf{Q} \mid 1 \leq x \leq 5\}$$

とかいても同じ集合を表します．

次に，テキストでは有限集合，無限集合，空集合 $\emptyset$ を定義しています．空集合は有限集合の一種です．また，有限集合の大きさまたは濃度，n 元集合などが定義されています．

- 2 -

ある集合の一部からなる集合をその集合の部分集合といいます．より数学的には，集合 A，B に対して，

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

がなりたつとき，A は B の部分集合である，あるいは A は B に含まれる，B は A を含むといい，$A \subset B$ または $B \supset A$ とかきます．そのとき，極端な場合として，$A = B$ や $A = \emptyset$ のようなこともありえますので，注意してください．

テキスト (1) 式に，

$$A = B \iff A \subset B \text{ かつ } B \subset A$$

とかいてあります．これは $A = B$ を証明するときよく使われます．すなわち，$A = B$ を証明するために，右辺を証明するわけです．

$A \subset B$ かつ $A \neq B$ のとき，A を B の真部分集合といいます．

集合 A を固定したとき，A の部分集合全体からなる集合（すべての部分集合からなる集合）を A のベキ集合といい，2^A で表します．

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

とするとき，A の元からいくらかの元を選ぶことで，部分集合が決定します．

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_n \\ \circ/\times & \circ/\times & \circ/\times & \circ/\times & \ldots & \circ/\times \end{array}$$

各元に対して，選ぶか選ばないかの 2 通りずつの可能性があるので，部分集合の選び方は，

$$2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$$

通りあり，すなわち A の部分集合は 2^n 個あることになります．したがって，

$$|2^A| = 2^{|A|}$$

がなりたちます．

ブレイク: (ex1) を解く．また，$A = \{a, b, c, d\}$ で同じ問題を解く．

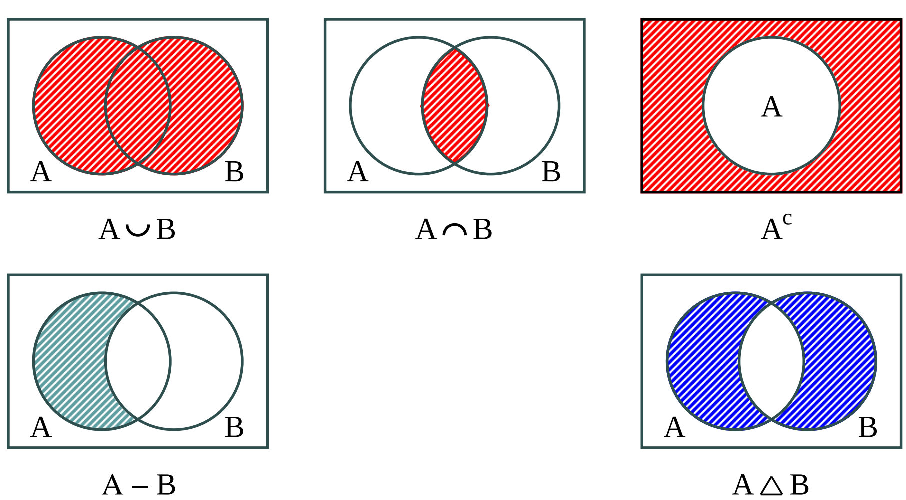
- 3 -

ここでは，集合の間の演算，すなわち集合算を定義します．それにあたって，まず考える範囲として，普遍集合 U を 1 つ固定します．その上で，その部分集合たちの間で集合算 $\cup$（結び），$\cap$（交わり），$(\cdots)^c$（補集合）を考えます．それらの正確な定義は (2) 式にあります．

A の補集合のかき方は色々ありますが，ここでは，A^c とかきます．c は complement = 補集合 の頭文字です．

このように，U の部分集合たちに集合算を定義した体系を集合代数といいます．なお，上の 3 つの集合算の他に，(3) 式で定義される差や対称差も考えることがあります．これらは，3 つの集合算の組合せで表せます．なお，集合の差 $A - B$ は $A \setminus B$ ともかかれますが，ここでは $-$ で表すことにします．

集合はベン図で表すとわかりやすくなります．ここで定義した 5 つの演算をベン図でかくと次のようになります．ただし，外側の長方形は普遍集合を表します．



もう少し複雑な例がテキスト 2 ページの上の方にかいてあります．右のベン図は，一般の 4 つの集合の関係を表すベン図で，以後しばしば登場します．

- 3 - で定義した集合代数は多くの法則をみたします．それらは，テキスト $[S1]$–$[S11]$ までにまとめてありますので，目を通しておいてください．その法則をよく見ると，結びと交わりが対等に扱われていることがわかると思います．

集合代数のすべての法則を確認するのは大変ですね．この中で，特に分配律やド・モルガンの法則はそれほど明らかではないので，それらをベン図などを用いて確認するといいでしょう．

ブレイク: (ex2) で，特に分配律とド・モルガンの法則を確認する．

結びと交わりの演算は，それぞれが結合律をみたすので，0 章で見たように，

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

のような計算は，どのように括弧をつけても結果が変わりません．そのため，括弧を省略することができます．このような，いくらかの集合の結びや交わりは，(4) 式のようにあるやすべてを使って表現できます．

- 5 -

この節では，双対（そうつい）が定義されています．集合代数における等式があったとき，その式の中で，入れ替え $\cup \leftrightarrow \cap$ と，入れ替え $U \leftrightarrow \emptyset$ を行って得られた等式を，もとの等式の双対といいます．双対の双対はもとの式になることがわかります．

たとえば，$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ という等式ならば，その双対は，$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ です．$A \cup B = U$ ならば，双対は $A \cap B = \emptyset$ です．はじめの等式は，A, B, C がどんな集合でもなりたつ恒等式であることがわかります．その双対も，恒等式です．しかし，残りの 2 式は恒等式ではありません．

そこで双対原理とは，ある等式が恒等式ならば，その双対もまた恒等式であるという原理です．上にあげた水色と桃色の等式はこれをみたしていますね．なぜそうなるかを考えてみましょう．

水色の等式が恒等式，すなわち，任意の A, B, C に対して，水色の等式がなりたっているので，その両辺の補集合を取ると，ド・モルガンの法則より，

$$\begin{aligned} & [(A \cap B) \cup C]^c &=& [(A \cup C) \cap (B \cup C)]^c \\ \Longleftrightarrow\quad & (A \cap B)^c \cap C^c &=& (A \cup C)^c \cup (B \cup C)^c \\ \Longleftrightarrow\quad & (A^c \cup B^c) \cap C^c &=& (A^c \cap C^c) \cup (B^c \cap C^c) \end{aligned}$$

ここで，A, B, C は任意だから，$A^c \to A$，$B^c \to B$，$C^c \to C$，とおきかえてもつねに等式がなりたちます．したがって，桃色の等式も恒等式です．はじめの恒等式が他の式でも同様です．

ブレイク: (ex4) を解く．

ここでは，特殊な演算である対称差について考えます．これは (3) 第 2 式で定義して，ベン図でも表しました．これらを使うと，(7) 式の，交換律と結合律を示すことができます．特に結合律がなりたつので，

$$A_1 \triangle A_2 \triangle \cdots \triangle A_n$$

のように，括弧なしで表すことができます．そこで，このような式が一体何を表すのか，という問いかけに答えるのが，(T1) です．それは，

$$A_1 \triangle A_2 \triangle \cdots \triangle A_n = \{A_1, \ldots, A_n \text{ のうちの奇数個に属する元全体}\}$$

と述べています．たとえば，x という元が，A_1，A_2，A_5 に属するが，残りの A_i たちには属さないとすると，x は右辺に含まれます．あるいは，y が A_3，A_5 に属するが，残りの A_i たちには属さないとすると，y は右辺に含まれません．このようにして，右辺，すなわち左辺の元が決定するのです．

ここで，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ はすべて異なると考えがちですが，この中に，いくらかずつ同じ集合が混じっていてもかまいません．集合が重複していたら，その分重複して数えて，その結果，奇数個の集合に属するかどうかを判断します．したがって，結論から言うと，

$$A_1 \triangle A_2 \triangle \cdots \triangle A_n$$

において，ある集合が奇数個重複しているならば，その集合は 1 つに減らすことができ，偶数個重複しているならば，その集合は削除できます．すべての集合が偶数個ずつ重複しているときは，すべてが削除され空集合に等しくなります．たとえば，

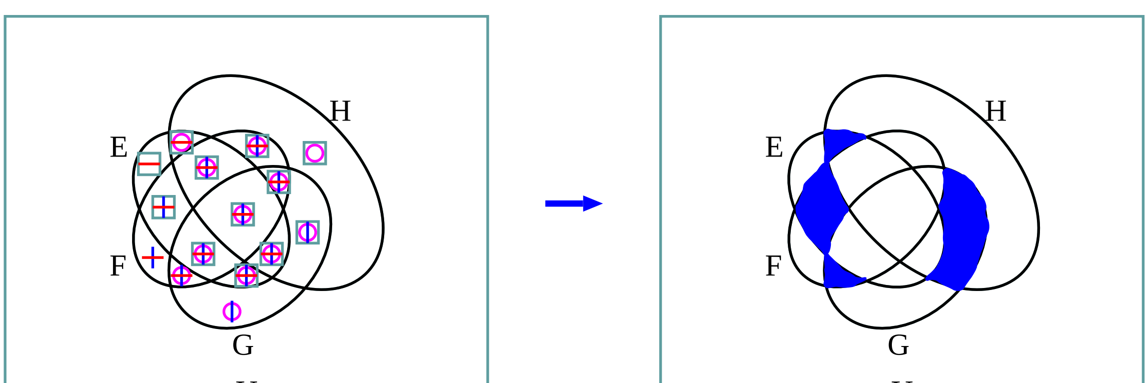
$$A \triangle A \triangle A \triangle B \triangle B \triangle C = A \triangle C$$

といった具合です．

(T1) の証明は帰納法によります．ややこしい計算をするわけではありませんが，何となくわかりにくいかも知れません．

ブレイク: (ex6) を解く．テキストのヒントも参考にしてください．

(ans) (ex6) (4) $(E \cup F) \triangle (F \cup G) \triangle (G \cup H) \triangle (H \cup E)$ を求めるには，以下のように，$E \cup F$，$F \cup G$，$G \cup H$，$H \cup E$，の各領域に印をつけて，奇数個の印がある部分を選べばいいです．ここでは，$E \cup F$ に −，$F \cup G$ に |，$G \cup H$ に ○，$H \cup E$ に □ の印をつけています．



有限集合 A の大きさ，すなわち元の数を $|A|$ で表しました．このとき，

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

がなりたつことはよく知られていますね．ここでは，それを一般化した公式 $=$ 包除原理を学びます．有限集合 $A_1, \ldots, A_n$ に対して，次がなりたちます．

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_s}|$$

これは右辺の和がややこしいので，よく見てみましょう．右辺のはじめの和は符号を変えながら s を動かして総和しています．2 番目の和が肝なのですが，これは，番号 $i_1, i_2, \ldots, i_s$ を 1 から n の中から小さい順に拾って総和しています．すなわち，$A_1, \ldots, A_n$ から自由に s 個取って交わりを作り，その大きさを総和しているのです．ややこしいですが，大体感覚が掴めたら，具体的な問題で練習してみましょう．

ブレイク: (ex7),(ex8) を解く．

(ex7) (ans)

$$\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\
&\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
&|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\
&\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| \\
&\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
&\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|
\end{aligned}$$

なお，包除原理の証明はやはり帰納法によっています．興味のある人は式を追ってみてください．

- 8 -

この節では，特性関数について説明しています．特性関数は，集合に関連して定義される関数で，集合 A の特性関数とは，A 上で 1 になり，それ以外では 0 になる関数です．その関数を χ_A とかきます．変数を明示するときは，$\chi_A(x)$ とかきます．テキストでは (13) 式で特性関数を定義しています．

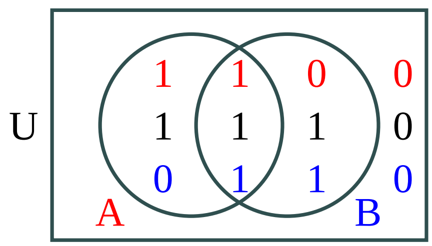
特性関数の基本的な公式は (14) 式にかいてあります．これを使うことで，色々な特性関数を計算することができます．ここで，特性関数は値が 0 か 1 なので，正の整数 n に対して，

$$ {\chi_A}^n = \chi_A $$

がなりたつことがわかります．特性関数の計算では，このことに注意が必要です．

(14) 式はベン図で確認できます．たとえば，第 2 式の場合は，

$$ \chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B $$



のように確認できます．残りの公式も確認してみましょう．

ブレイク: (ex9) を解く．(これは，ベン図ではなく，(14) のはじめの 3 式を使って，残りの 2 式を計算で導く問題です．)

- 9 -

最後に集合と論理について論じていますが，ごく基本的なことがらの解説にとどめています．簡潔にまとめますと，命題 P とそれが真となる集合 S_P を対応させることで，命題を論理演算子で繋げた命題計算が，集合算でおきかえられることを述べています．((17) 式)

いくらかの命題に命題計算を定義した体系を命題代数といいます．命題代数は，(17) 式の対応により，集合代数と同様の法則をみたすことがわかります．

もう少し詳しい内容については，テキストを見てください．

♯ 2

2章 関係とその表現

- 1 -

この章では関係について学びます．関係は数学用語としてはあまりなじみがないかも知れませんが，定義は比較的簡単です．A，B を集合とするとき，A と B の直積 $A \times B$ を (1) 式，すなわち，

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

で定義します．たとえば，

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{a, b\}$$

ならば，

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

です．$A \times B$ の構成要素 (a, b) を順序対といいます．順序対は，順序の違いを区別しますので，$a \neq b$ のとき，$(a, b) \neq (b, a)$ です．

ここで，$A \times B$ の部分集合を，A から B への関係といいます．$A \times B$ はもちろん集合ですから，その部分集合は一般にたくさんありますね．その中のどの部分集合を取っても，それは，A から B への1つの関係だと考えます．したがって，部分集合の数だけ関係があるということです．

R を A から B への関係とするとき，A を R の始域，B を R の終域といいます．特に，始域と終域が共に A のとき，R を A 上の関係といいます．それから，以下のような記号を使います．

記号	意味	言葉による表現
aRb	$(a, b) \in R$	a は b と関係 R にある
$a\not R b$	$(a, b) \notin R$	a は b と関係 R にない

これまで見たように，関係には明確な意味がつけられるとは限りません．しかし，関係に意味がつけられれば，その関係を言葉や数式で表すことができます．たとえば，$A = \{1, 2, 3\}$ として，A 上の関係:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\},$$
$$S = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$$

は，それぞれ，$xRy \iff x \leq y$，$xSy \iff x > y$ で定義できます．

ブレイク: (ex1) (1),(2) を解く．

(ex1) (1) (ans)

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

- 2 -

この節では，- 1 - で定義した関係の表現方法について説明しています．これについてはテキストを見ていただけばわかると思います．それらを簡単にまとめると以下の通りです．

表現方法	説明
集合による表現	関係の要素を書き並べる．
ダイグラフによる表現	aRb のとき，a から b への弧を描く．
行列による表現	a_iRb_j のとき，$m_{ij}=1$ で， それ以外の成分は 0 の行列 (m_{ij})．
座標図による表現	aRb のとき，点 (a,b) を描く．

中でも，ダイグラフと行列による表現が重要です．関係 R を表すダイグラフを，R のダイグラフ，R を表す行列を，R の行列といいます．R の行列を M_R で表します．

(ex2) を見てください．R,S,T の 3 つの関係が定義されています．これらをダイグラフと行列で表すとどうなるでしょうか．まず，ダイグラフについてはすぐ下に答えがかいてありますね．A から B への関係 R の場合，通常左に A の元，右に B の元を（頂点として）かいて，左から右に向かう弧（矢印）を規則に従って描いていけばいいわけです．B から C への関係 T の場合も同様ですね．ところが B 上の関係 S については，B の元を左右に 2 回かかずに，B の元（頂点）を 1 つずつかいて，所定の弧（矢印）を描き入れています．したがって，弧が始点にもどってくる，すなわちループができることがあります．S のような場合，頂点のかき方は自由ですが，なるべく図がわかりやすくなるように工夫するといいでしょう．

関係の行列についてですが，T の行列は (4) 式にあります．行列で表すときには，元の並べ方を決めなければなりません．(4) 式では，B の元，C の元共に，自然な順序で並べて，行列の外側に元を付記しています．それに従って，行列の 1 の成分を決めればいい（残りは 0 だから）わけです．今のように，元を自然な順序で並べているときは，行列の外側の元は省略してもいいでしょう．R,S,T（T はすでに見ましたが）の行列は，(10) 式左辺にある 3 つで，その順に並んでいます．

- 3 -

ここでは逆関係について説明します．これは単純な概念で，R を A から B への関係とするとき，R の逆関係 R^{-1} を，(5) 式，すなわち，

$$R^{-1}=\{(b,a)\mid(a,b)\in R\}$$

で定義します．このとき，R^{-1} は B から A への関係とみなします．R が A 上の関係ならば，R^{-1} も A 上の関係です．

要するに，逆関係とは，関係を構成する順序対をすべて逆順にしたもので，この定義から，R^{-1} のダイグラフは，R のダイグラフの弧の向きを逆にしたものになります．特に，$A\neq B$ のときは，R^{-1} のダイグラフは R のダイグラフの左右を反転させることで得られます．（もちろんこの場合，弧の向きは右向きのままですね）また，逆関係の逆関係はもとの関係になります．逆関係の行列は，もとの関係の行列の転置になります．すなわち，(6) 式がなりたちます．

ブレイク: (ex3) を解く．

次に，関係の合成について説明します．テキストのはじめにあるように，A から B への関係 R と，B から C への関係 S に対して，関係の合成 $R \circ S$ を，

$$R \circ S = \{(a, c) \mid \text{ある } b \in B \text{ が存在して，} aRb \text{ かつ } bSc\}$$

で定義します．これは，A から C への関係とみなします．また，$R \circ S = RS$ ともかきます．

合成については結合律:

$$(RS)T = R(ST)$$

がなりたちます．証明はテキストにあります．これは，実は集合の等式なので，

$$(RS)T \subset R(ST) \text{ かつ } R(ST) \subset (RS)T$$

を証明する方法をとっています.（1 章 (1) 式）

テキストには，いくらかの関係の合成を具体的に求める場合の方法がかいてあります．(ex2) の R, S, T に対して RST を求めるには，テキスト 3 ページのように，R, S, T のダイグラフを横に並べて描き，左端の元 α から右端の元 β に達する道があるときに限り，$(\alpha, \beta) \in RST$ であると考えればいいのです．ただし，このように合成を求める場合には，S のダイグラフは，本来の描き方ではなく，左右に頂点をかく（始域と終域が違うときの）やり方でダイグラフを描いてください．

今のはダイグラフを利用しましたが，行列を利用する方法もあります．それは，(T2)，すなわち，

$$M_{RS\ldots T} = (M_R M_S \ldots M_T)^{\#}$$

を使う方法です．ただし，$M^{\#}$ は，M の正の成分を 1 におきかえたものを表します．テキストでは，上と同じ例題を (10) 式から解いています．

以下，合成の逆関数についての記述があります．行列の場合と同様の公式になっていますね．

- 5 - - 6 -

- 5 - 節の内容については，この授業では飛ばすことにします．- 6 - 節は，恒等関係，全体関係，空関係を簡単に定義した後，A 上の関係の代表的な性質について述べています．それは，反射的，対称的，反対称的，推移的の 4 つです．これらは表にまとめてあるので，よく読んで理解してください．表の下のダイグラフは，左から順に，反射的，対称的，反対称的な関係，その下に，推移的な関係のダイグラフの例です．

(ex7) (2) に，R が対称的 $\iff$ M_R が対称行列 であることがかいてあります．知っておくとよいでしょう．

ブレイク: (ex8) を解く．これは関係の集大成的な問題なので，ぜひ習得してください．

- 7 -

ここでちょっと話が変わりますが，集合の分割についてかいてあります．集合 A の分割とは，A の空でない = 空集合でない部分集合からなる集合 $\{A_1, A_2, \ldots, A_s\}$ で，(13) 式をみたすもののことです．分割には空集合が入ってはいけないことに注意しましょう．そして，分割の構成要素 A_i を分割の細胞といいます．

ブレイク: (ex9) を解く．

- 8 -

集合上の関係の中でも，反射的 かつ 対称的 かつ 推移的な関係を，同値関係といいます．R を A 上の同値関係とします．仮に，A の元 a, b, c が，

$$aRb, \quad bRc$$

をみたすとすると，R が推移的なので，aRc がなりたちます．さらに R が対称的，反射的なので，結局，

$$aRa,\ aRb,\ aRc,\ bRa,\ bRb,\ bRc,\ cRa,\ cRb,\ cRc$$

がなりたちます．すなわち，集合を $\{a, b, c\}$ に限定すると，R は全体関係になってしまいます．この性質は友人関係に似ています.（自分が自分自身と友人だとみなすとします.）こうして，A 上の同値関係 R が与えられると，互いに関係のある同士の集合（なかよしグループ）に分かれる結果になります．このグループを A の同値類といいます．より細かくは，(14) 式で定義される集合 $[a]$ を a の同値類といいます．

同値関係 R によって，A は同値類（なかよしグループ）に分割されます．この分割を，R による A の商集合といい，A/R で表します．テキスト 6 ページに同値関係 R と商集合 A/R の例が図示してあります．

- 9 - - 10 -

- 9 - の順序関係とは，反射的 かつ 反対称的 かつ 推移的な関係です．これは 11 章で詳しく論じます．

- 10 - では，種々の関係の個数について扱っています．これらについてはテキストに詳しくかいてあるので，よく読んでください．

3

3章　関数，1対1対応，濃度

- 1 -

この章では関数を中心に扱います．なお，関数は写像とほぼ同じ意味で用いられますが，テキストでは，関数の方を使っています．

まず，この節では，関数の定義や基本的なことがらについて扱っています．関数はこれまでに十分に勉強してきたと思います．ここで定義しているのは集合から集合への関数で，A から B への関数は，(1) 式，すなわち，

$$f : A \longrightarrow B$$

で表します．重要なのは，f は，A の1つの元に対して，それを B の1つの元に対応させるということです．いいかえると，A の1つの元を B の2つ以上の元に対応させることはないのです．もし，2つ以上の元に対応させるのであれば，それは多価関数といって，普通の関数の範疇からは除かれます．

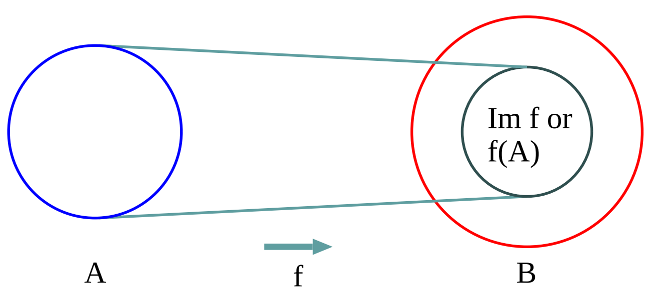
それから，基本的な定義が続きます．A は f の始域（定義域），B は終域といいます．(2) 式，すなわち，f の値の集合:

$$\{f(x) \mid x \in A\}$$

を f の像といって，$\mathrm{Im}\, f$ または $f(A)$ とかきます．これは，B の部分集合になりますが，一般には B と一致しません．

より一般に，(3) 式で定義される集合を，f による A' の像といいます．さらに，逆像を (4),(5) 式で定義します．

ある集合 A から A への関数を，A の変換といいます．



- 2 -

ひとまず関数の定義を終えた上で，全射，単射，全単射（あるいは，1対1対応）の定義が与えてあります．これは，まずは知っておくべき概念で，関数がある性質を持つときの呼び名です．

全射は，直感的に言うと，値が終域全体をわたっている関数です．より正確には，テキスト (i) にある通りですが，$f(A) = B$ をみたす関数とも定義できます．

単射は，直感的に言うと，値がかぶらない関数です．正確には，テキスト (ii) に数式でかいてあります．

全単射は，全射かつ単射である関数のことです．それは，1 対 1 対応ともいいます．テキストでは主に 1 対 1 対応という用語を使っています．

あとは，恒等関数（恒等変換）を定義しています．それは，すべての元を動かさない関数です．

ブレイク: (ex1) を解く．

- 3 -

関数といえば合成です．関数の機能を考えると，関数の合成は最も自然な操作です．A から B への関数 f と，B から C への関数 g があるとき，(8) 式

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \qquad (x \in A)$$

で合成を定義します．合成については，(9) 式の結合律がなりたちます．証明は (10) 式にありますが，その下の図をみれば明らかともいえます．

(T2) では，全射の合成，単射の合成，1 対 1 対応の合成，がそれぞれ，全射，単射，1 対 1 対応になることを述べています．証明はそれほど難しくはないと思います．なお，全射と単射の合成が全単射になるなどと早合点しないようにしましょう．

- 4 - - 5 -

- 4 - の関数の制限と拡張は，始域を狭めるめたり広げたりすることです．詳しくはテキストを見てください．

- 5 - の逆関数は重要な項目です．といっても，大体意味は知っているでしょう．正確な定義は，(12) 式にあります．

$$g \circ f = \mathrm{id}, \qquad f \circ g = \mathrm{id}$$

このように，正逆 2 つの合成がともに id（恒等関数）になることが要求されます．ただ，直感的には，逆の対応とみていいでしょう．

逆関数は，必ずあるとは限りません．また，逆関数については，$(f^{-1})^{-1} = f$ や，f の逆関数は，存在するとしてもただ 1 つということが，定義より導かれます．

(T3) は逆関数についての基本的なことがらについて述べています．(i),(ii) をまとめると，

$$f \text{ が 1 対 1 対応} \iff f^{-1} \text{ が存在する}$$

ということですね．たとえば (i) ⇒ の証明は，(14) 式から (5) 式の g を作り，それが (12) 式をみたすことを確認しています．

(T4) は比較的簡単でしょう．すなわち，

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

ですが，行列などでもよく見かける式です．証明はどうすればいいでしょうか．逆関数は (12) をみたせばいいので，

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &= g \circ \mathrm{id} \circ g^{-1} \\ &= g \circ g^{-1} = \mathrm{id}\end{aligned}$$

となります．逆の合成も同様なので，確認してみてください．

- 6 -

ここでは，ある条件をみたす関数がいくつあるかを考えます．以下に公式をまとめてみましょう．ただし，$|A| = m$，$|B| = n$ とします．

関数の種類	個数
A から B への関数	n^m
A から B への単射	$\frac{n!}{(n-m)!}$
A から B への全射	A を n 個に分ける順序分割の数

これらの説明については，テキストに詳しくかいてありますので，見てください．

ブレイク: (ex4) を解く．

- 7 -

この節では，集合の濃度を扱います．有限集合の元の数を大きさまたは濃度といいました．つまり，有限集合の濃度は元の数です．これはとても明快ですね．それでは，無限集合の濃度はどう定義したらいいでしょうか？ それは，A から B への 1 対 1 対応が存在するときは，それらの集合は同じ濃度とみなす，という方法によります．こうすると，すべての集合が，濃度によって類別されることがわかります．

さて，有限無限を問わず，集合 A の濃度を $|A|$ で表すことにします．身近な無限集合

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

に対して，

$$|\mathbf{N}| = \aleph_0$$

と定義します.（$\aleph$ はアレフと読みます）すると，濃度が $\aleph_0$ である無限集合がたくさんでてきます．それらの集合は，$\mathbf{N}$ との間に 1 対 1 対応があるわけです．このような集合を可算無限集合といいます．

しかし，$\mathbf{N}$ との間に 1 対 1 対応がない無限集合もあり，その濃度は $\aleph_0$ ではありません．そのような集合の例として，すべての実数の集合 $\mathbf{R}$ があります．そこで，

$$|\mathbf{R}| = \aleph_1$$

と定義します．

いくらかの集合の濃度をまとめると次のようになります．

濃度	集合
$\aleph_0$	$\mathbf{N}$，$\mathbf{Z}$，$\mathbf{Q}$，成分が整数の行列の集合
$\aleph_1$	$\mathbf{R}$，実数の区間，$\mathbf{C}$

これを確認するには，(i) $\mathbf{N}$ から $\mathbf{Z}$ への 1 対 1 対応，(ii) $\mathbf{N}$ から $\mathbf{Q}$ への 1 対 1 対応，などを構成すればいいですね．(i) は (ex5) に，(ii) は (T5) 2: にあるので，見てみましょう．

- 8 - はこの授業では飛ばします．

＃4

5章　グラフ理論の要点

- 1 -

いよいよグラフ理論の勉強を始めます．ただし，ここでのグラフは関数のグラフとは全く関係がなくて，それは，頂点と辺でできた図形のことです．頂点は小さい円かドットで表したもので，基本的にどこにかいてもかまいません．また，辺は頂点を適当に選んで結んだ線のことです．辺は直線でも曲線でも問題ありません．また，辺がいくらかある場合，辺同士が交差してもかまいません．

数学的には，グラフ G とは，頂点の集合 $V = V(G)$ と辺の集合 $E = E(G)$ の組 (V, E) のことです．ここで，辺 e は，2 つの異なる頂点 u, v の組合せ $\{u, v\}$ と定義していて，それは，さきほどの，頂点 u, v を結んだ線と同一視されます．つまり，グラフは図で描くだけではなく，抽象的な記号のみでも表現できるということです．

たとえば，テキスト 1 ページの図の，中央に囲まれた 2 つのグラフを上から G, G' としましょう．これらのグラフの頂点集合と辺集合は，

$$
\begin{aligned}
V(G) &= \{a, b, c, d, e, f, g, h\} \\
E(G) &= \{\{a, c\}, \{c, h\}, \{h, d\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, a\}, \{b, g\}, \{g, e\}, \{e, h\}, \{h, b\}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(G') &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \\
E(G') &= \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 1\}, \{1, 7\}, \{7, 4\}, \{4, 8\}, \{8, 1\}\}
\end{aligned}
$$

とかけますね．もちろん，集合の章で習ったように，集合の中の文字の順序は自由です．

頂点が 1 つもないグラフは普通考えません．しかし，辺が 1 つもないグラフは十分考えられます．そのようなグラフは頂点がいくらかあるだけの単純なものになります．この例からもわかるように，グラフは，必ずしも 1 つに繋がっている必要はありません．いくらかのグラフが集まったようなグラフをまとめて，1 つのグラフと見ることもできます．このことについては，- 8 - で詳しく説明します．

有限個の頂点を持つグラフを有限グラフといい，無限の頂点を持つグラフを無限グラフといいます．テキストでは，基本的に有限グラフのみを扱うことにしています．

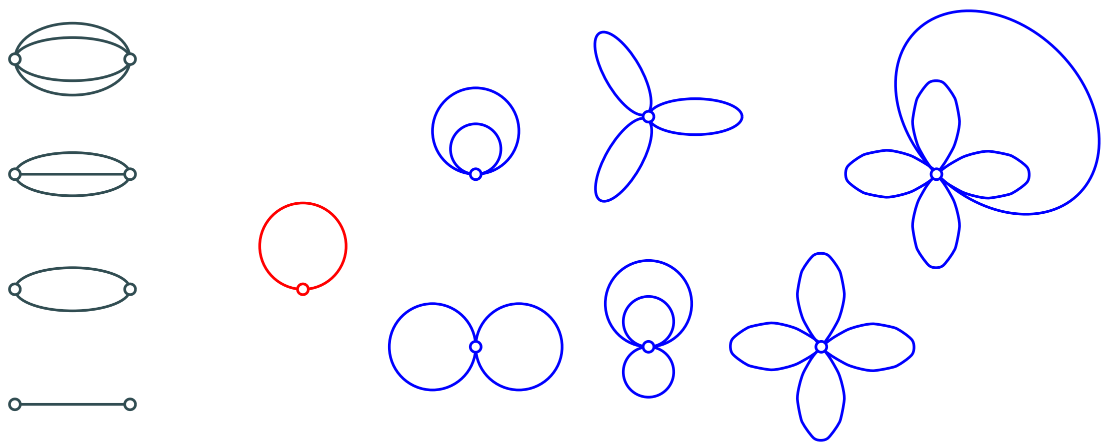
- 2 -

2 つの頂点を結ぶ辺があるとき，それらの頂点は隣接するといいます．グラフにおいて，見た目で頂点がどれだけ離れているかは関係ありません．u と v が e で結ばれているとき，u, v をそれぞれ e の端 (頂) 点といい，これらをまとめて，e の両端点といいます．さらに，e は u と v に接続するといい，逆に u と v は e に接続するともいいます．

2 つの異なる辺 e, f が共通の端点を持つときは，e と f は隣接するといいます．

さて，ここからは多重グラフが登場します．- 1 - の定義で，辺とは 2 つの異なる頂点の組合せとされています．すなわち，グラフでは，同じ頂点を辺で結ぶことはできません．また，異なる頂点 u, v に対して，これらを結ぶ辺 $\{u, v\}$ はあるとしてもただ 1 つです．これが，グラフに課されている基本的な条件です．

それらの条件を外してしまったときに得られる拡張されたグラフのことを，多重グラフといいます．すなわち多重グラフでは，以下のような構造が可能になります．



左下は普通の辺です．その上に並ぶのが多重辺，その右にループ，さらに右にあるのは，1 つの頂点にループが複数個ついた多重ループです．

多重グラフは，このような構造が許されるものなので，多重辺や（多重）ループを使っていない場合でも，多重グラフとみなすことができます．すなわち，多重グラフは，特別な場合としてグラフを含むということです．

テキストでは，このあとややこしい説明が続いていますが，これは，多重グラフ G を，$G = (V, E)$ と表すための注意点なのです．V はいいとして，E は辺の集合で，その中に多重辺があるのなら，たとえば，辺 $\{u, v\}$ が複数個あるのなら，それらの 1 つ 1 つに名前をつけて区別しなさいということです．また，ループは端点が 1 つしかないので，u を端点とするループを $\{u\}$ で表し，多重ループならばさらに名前をつけようということになります．そうすれば，E を普通の集合として表せます．

ただ，紛れのない場合は，いちいち名前をつけずに，(1) 式のように多重辺を重複してかいて E を表示することもできます．このような，元の重複個数を区別する集合を，多重集合といいます．

多重グラフにおいても，隣接や接続の概念がグラフと同様に定義されます．特に，頂点 u にループがある場合，u は u 自身と隣接するといいます．

以後，多重グラフは，特に断らない限り，有限個の頂点と辺を持つ，有限多重グラフのみを扱うことにします．

- 4 -

グラフ $G=(V,E)$ の部分グラフとは，V，E それぞれの部分集合 V'，E' を取って作ったグラフ $G'=(V',E')$ です．ただし，E' は，両端点が V' に属する辺のみを含むものとします．簡単に言えば，G' は G の一部からなるものということですね．

さて，V' を適当に決めたとき，E' が最大になるように作った G の部分グラフ $G'=(V',E')$ を，V' から（V' で）誘導される G の部分グラフ，あるいは誘導部分グラフなどといいます．

G 自身も G の部分グラフです．それ以外の部分グラフを真部分グラフといいます．

多重グラフに対しても，上と同様に，部分多重グラフや誘導部分多重グラフを定義します．

- 5 -

グラフ理論において，同型は一番重要な概念です．グラフの頂点の名前だけ変えたものは，もとのグラフと同型になります．この場合は形が全く同じですね．このように見た目が同じでなくても，頂点の繋がり具合いが同じであれば，同型になります．すなわち，辺がゴムでできていて，頂点を自由に動かし，辺も自由に変形した結果，同じ形にできれば，それらのグラフは同型になります．

これを数学的にいいかえると次のようになります．$G=(V,E)$ と $G'=(V',E')$ に対して，V から V' への 1 対 1 対応 φ が存在して，次の (2) 式の条件をみたすときに，G と G' は同型であるといい，$G \simeq G'$ とかきます．

$$G \text{ において } u,v \text{ が隣接する} \iff G' \text{ において } \varphi(u),\varphi(v) \text{ が隣接する}$$

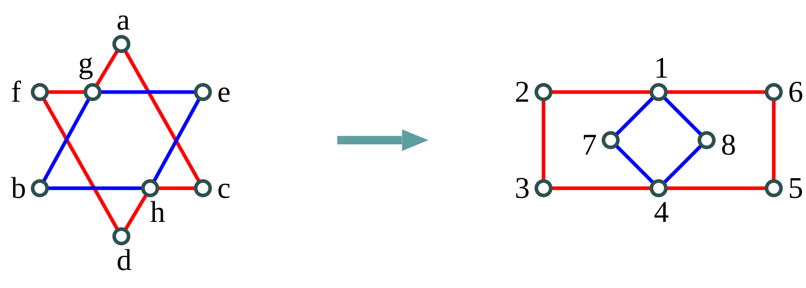
この φ を G から G' への同型写像といいます．

多重グラフの同型も考え方は同じです．ただし，条件は同じにはなりません．上にかいた条件 (2) は，多重グラフの場合は次の (3) 式になります．

$$\begin{array}{ll}(\text{辺 } \{u,v\} \text{ の数}) = (\text{辺 } \{\varphi(u),\varphi(v)\} \text{ の数}) & (u,v \in V,\ u \neq v) \\ (\text{ループ } \{u\} \text{ の数}) = (\text{ループ } \{\varphi(u)\} \text{ の数}) & (u \in V)\end{array}$$

ブレイク: (ex1) を解く.

(hint) このような問題では，2 つのグラフの中に同じ頂点数の多角形（サイクル）などを見つけて，それが対応するように，グラフからグラフへうまく変形できるかを調べるといいでしょう．この問題の場合，図のように赤と青のサイクルが対応するようにグラフを変形できます．その変形から同型写像が求められます．



頂点 v に接続している辺の数（ただし，ループは 1 つで 2 つ分に数えます）を v の次数といい，$\deg(v)$ で表します．ここで，頂点の次数をすべて足していきましょう．普通の（ループでない）辺 $\{u, v\}$ は，u の次数と v の次数で 2 回数えられます．ループ $\{u\}$ は，u の次数で 2 回数えられます．こうして，すべての次数を足すと，辺の数の 2 倍になります．これが，(T1) の内容です．すなわち，多重グラフ G の頂点を $v_1, v_2 \ldots, v_p$，辺の数を q とするとき，

$$\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2q.$$

以下，次数に関連して，いくらかの定義をしています．

偶 (頂) 点	次数が偶数の頂点
奇 (頂) 点	次数が奇数の頂点
孤立 (頂) 点	次数が 0 の頂点
自明なグラフ	孤立頂点 1 つだけからなるグラフ
n-正則	すべての頂点の次数が n である多重グラフ
次数列	多重グラフのすべての頂点の次数を 大きい順に並べたもの

ブレイク: (ex2) を解く．

＃5

5章　グラフ理論の要点（続き）

- 7 -

この節では，多重グラフにおける歩道やそのバリエーションについて学びます．これによって，グラフの連結性や2頂点間の距離，グラフの直径など多くのことがらが定義できるので，とても大切な概念です．

歩道は，頂点と辺の交互の列で，頂点で始まり頂点で終わります．それは，(7) 式，すなわち，

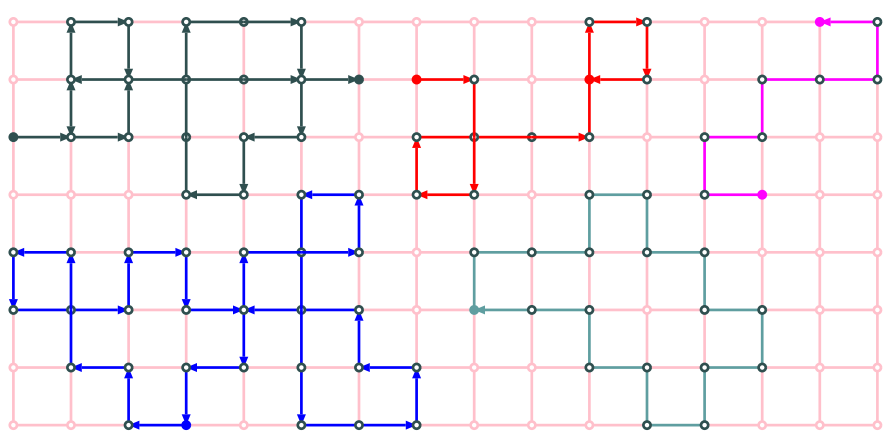
$$w = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_n v_n$$

のようにかけますが，条件として，各 e_i の両端点が v_{i-1} と v_i になっていなければなりません．ただし，e_i がループのときは，e_i の端点が $v_{i-1} = v_i$ になります．つまり，歩道とは，多重グラフ上である頂点から辺と頂点を交互に通っていってどこかの頂点で終わる列ということになります．

(7) 式の歩道 w を v_0 から v_n への歩道といい，v_0 を w の始点，v_n を w の終点，n を w の長さといいます．意外なことですが，歩道の長さは0でもかまいません．この場合，歩道は $w = v_0$ という，ただ1つの頂点になります．始点と終点が等しい歩道を閉じた歩道といいます．

歩道においては，同じ頂点や同じ辺を繰り返し用いてもかまいません．この歩道に対していろいろな制限をつけることで，小道，道，回路，閉路（サイクル）が定義されます．その条件はテキストにかいてありますが，重要なので再掲しておきましょう．(2回以上は2回も含めます)

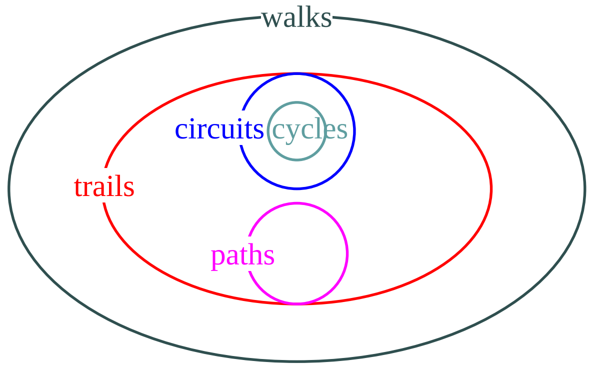
歩道 (walk)	制限なし
小道 (trail)	同じ辺を2回以上用いない歩道
道 (path)	同じ頂点を2回以上用いない歩道
回路 (circuit)	長さが1以上の閉じた小道
閉路（サイクル）(cycle)	始点と終点が同じ以外はすべて頂点が異なる回路



上で定義した歩道などの例を，格子状のグラフに描いてみるとこのようになります．なお，表と図で色が対応しています．

ここで，図を見てもわかるように，歩道などは，使った頂点と辺を示すだけでは確定しません．比較的簡単なサイクルでも，始点（= 終点）と進む向きが与えられなければ決定しないわけです．

また，道の条件: 同じ頂点を 2 回以上用いない歩道であれば，実は，同じ辺も 2 回以上用いないことに注意しましょう．もし，同じ辺を 2 回使ったら，その端点の少なくとも 1 つは 2 回使うことになるからです．このことや，表の条件を考えると，テキスト 4 ページにあるようなベン図が得られます．大切なので，以下に再掲しておきましょう．



さて，テキストでは，細かい定義や注意が続いていますので，見ておいてください．特に，全域 = すべての頂点を用いる ということが重要なので，覚えておくといいでしょう．

(T2) では，多重グラフの中に，u から v への歩道があれば，u から v への道もある，と述べています．その理由は次の通りです．u から v への歩道 w があったとして，これは同じ頂点や同じ辺を繰り返し使っている可能性があります．ただ，同じ辺を繰り返していれば，同じ頂点も繰り返し使いますから，結局，

$$w = v_0 \dots v_k \dots v_k \dots v_n$$

のようになっています．ここで，青い部分の遊びをやめて，

$$w' = v_0 \dots v_k \dots v_n$$

とすれば，近道になります．これを繰り返せば歩道から道が得られます．

(T2') も類似の定理なので，見ておいてください．

ブレイク: Figure 2 のペテルセングラフのサイクルをすべて求める．ただし，サイクルの中で，使う辺が同じで，始点や向きが違うだけのものは，除外する．

- 8 -

ここでは，多重グラフ G が連結であるとは何かを定義しています．それは，G の任意の（異なる）2 頂点の間に道があることです．すなわち，任意の 2 頂点が道で繋がっているということですね．ここで，緑の異なるという言葉ははずしてもかまいません．数学では 2 頂点が同じことはありえますが，同じ頂点 u の間には，いつでも u という道があるからです．

簡単にいえば，G が連結とは，G が繋がっていることですが，この繋がるはあくまで道で繋がっているということです．テキスト Figure 2,4 の左のグラフは図が重なっているだけなので，連結とはみなしません．

さて，テキストに，G の極大な連結部分多重グラフのことを，G の連結成分というとかいてありますが，これは厳密な定義で，わかりやすく言えば，連結なひとかたまりが連結成分です．Figure 2 の左のグラフは 2 つの連結成分，Figure 4 の左のグラフは，2 つの長方形と 1 つの十字の計 3 つの連結成分からなりますね．

次に，連結多重グラフ G の切断点と橋についての説明がありますので，テキストも見てください．切断点と橋のどちらも，それを取り除くと G が非連結になるようなものを指していて，それが頂点ならば切断点，辺ならば橋と呼び名を区別しているのです．ただ，辺を取り除くときは，単純にそれだけを取り除けますが，頂点を取り除くときは，それに接続する辺もいっしょに取り除かれてしまうということです．Figure 4 の右のグラフには，赤い 3 つの切断点と，青い 2 つの橋があります．

(T3) は，G が連結でサイクルを持つとき，サイクル上の 1 辺を除いてもまだ連結であることを述べています．その証明はテキストにかいてあります．直感的に言うと，サイクルというものは，その上の辺を 1 つ取り去っても，まだ直線状に繋がっていて，したがって，これだけでは G を非連結にはできないということです．もちろん，これは感覚的な説明で証明ではありません．

(T3) に関連して，(T3')，(T3") があげてありますので，見ておいてください．

ブレイク: (ex5) を解く．

- 9 -

ここでは距離と直径を導入します．多重グラフの 2 頂点間の距離を，それらの頂点の間の最短道の長さと定義します．頂点 u, v 間の距離を，$d(u, v)$ で表します．ただし，u, v 間に道がないときは，$d(u, v) = \infty$ とします．距離をこのように定義すると，(11) の距離の公理をみたします．ここで，∞ の計算や大小関係については，次のように定義します．s を整数とするとき，

$$\infty > s, \quad \infty + s = \infty, \quad \infty + \infty = \infty.$$

多重グラフ G の直径を，G の 2 頂点間の距離の最大値と定義して，$\mathrm{diam}(G)$ で表します．すなわち，G の 2 頂点の組合せをすべて考え，各組合せに対して求めたいろいろな距離の中の最大のものが直径ということです．

ブレイク: (ex6) (2) を解く．

＃6

5章　グラフ理論の要点（続き）

- 10 -

この節では，オイラー多重グラフとその判定法について扱います．まず定義から始めましょう．以下の用語を導入します．G を多重グラフとします．

オイラー小道	G のすべての辺を通る小道
オイラー回路	G のすべての辺を通る閉じた小道
周遊可能	オイラー小道がある（多重）グラフ
オイラー（多重）グラフ	オイラー回路がある（多重）グラフ

わかりやすく言うと，オイラー小道は，多重グラフを一筆書きをすることに対応し，オイラー回路は，多重グラフを一筆書きをして始めに戻ることに対応しますね．ここでは，そのようなことができるかどうかの判定法を考えます．

その前に少し注意しておくと，オイラー回路は，便宜上回路という名前がついていますが，長さは0，すなわち，1つの頂点でもかまいません．

そこで (T4) の登場です．そこには，G がオイラー（多重）グラフ，あるいは周遊可能であるための必要十分条件がかかれています．すなわち，G を連結（多重）グラフとするとき，

$$G \text{ がオイラー（多重）グラフ} \iff G \text{ が奇頂点を持たない}$$
$$G \text{ が周遊可能} \iff G \text{ の奇頂点が } 0 \text{ 個か } 2 \text{ 個}$$

ということです．右辺の条件は比較的容易な頂点の次数についての条件になっていますので，オイラー（多重）グラフや周遊可能かどうかを判定するのは比較的容易でしょう．

その後に証明がかいてあります．第1式の証明（特に ($\Leftarrow$)）は比較的長くて難しいと思います．証明の詳細はテキストを見てください．簡潔に説明すると，($\Rightarrow$) については，G がオイラー多重グラフとすると，オイラー回路 w があり，それがすべての辺を通って描く図形には，各頂点から必ず偶数個の線が出ていることになり，その結果，すべての頂点の次数は偶数になります．

($\Leftarrow$) について．G を連結多重グラフで，奇頂点を持たないとします．このとき，最長の閉じた小道 w を取ると，それがオイラー回路になることを示します．テキストではこれを背理法で示しています．

(T4) 第2式は，第1式を利用して示しています．G に奇頂点が2つあるときは，その2つを結ぶオイラー小道が作れます．

(T4) では，簡単のため，G が連結であると仮定しました．非連結のときは，オイラー多重グラフとは，連結なオイラー多重グラフに，いくらかの孤立頂点を追加（くっつけないでそえるだけ）したものになります．それをふまえると，(T4’) が得られます．

- 11 -

オイラーの次はハミルトンです．オイラーの場合は，すべての辺を通るというのがキーワードでしたが，ハミルトンでは，すべての頂点を通る = 全域 がキーワードです．以下，定義をかきます．

ハミルトン道	G の全域（すべての頂点を通る）道
ハミルトンサイクル	G 全域（すべての頂点を通る）サイクル
ハミルトングラフ	ハミルトンサイクルがあるグラフ

ここまで定義したのはいいのですが，オイラーのときと違って，グラフがハミルトングラフかどうかを見分ける一般的な方法はわかっていません．しかし，特殊な場合であれば，それがハミルトングラフかどうかがわかる場合もあります．

ブレイク: (1) Figure 2 の左上のグラフのオイラー回路とハミルトンサイクルを見つける． (2) (ex7) を解く．

- 12 -

ここでは，いろいろなグラフと題して，グラフ理論でよく現れる数種類のグラフを紹介しています．まず，大前庭として，ここに出てくるのはすべてグラフです．したがって，多重辺や（多重）ループは構造上許されないことに注意しましょう．正確な定義はテキストをよく見てください．ここには，簡潔にまとめてかいてみましょう．

名前	記号	定義
完全グラフ	K_n	n 頂点を持ち， 異なる 2 頂点がすべて隣接するグラフ
完全 s 部グラフ	$K_{p_1,\ldots,p_s}$	V の分割 $\{V_1,\ldots,V_s\}$ ($\lvert V_i\rvert = p_i$) が存在して， 細胞内では隣接せず，細胞間では隣接するグラフ
s 部グラフ	-	V の高々 s 個の細胞への分割 $\{V_1,\ldots,V_r\}$ が存在して，細胞内では隣接しないグラフ
サイクルグラフ	C_n	n 頂点を持つサイクル状のグラフ（辺の交差可）
道グラフ	P_n	n 頂点を持つ道をグラフと見たもの
車輪グラフ	W_n	ある 1 つの頂点を，サイクル C_{n-1} の各頂点に 繋げてできるグラフ
木	-	連結でサイクルを持たないグラフ
森	-	サイクルを持たないグラフ

これらの例としては，Figure 6 を見てください．さて，少し補足しましょう．まず K_n の辺の数は，2 つの異なる頂点の組合せの数なので，$\binom{n}{2} = {}_nC_2 = n(n-1)/2$ になります．また，K_n は $(n-1)$-正則グラフです．

ただ 1 つの頂点からなる木を自明な木といいますが，これは自明なグラフと同じものですね．直径が高々2 の木は，頂点数 n が決まれば（同型を除いて）ただ 1 つに決まります．これを (n-) 星といい，S_n で表します．道グラフ P_n も木の一種です．P_n は直径が $n-1$ と大きく，S_n は直径が 2 以下と小さくなります．

木は頂点数が多くなると急激に種類が増えます．頂点数を決めて，(同型を除いて) すべての木を書き出すことはいい演習問題ですが，そのときは，木を直径が大きい順（または小さい順）にあげていくといいでしょう．

定義より，森の連結成分は木になりますね．したがって，文字通り，森は木が集ったものと言えます．

ブレイク: (ex8) (1)–(5) を解く．(4) は頂点数 6 のみでもいいでしょう．

- 13 -

この節では，多重グラフに対して 3 つの行列，すなわち，隣接行列，接続行列，連結行列を定義しています．これについては，テキストにしっかりかいてあるので，よく見てください．

3 つの行列は，1 通りに決定するわけではなく，頂点の順序 $v_1, v_2, \ldots, v_p$，あるいは，辺の順序 $e_1, e_2, \ldots, e_q$ に依存しています．行列を作るときに，この順序に注意しましょう．

(ex9) の行列は本来頂点や辺の記号をつけて，以下のように答えるべきですが，この場合は頂点と辺の順序が自然に決まるので，テキストでは，頂点や辺の記号は省略しています．

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

この例で少し確認してみましょう．頂点の数を p とすると，隣接行列は p 次行列で，成分は次のようになっていますね．

$$\begin{array}{lll} (i,j) \text{ 成分} & = v_i \text{ と } v_j \text{ を結ぶ辺の数} & \qquad (i \neq j) \\ (i,i) \text{ 成分} & = v_i \text{ に接続するループの数} & \end{array}$$

したがって，多重グラフであれば，多重辺や多重ループのあるところに，2 以上の成分が出てきます．グラフであれば，成分はすべて 0 か 1 であり，ループがないので，対角成分はすべて 0 です．いずれにしても，(i,j) 成分 $=$ (j,i) 成分なので，隣接行列は対称行列になります．逆に，成分が非負整数の対称行列であれば，適当な多重グラフの隣接行列として表せます．

接続行列は，行が頂点，列が辺に対応しているので，(p,q) 型（辺の数を q）になります．そして，各辺の端点が，その列に 1 で指定されています．ループでない辺の列には，端頂点が 2 つあるため，1 が 2ヶ所あり，ループの列には，1 が 1ヶ所だけです．

連結行列も p 次行列で，v_i から v_j への道があるときに 1 をかき，道がないときは 0 をかきます．これも対称行列になります．多重グラフが連結ならば，連結行列はすべての成分が 1 の行列になります．

多重グラフ G が非連結で，連結成分 $G_1,\dots,G_s$ からなるとします．このとき，頂点 $v_1,\dots,v_p$ を，G_1 の頂点から順に G_s の頂点まで並べたものとし，辺 $e_1,\dots,e_q$ も，G_1 の辺から順に G_s の辺まで並べたものとします．この順序に対して，G の隣接，接続，連結行列をかけば，(21) 式のようになります．ただし，A_i，M_i，C_i は G_i の隣接，接続，連結行列です．特に，C_i はすべての成分が 1 の行列です．つまり，このように頂点と辺を連結成分ごとに並べておけば，G の各種の行列は，連結成分の各種行列で表示できるようになり，大変便利だということです．

さて，隣接行列の n 乗について，(T5) がなりたちます．すなわち，隣接行列を n 乗したとき，その (i,j) 成分は，v_i から v_j への長さ n の歩道の数になるというものです．これは不思議な定理ですね．証明は 7 章で見ることにします．

(T5) の応用として (T6) があり，これは，多重グラフが連結であることを，隣接行列の計算で確認できるといった内容です．グラフが複雑で連結かどうかが見てもわからない場合に，コンピューターを使って連結性を確認することができるというわけです．

- 14 - の内容は，この授業では飛ばします．

＃7

6章　平面多重グラフの要点

- 1 -

この章では平面多重グラフについて勉強します．平面多重グラフと平面グラフの定義は以下の通りです．

平面多重グラフ	多重グラフを辺が交差しないように平面上に描いたもの
平面グラフ	グラフを辺が交差しないように平面上に描いたもの

すなわち，平面という言葉がつくと，辺が交差しないという意味が加わります．したがって，平面（多重）グラフは，実際に描いた図形が重要になります．なお，平面多重グラフのことを地図ともいいます．

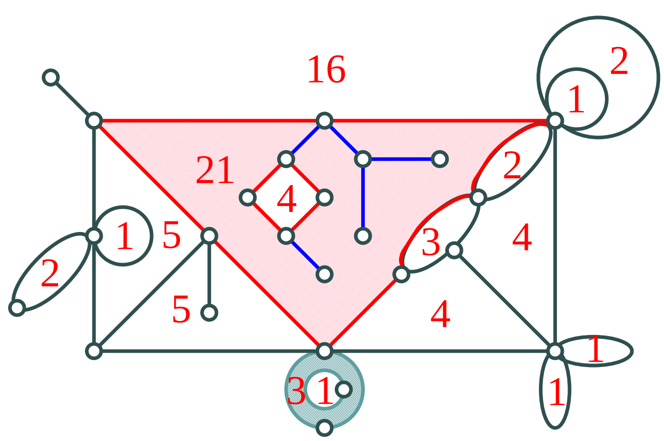
これと紛らわしいのですが，平面的（多重）グラフというのは，うまくやれば辺を交差させずに描ける（多重）グラフのことで，現時点で辺が交差していても関係ありません．

平面的でないことを，非平面的といいます．すなわち，非平面的（多重）グラフというのは，辺を交差させずに描くことが不可能な（多重）グラフのことです．

- 2 -

ここでは平面多重グラフに特徴的なものとして領域を定義しています．平面多重グラフは，辺によって周りを囲まれた，いくらかの部分に分かれています．その１つ１つの部分を領域といっています．より正確には，平面多重グラフ G の辺で囲まれた部分が，より細かい部分に辺によって分割されていないとき，それを G の１つの領域といいます．間取り図にたとえれば，領域は１つ１つの部屋にあたります．

こうして，平面は，G によっていくらかの領域に分けられます．このとき，G の外側の大きな領域も領域の１つなので注意しましょう．



さて，G の領域の１つを d で表すとき，d を囲む辺と d に入り込んでいる辺のことを，d の境界辺といいます．上の平面多重グラフで，肌色で示した領域 d_1 の境界

辺を，d_1 を囲む辺と d_1 に入り込んでいる辺に色分けして示してあります．これは比較的複雑な境界辺を持つ例です．この領域には，四角い穴があいていますね．

一般に，領域 d のすべての境界辺からなる多重グラフを d の境界といいます．それは，d の境界を表すことで，d そのものを表しているともいえます．

d の境界を描く（すなわち, すべての境界辺を通る）閉じた最短歩道の長さを d の次数といい，

$$\deg(d)$$

で表します．前のページの平面多重グラフにかかれた数は各領域の次数を表しています．それでは，肌色領域 d_1 の境界を描く閉じた最短歩道を考えてみましょう．どこからでもいいので，たとえば上辺中央の頂点 v_0 から左に進んでいきましょう．すると赤い辺を通って 3 角形を描いて v_0 に戻ります．そこから今度は，領域内の青い辺を進みます．行き方はいろいろありますが，最後に v_0 に戻るために，青い辺は 2 回ずつ通らなければならないことがわかります．こうして，v_0 に戻ってきます．これが，d_1 の境界を描く閉じた最短歩道になり，その長さは 21 になります．したがって，$\deg(d_1) = 21$ です．

平面多重グラフ G が非連結のときは，境界が非連結な領域がでてきます．このようなときは，境界はいくらかの閉じた最短歩道で描かれるので，それらの長さの和がその領域の次数になります．もう一度，前のページの平面多重グラフを見てみましょう．これは実は非連結で，2 つの連結成分からなり，1 つは明らかに大部分を占めていて，もう 1 つは中央下にあるループです．このため，緑色の領域の境界が非連結になり，その次数は，$2 + 1 = 3$ になります．

次に 2 つの領域が隣接することの定義ですが，2 つの領域が少なくとも 1 つの境界辺を共有しているとき，これらの領域は隣接しているといいます．1 つの領域内にいくらかの辺が入り込んでいるとき，この領域は自分自身に隣接していると考えます．

領域の次数を計算するとき，領域を囲む辺と領域に入り込んでいる辺を使いましたが，前者は 1 回ずつ，後者は 2 回ずつ数えることになります．また，前者はその辺を共有するもう 1 つの領域にもう一度数えられ，後者はそれ以上は数えられません．こうして，すべての領域の次数を総和するとき，すべての辺は 2 回ずつ数えられることになります．これより，(T1): 領域の次数の総和は辺の数の 2 倍になる，すなわち，

$$\sum_{i=1}^{r} \deg(d_i) = 2q$$

という定理が得られます．これは，5 章 (T1) の，頂点の次数についての同様の定理の類似です．

- 3 -

ここでいうオイラーの公式とは，連結平面多重グラフの頂点数 p，辺数 q，領域数 r について，

$$p - q + r = 2$$

がなりたつという定理です．内容は簡明でしょう．テキストでは，辺の数 q に関する帰納法で証明していますので，見ておくといいでしょう．

- 4 -

平面グラフは，多重辺とループを禁止され，さらに辺の交差も禁止されるので，頂点数を決めたときに，辺の数に強い制約が出てきます．それが (T3) の内容です．すなわち，連結平面グラフ G の頂点数を p，辺数を q，$p \geq 3$ とするとき，

$$q \leq 3p - 6.$$

特に，G が 3-サイクルを持たないとき，

$$q \leq 2p - 4.$$

この定理は，テキストで，(T1) と オイラーの公式 (T2) を使って比較的容易に証明されていますので，理解しておくといいでしょう．さらに，この定理は実は G が非連結でもなりたちます．

ブレイク: (ex1) (1)–(3) のどれかを選んで解く．(4) を解く．

- 5 -

(T3) を使うと，K_5 と $K_{3,3}$ は非平面的であることがわかります．なぜならば，もしも K_5 が平面的ならば，平面グラフとなり，

$$10 = q \leq 3p - 6 = 15 - 6 = 9$$

で矛盾しますし，同様に，$K_{3,3}$ が平面的ならば平面グラフで，明らかに，3-サイクルを持たないので，

$$9 = q \leq 2p - 4 = 12 - 4 = 8$$

で，やはり矛盾します．

クラトフスキーの定理は，グラフ理論において大変重要な定理で，非平面的であることの根源が K_5 と $K_{3,3}$ やそれらと同相なグラフにあることを主張します．すなわち，

$$\text{グラフ } G \text{ が非平面的} \iff \begin{array}{c} G \text{ が部分グラフとして，} K_5 \\ \text{または } K_{3,3} \text{ と同相なグラフを含む} \end{array}$$

という内容です．ここで，2 つのグラフが，同型なグラフのいくらかの辺上にいくらかの頂点のみを追加して得られるとき，これらを同相であるといいます．

ただし，この定理の証明については，大変難しいので省略させていただきます．

この節では，連結平面多重グラフの双対（そうつい）について説明します．G を連結平面多重グラフとするとき，G の双対 G^* とは，G からある手順によって作られる連結平面多重グラフのことです．その手順については，テキストの冒頭にわかりやすくかいてあるので，よく読んでください．

簡潔に言うと，G の領域内に頂点を 1 つずつかき，2 つの領域が隣接するとき対応する頂点を辺で結ぶという手順ですが，何重にも結ぶ場合があるので，手順をよく読んでください．

テキストに，連結平面多重グラフとその双対の例が図示してあります．もとの多重グラフが比較的単純でも，双対がすごく複雑になることがあります．

G の双対を G^* とするとき，G も G^* の双対になっています．すなわち，G と G^* は互いに他の双対になっていて，

$$(G^*)^* \simeq G$$

がなりたちます．また，G と G^* の辺数は等しく，G の領域の次数は，対応する G^* の頂点の次数に等しいです．さらに，G の領域数と G^* の頂点数，G の頂点数と G^* の領域数，はそれぞれ等しくなります．

ブレイク: (ex3) (2)–(4) を解く．

8

6章　平面多重グラフの要点（続き）

- 7 -

グラフの頂点彩色（または彩色）というのは，隣接する頂点が異なる色になるように，すべての頂点に色をつけることです．同じグラフに対してもいろいろな彩色のしかたがあります．数学的には，何色（なにいろ）を使うかよりも，何色（なんしょく）使うかということが重要です．そこで，高々n 色で彩色することを，n-彩色するといいます．

グラフ G の彩色に必要な色数の最小値を，グラフ G の彩色数といい，$\chi(G)$ で表します．簡単なグラフの彩色数は以下の通りです．

グラフ	彩色数
K_n	n
$K_{m,n}$	2
$K_{p_1,\ldots,p_s}$	s
木（自明でない）	2
C_{2n}/C_{2n+1}	2/3
W_{2n}/W_{2n+1}	4/3

多重グラフの彩色については，ループがあると，その端頂点が彩色できないので，彩色不能です．ループがない場合は，多重辺を普通の辺と同様に考えて彩色すれば大丈夫です．

彩色について重要な事実として，

$$G \text{ が } n\text{-彩色可能} \iff G \text{ が } n \text{ 部グラフ}$$

というものがあります．もし G が n-彩色可能ならば，同じ色に塗られた頂点を集めて細胞にすれば，n 部グラフを作れるし，逆に n 部グラフがあれば，各細胞を同じ色で塗れば，n-彩色できるからです．たとえば，木や森は 2-彩色可能なので，2 部グラフになります．

平面多重グラフについては，領域彩色というものが考えられます．それは，隣接した領域が異なる色になるように，すべての領域を塗ることです．ただし，1 つの領域は 1 色でぬります．この定義によると，自明でない（頂点が 2 つ以上の）木や，ある領域に辺が入り込んでいるような平面多重グラフは領域彩色できません．

平面多重グラフ G の領域彩色は，その双対 G^* の頂点彩色と同等になります．すなわち，G の各領域と，対応する G^* の頂点を同じ色にして，どちらの彩色も完成できるということです．

- 8 -

平面グラフの（頂点）彩色については，つねに4-彩色可能であることが知られています．これを，4 色定理といいます．双対を考えれば，本質的には，平面グラフ（自明でない木や領域に辺が入り込むグラフは除く）の領域彩色を考えるのと同じことになり，それも 4 色で塗れるということです．

この定理は長らく証明できずに，4 色問題として知られていました．これは，もともとは普通の意味の地図のエリア（国や自治体など）を色分けすることから生じた問題で，隣接する（点のみで接する場合は除く）エリアを異なる色で塗るとするとき，どんな地図でも 4 色で塗れそうだと予想したことから始まっています．

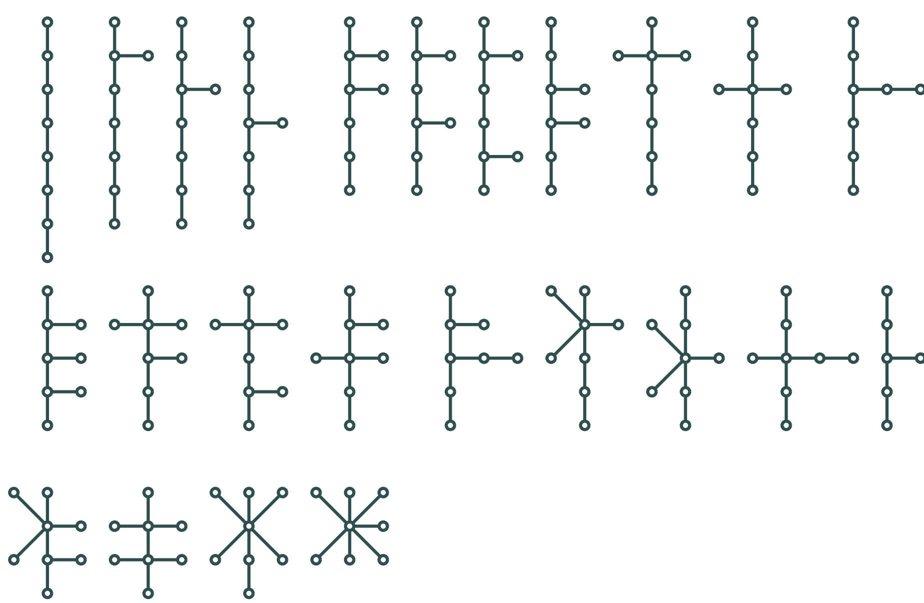
4 色問題は，1852 年に，Francis Guthrie によって提示され，その後さまざまな数学者が挑戦しましたが，ことごとく失敗しました．やがて，1976 年に，Kenneth Appel と Wolfgang Haken がコンピューターを利用する証明を成功させたとされています．その方法は，可約なグラフからなる不可避集合を作ることですが，詳しい内容はテキストにゆずります．また，この証明法は，今日に至るまで様々な改良や検証がなされています．

4 色定理の姉妹品に 5 色定理というのがあります．これは，平面グラフはつねに 5-彩色可能というものです．4 色定理がなりたつのだから，これはあたりまえの帰結ですが，5 色定理は，4 色定理のような大がかりな，しかもコンピューターを使うようなことはせずに，普通の証明ができるというところに意義があります．証明の詳細については，テキストを見てください．

- 9 -

この節では，グラフとしての木を扱っています．木というのは，連結でサイクルのないグラフのことです．直感的には，枝分かれしながら繋がっているグラフです．グラフなので，上下左右の違いはありません．ですから，適当に軸を縦か横にとり，そこに枝を生やすような描き方が自然です．

たとえば，8 頂点を持つ木を考えてみましょう．もちろん，同型なものを重複してあげないようにします．このような場合，直径が大きい順（または小さい順）に並べると，見落しがなくなります．



ブレイク: ここにあげた木のうちで，同型なものが 2 つあります．それはどれとどれでしょう．

前ページの図の 2 段目には，8 頂点を持ち，直径 4 の木が並んでいます．直径 4 であれば，まず直径 4 の軸をかいて，そこに枝を生やします．このとき，上端，下端の頂点に枝をつけると，直径が増えてしまうので，それは禁止されます．したがって，上から 2,3,4 番目の頂点から選んで枝をつけています．左から 5 番目の木は，2 種類の枝が出ていて，便宜上，上から，長さ 1 の枝，長さ 2 の枝と呼ぶことにしましょう．長さ 1 の枝は，上端，下端以外ならつけられますが，長さ 2 の枝は，上端，下端を避けるだけでなく，それらから 2 つ以上内側に入った頂点にしかつけられません．でないと直径が増えてしまうからです．直径 4 の軸の場合は，長さ 2 の枝は，中央の頂点にしかつけられません．一般に，長さ k の枝は，上端，下端から長さ k 以上内側に入った頂点にしかつけられません．

さて，テキストでは木の一般的な性質を述べています．まず，木の頂点数を p，辺数を q とするとき，

$$p = q + 1$$

がなりたちます．さらに，(T7) では，グラフ G が木であるための必要十分条件について述べています．すなわち，

$$G \text{ は木} \iff G \text{ は連結かつ } p = q + 1 \iff G \text{ にはサイクルがなく } p = q + 1$$

です．木の定義が，連結かつサイクルがないでしたが，その片方だけを取って，$p = q+1$ と組合せると，定義と同値になるということですね．証明はそれほど難しくないでしょう．

(T8) にはもう 1 つおまけの必要十分条件がかいてあります．

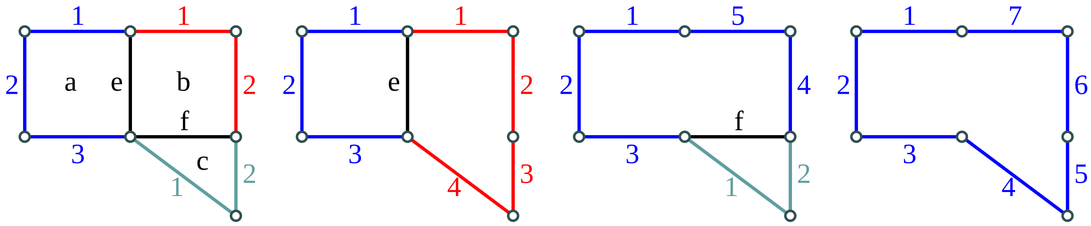
- 10 -

ここでは，連結多重グラフ G の全域木を扱っています．全域とはすべての頂点を用いるということですので，G の全域木とは，G のすべての頂点を用いる木ということです．ただし，それは G の部分グラフであることが前提です．つまり，全域木を作るには，G から辺を取り除いて木にするか，すべての頂点を繋ぐように辺を，頂点数 -1 個選ぶかすればいいわけです．

全域木は普通たくさんあり，その個数を調べることはよく行われます．G の全域木の個数を $t(G)$ とかきます．テキストの (10)–(12) の公式は，deletion-contraction recurrence やその一般化を示しています．やや議論が難しいので，簡潔に説明しましょう．

まず，G の辺の適当な集合を E' とします．このとき，全域木が E' の中のどの辺を使うかで場合分けしながら，全域木の個数を計算する公式について論じています．応用例として，(ex6) をあげています．

(ex6) の全域木数を求めるには，辺 e, f に注目して，全域木が e, f のうちのどれを使うかで場合分けして全域木の数を数えていきます．e, f を両方使う場合，3 つの領域 a, b, c の境界をなすサイクルに注目し，これらを破壊するように，各サイクルから e, f 以外の辺を 1 本ずつ取り除きます．そのやり方は $3 \times 2 \times 2$ 通りあります．その他の場合も同様に計算します．



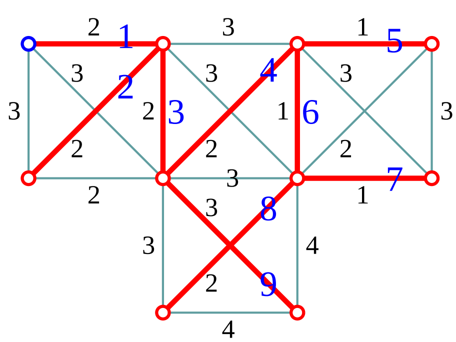
使う辺	全域木の数
e, f	$3 \times 2 \times 2 = 12$
e	$3 \times 4 = 12$
f	$5 \times 2 = 10$
$\emptyset$	$7 = 7$

∴ 全域木の数は 41.

次に，最小全域木の話題です．まず，ラベルつきグラフとは，この場合，辺に適当な数値が与えられているグラフです．その数値を辺の重みといいます．ラベルつきグラフの最小全域木とは，使った辺の重みの和が最小になる全域木です．ただし，最小全域木は複数個あることもあります．特に指定がない限り，その中の 1 つを求めれば十分でしょう．

G の最小全域木を求める代表的なアルゴリズムとして，プリム法とクラスカル法があります．プリム法は，G の適当な頂点から出発して，木を成長させる方法で，クラスカル法は，まず，G の頂点集合を全域森と見て，辺を追加していって全域木にする方法です．

詳しいアルゴリズムはテキストを見てください．プリム法については，木を成長させる過程で，辺とそれに接続する頂点（仮に枝と呼びます）を追加するとき，木のどの頂点にどの枝を追加するか，可能なすべてのやり方のうち，重み最小のものを 1 つ選び，追加します．この操作を繰り返してすべての頂点を追加したら終了です．



この図では，左上の頂点から始めて，プリム法で最小全域木を構成しています．赤い辺についた青い番号は，追加する順序を表します．ただし，少し違う順序もありえます．また，最小全域木は他にもあるので，違う答えになることもあります．

- 11 - - 12 - の内容については，この授業では飛ばします．

9

7章 ダイグラフの基礎

- 1 - - 2 - - 3 -

さて，これからダイグラフの勉強に入りますが，グラフをある程度しっかりやってきたので，ダイグラフは簡潔に説明していきたいと思います．まず，ダイグラフは多重グラフの各辺に矢印をつけたもので，矢印のついた辺を弧といいます．ダイグラフでは，はじめから多重性を認めていて，多重弧やループ，多重ループを許しています．ただし，向きが逆の 2 つの弧は多重弧とは考えません．複数の弧が，同じ向きで，同じ頂点の組に接続しているときに，多重弧といいます．ダイグラフ D の頂点の集合を V, 弧の集合を A とおくとき, $D = (V, A)$ と表します.

頂点 u から v への弧を (u, v) で表します．これを e とおくとき，e は u から接続する，あるいは，e は v に接続するといいます．また，u を e の始点，v を e の終点といいます．u から u への弧 (u, u) をループといいます.

ダイグラフの部分ダイグラフについては，グラフの場合と同様に定義します.

- 4 -

ダイグラフの同型性についても，グラフや多重グラフと同様で，変形して同じになれば同型なのですが，ここは重要なので，正確な定義をかいておきましょう．2 つのダイグラフ $D = (V, A)$ と $D' = (V', A')$ が同型であるとは，V から V' への 1 対 1 対応 φ が存在して，

$$（u \text{ から } v \text{ への弧の数}）=（\varphi(u) \text{ から } \varphi(v) \text{ への弧の数}） \qquad (u, v \in V)$$

をみたすことです．このとき，$D \simeq D'$ とかきます．この φ を D から D' への同型写像といいます.

- 5 -

ダイグラフの頂点の次数については，注意する必要があります．頂点 v を始点とする弧の数を出次数といい，$\deg^+(v)$ で表します．また，v を終点とする弧の数を入次数といい，$\deg^-(v)$ で表します．次数 $\deg(v)$ は次で定義します.

$$\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v)$$

このとき，グラフの場合に類似の定理として，(T1)，すなわち，

$$\sum_{i=1}^{p} \deg^+(v_i) = \sum_{i=1}^{p} \deg^-(v_i) = q$$

がなりたちます．ついでに，入次数が 0 の頂点を入口，出次数が 0 の頂点を出口といいます.

- 6 -

歩道，小道，道などの定義もグラフのときと同様です．ただし，辺に矢印がついているので，その向きに進むことが前提になります．

矢印の向きに逆らって進むことを許す拡張された歩道を，半歩道といいます．半小道，半道，半回路，半サイクルも同様に，矢印の向きに逆らって進むことを許すものとして定義します．

ここで，いくらかの基本的なダイグラフを定義していますので，まとめてみましょう．

オイラーダイグラフ	オイラー回路を持つダイグラフ
ハミルトンダイグラフ	ハミルトンサイクルを持つダイグラフ
対称的	任意の（異なる）2 つの頂点 u, v に対して， u から v への弧の数 $=$ v から u への弧の数をみたす
完全ダイグラフ	完全グラフの各辺 $\{u, v\}$ を，2 つの弧 $(u, v), (v, u)$ でおきかえて得られるダイグラフ
トーナメント	完全グラフの各辺を適当に向きづけて弧にしたもの
非閉路的	サイクルを含まないダイグラフ
多重木	グラフとしての木の辺を適当に向きづけて弧にしたもの
有向木	根を 1 つ持ち，根から各頂点への道が存在する多重木
根つき木	グラフとしての木の 1 つの頂点を根と指定して， 有向木の構造を持たせたもの

- 7 -

連結性については，ダイグラフには辺に矢印がついている分，グラフより複雑になります．ダイグラフには，強，片方向，弱の 3 段階の連結性があり，それらは以下のように定義されます．

強（連結）	任意の異なる頂点 u, v に対して，u から v への道 （と v から u への道）がある
片方向（連結）	任意の異なる頂点 u, v に対して，u から v への道か， または v から u への道がある
弱（連結）	任意の異なる頂点 u, v に対して，u から v への半道がある

この定義より，弱 $<$ 片方向 $<$ 強 の順に条件が強くなっていきます．弱でもないときは非連結といいます．弱であって片方向でないとき狭義弱といい，片方向であって強でないとき狭義片方向といます．弱のことを連結ともいいます．

強，片方向，弱を判定する方法として，(T3) がよく使われます．すなわち，

強	閉じた全域歩道を持つ
片方向	全域歩道を持つ
弱	全域半歩道を持つ

これらの判定法の証明はテキストにあります．片方向の場合の証明が一番難しいと思いますが，面白いアイデアを含んでいます．

証明の後に，連結成分についてかいてあります．（多重）グラフの場合，連結成分は割とわかりやすい概念ですが，ダイグラフになると，連結性が 3 種もあるので，連結成分も 3 種出てきます．弱（連結）成分とは，極大な弱部分ダイグラフのことですが，直感的には，弧の矢印の向きは考えずに，とにかく繋がったひとかたまりからなるダイグラフのことです．強成分，片方向成分も同様に定義します．すなわち，

強（連結）成分	極大な強部分ダイグラフ
片方向（連結）成分	極大な片方向部分ダイグラフ
弱（連結）成分	極大な弱部分ダイグラフ

ダイグラフを考えるからには，その大まかな構造ぐらいは知っておくといいでしょう．上の 3 種の成分のうち，強成分では，2 頂点間を結ぶ道が両方向にあります．片方向成分では，2 頂点間を結ぶ道が少なくともどちらかの方向にあります．弱成分は弧で繋がったひとかたまりです．

テキスト 6 ページの下の図は，ダイグラフの構造の例です．外側の円内は弱成分を表しています．その中の小さい円は強成分を表しています．それを囲む桃色の部分が片方向成分です．この図では，強成分間は上に向かってのみ弧がかかれています．もちろん実際には，各強成分に属する頂点の間に弧があるということを意味します．

このように，ダイグラフ D は，強成分を頂点に見立てると，構造がつかみやすくなります．D の弱成分は，いくらかの強成分に分かれていて，強成分同士が弧で結ばれますが，それは，強成分を 1 つの頂点と見て新たなダイグラフ D' を考えたときに，サイクルができないように結ばれます．そして D' の中の片方向成分が，D の片方向成分に対応します．

ブレイク: 1 ページの図の左のダイグラフは強，狭義片方向，狭義弱のうちどれでしょう？ また，いくつの強成分からなるでしょう？ 3 ページの図の右上のダイグラフについてはどうなるでしょうか？

- 8 -

ここでは，オイラーダイグラフについて述べています．オイラー（多重）グラフに比べて多分マイナーですが，判定法はとても簡潔なので，覚えておくといいでしょう．すなわち，ダイグラフがオイラーダイグラフであるためには，孤立頂点を除いて弱で，各頂点の入次数と出次数が等しいことが必要十分になります．

ブレイク: 3 ページの図の右上のダイグラフに弧を 3 本追加して，オイラーダイグラフにする．また，そのダイグラフのオイラー回路を見つける．

- 9 -

ダイグラフの隣接行列の話題です．隣接行列は，多重グラフにも定義しましたね．ダイグラフの場合も同様の定義で，テキストの定義をよく見ましょう．一応かいておくと，(i,j) 成分は，v_i から v_j への弧の数と定義しています．もちろん，(i,i) 成分は，v_i に接続するループの数になりますね．

多重グラフの場合と同様に，この行列は頂点の順序 $v_1, v_2, \ldots, v_p$ に依存していますので，この順序に注意します．

多重グラフの場合と違う点は，多重グラフの隣接行列は対称行列になるのに対し，ダイグラフの隣接行列は一般に対称行列にはなりません．ダイグラフの隣接行列が対称行列になるためには，ダイグラフが対称的であることが必要十分になります．

成分が非負整数の対称行列は，適当な多重グラフの隣接行列になりますが，成分が非負整数の正方行列は，適当なダイグラフの隣接行列になります．

さて，この節での大切な定理は (T5) で，その内容は，ダイグラフ D の隣接行列 M に対して，$M^n = \left(m_{ij}^{(n)}\right)$ とおくと，

$$m_{ij}^{(n)} = (v_i \text{ から } v_j \text{ への長さ } n \text{ の歩道の数})$$

がなりたつというものです．証明は n に関する帰納法によります．行列の積の計算が，歩道を分類して総数を数えることに対応していることに着目します．

(ex4) では，ダイグラフの隣接行列の 5 乗を，長さ 5 の歩道の数で求めています．

- 10 -

ここでは，ラベルつきダイグラフの最短道の求め方を扱っています．最短道は，使った弧の重みの和が最小になる道です．最短道は複数個あることもありますので，それらをすべて求めるアルゴリズムを考えてみましょう．

ここで示したのは，始点と終点を与えられたとき，始点から，途中の頂点までの最短道の長さ（距離）をその頂点に記入し，その最短道が最後に使った弧にマークしていく方法です．始点に近い頂点から順に，そこまでの距離と使った弧が決まっていくので，終点までの距離と，そこまでのルート（最短道）を割り出せます．

9 ページのラベルつきダイグラフの場合でやってみましょう．a から l への最短道とその長さを求めます．

ダイグラフに，各頂点までの距離をかき，そこまでで最後に使った弧にマーク（複数個あるかも）していきます．これを，その頂点を処理するということにします．その手順を見ていきましょう．

手順	頂点	距離	マーク	手順	頂点	距離	マーク
1	a	0	ない	2	e	1	(a,e)
3	i	2	(e,i)	4	b	3	$(a,b),(i,b)$
5	f	5	(a,f)	6	j	7	$(f,j),(e,j),(i,j)$
7	c	6	(b,c)	8	g	8	$(b,g),(f,g)$
9	k	9	(f,k)	10	d	9	(c,d)
11	h	11	$(g,h),(k,h)$	12	l	13	$(h,l),(k,l)$

マークされた弧のみを使って得られる道が求める最短道になり，答えはテキストにあります．また，その長さは 13 になります．この問題の場合，手順が規則的な順序になりましたが，それは，弧の向きが下か右の方を向いているからで，ダイグラフによって，当然手順は変わってきます．

ある頂点 v が処理できるのは，v に終点を持つ弧の始点がすべて処理された後です．この原則により，手順が決まっていきます．

ブレイク: 9 ページのダイグラフで，中央の下辺にある弧の重みを 3 から 1 に変えるとき，a から l へのすべての最短道と，その長さを求める．

10

9章 組合せ論

- 0 -

この章では，ものの数の数え上げを中心に勉強します．対象は，順列，組合せ，重複順列，順序分割，分割，ピザ順列，多面体順列，多項定理，最短道，トーナメント，とたくさんありますが．根底にある考え方は，同一視と数え上げです．たとえば，12 個のものがあって，そのうち 3 つずつを同一視，すなわち同じものとみなしたとき，異なるものの数は $12/3 = 4$ 個です．このような，同一視による数え上げを，ここでは主要な武器として議論を進めます．

ここで扱う対象についてまとめてみましょう．

r 順列	n 個の異なる対象から，重複しないで r 個取り出して，これを 1 列に並べたもの
r 組合せ	n 個の異なる対象から，重複しないで r 個取り出して作った集合
重複順列	同一のものをいくらかずつ含む対象を 1 列に並べたもの
順序分割	集合を分割したのちに，その細胞たちを 1 列に並べたもの
分割	集合を細胞に分けて，それらを集めて作った集合
ピザ順列	重複円順列
多面体順列	多面体の面に適当な条件で色をつけたもの
多項定理	$(x_1 + x_2 + \cdots + x_s)^n$ の展開公式
最短道	格子状グラフの最短道を 2 項係数で表す
トーナメント	トーナメント表の組合せ数の計算

- 1 -

r 順列は，n 個の異なる対象から 1 つずつ取っていって，それらを並べて作った列:

$$i_1, i_2, \ldots, i_r$$

なので，その総数は，

対象	i_1	i_2	i_3	$\ldots$	i_r
選び方の数	n	$(n-1)$	$(n-2)$	$\ldots$	$(n-r+1)$

より，

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

と計算できます．これは，$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)\times(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$ とも表せますね．なお，r 順列は，カンマで区切らないで表記することもあります．

- 2 -

r 組合せは，もちろん直接作れますが，あえて，r 順列から作ることもできます．たとえば，a, b, c, d, e から 3 組合せを作るには，まず 3 順列を作り，それを集合に作り変えます．

abc, acb, bac, bca, cab, cba	$\{a, b, c\}$
abd, adb, bad, bda, dab, dba	$\{a, b, d\}$
abe, aeb, bae, bea, eab, eba	$\{a, b, e\}$
acd, adc, cad, cda, dac, dca	$\{a, c, d\}$
ace, aec, cae, cea, eac, eca	$\{a, c, e\}$
ade, aed, dae, dea, ead, eda	$\{a, d, e\}$
bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb	$\{b, c, d\}$
bce, bec, cbe, ceb, ebc, ecb	$\{b, c, e\}$
bde, bed, dbe, deb, ebd, edb	$\{b, d, e\}$
cde, ced, dce, dec, ecd, edc	$\{c, d, e\}$

このように，6 個の 3 順列が，1 つの 3 組合せに対応していることがわかります．それは，6 個の 3 順列が，組合せとしては同一視されているとも言えます．その 6 は，$6 = 3!$，すなわち，3 文字の並べ替えの数です．したがって，

$$3\text{ 組合せの数} = \frac{3\text{ 順列の数}}{3!} = 10$$

がなりたちます．より一般には，

$$\begin{aligned} r\text{ 組合せの数} &= \frac{r\text{ 順列の数}}{\text{組合せとして互いに同一視される } r \text{ 順列の数}} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \end{aligned}$$

が言えます．これを $\binom{n}{r}$ とかき，2 項係数といいます．

- 3 -

重複順列は，設定がやや複雑ですが，n 個の対象中いくらかずつ同一のものがあり，第 1 種のものが n_1 個，第 2 種のものが n_2 個，...，第 s 種のものが n_s 個あるとします.（同種のものは同一とみなします）これらすべてを 1 列に並べたものが重複順列です．これも，具体例でやってみるとわかりやすいでしょう．

たとえば，$aabbbc$ について，重複順列を考えましょう．まず，同じ文字に添字をつけて一旦区別できるようにします．

$a_1a_2b_1b_2b_3c_1$, $a_1a_2b_1b_3b_2c_1$, $a_1a_2b_2b_1b_3c_1$, $a_1a_2b_2b_3b_1c_1$ $a_1a_2b_3b_1b_2c_1$, $a_1a_2b_3b_2b_1c_1$, $a_2a_1b_1b_2b_3c_1$, $a_2a_1b_1b_3b_2c_1$ $a_2a_1b_2b_1b_3c_1$, $a_2a_1b_2b_3b_1c_1$, $a_2a_1b_3b_1b_2c_1$, $a_2a_1b_3b_2b_1c_1$	$aabbbc$
中 略	中略
$c_1b_1b_2b_3a_1a_2$, $c_1b_1b_3b_2a_1a_2$, $c_1b_2b_1b_3a_1a_2$, $c_1b_2b_3b_1a_1a_2$ $c_1b_3b_1b_2a_1a_2$, $c_1b_3b_2b_1a_1a_2$, $c_1b_1b_2b_3a_2a_1$, $c_1b_1b_3b_2a_2a_1$ $c_1b_2b_1b_3a_2a_1$, $c_1b_2b_3b_1a_2a_1$, $c_1b_3b_1b_2a_2a_1$, $c_1b_3b_2b_1a_2a_1$	$cbbbaa$

すると，この表のように，いくらかの順列は，添字をはずすと同じ重複順列になることがわかります．すなわち，それらは添字をはずすと同一視されます．そして互いに同一視される順列の数は，この場合，

$$2! \times 3! \times 1! = 12$$

になります．したがって，重複順列の数は，

$$\frac{6!}{2!3!1!} = 60$$

になります．同様にして，一般の場合の重複順列の数は次のようになります．

$$\frac{\text{文字をすべて区別したときの順列の数}}{\text{実際には同一視される順列の数}} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_s!}$$

ブレイク: (ex1) を解く．

- 4 -

順序分割は，集合を細胞に分割して，さらにその細胞を 1 列に並べたものなので，表現上は分割より手間がかかっているようですが，数え上げるときは，順序分割の方が簡単です．n 元集合 A の順序分割:

$$(A_1, A_2, \ldots, A_s)$$

のうちで，$|A_i| = n_i$ をみたす順序分割の数を考えましょう．まず，A から A_1 を取り出すのは n_1 組合せを作ることなので，$\binom{n}{n_1}$ 通りのやり方があります．残りからさらに A_2 を取り出すのは n_2 組合せを作ることなので，$\binom{n-n_1}{n_2}$ 通りになります．これを繰り返すと，結局可能なやり方の数は，

$$\begin{aligned} p &= \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{s-1}}{n_s} \\ &= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\cdots\frac{(n-n_1-\cdots-n_{s-1})!}{n_s!(n-n_1-\cdots-n_{s-1}-n_s)!} \\ &= \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_s!} \end{aligned}$$

と計算できます．この結果は，重複順列の数と同じになっているのが面白いですね．

また，3 章で見たように，B を s 元集合とするとき，A を s 個の細胞に分ける順序分割の数は，A から B への全射の数に等しくなります．

次に分割の数を考えましょう．それには，細胞の大きさが大きく関わります．たとえば，A の分割 $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ で，$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2$，$|A_4| = |A_5| = 3$，$|A_6| = 1$ をみたすものはいくつあるでしょうか？ これには，まず順序分割として，$(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$ を考えます．順序分割ですから，$(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$ と $(A_2, A_1, A_3, A_4, A_5, A_6)$ は異なるものとみなしますが，これを分割に直すと，明らかに同じものになります．この場合，A_1, A_2, A_3 の順序を入れ替えたものと，A_4, A_5 の順序を入れ替えたものはすべて同じ分割に対応します．すなわち，$3! \times 2!$ 通りずつの順序分割は分割として同一視されます．したがって，分割の数は，

$$\text{分割の数} = \frac{\text{順序分割の数}}{\text{互いに同一視される順序分割の数}} = \frac{13!}{2!2!2!3!3!1!3!2!} = 1801800$$

になります．

ブレイク: (ex2) を解く.

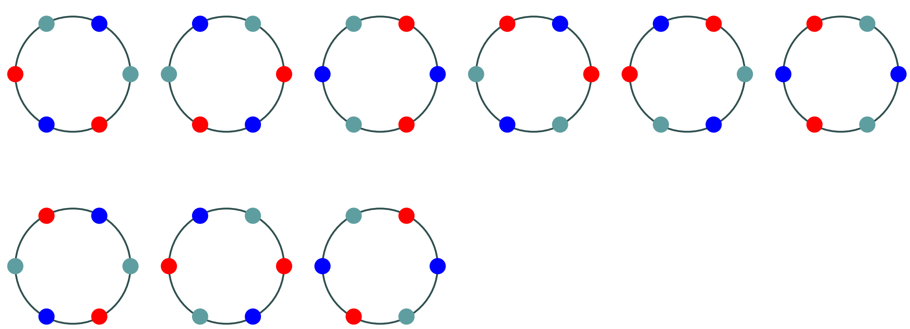
以下，テキストでは，ベル数やスターリング数について説明しています.

- 5 -

ピザ順列は，重複円順列の俗称または愛称で，一般的な用語ではないことをご容赦ください．わかりやすいので，この呼び名にしました．同一のものをいくらかずつ含む対象を，一定の大きさの円周上に等間隔に並べたもののことです．ただし，回転によって互いに移り合う配置は同一視することにします．このような条件で，可能な配置がいくつあるかを考えます.

ピザ順列では，回転対称性がある配置が考えられます．それは，配置が 1 回転する前に，もとの配置と同じになってしまう配置です．たとえば π 回転対称性は，π (180°) 回転して，もとの配置にもどる性質です．他にも，$2\pi/3$ 回転対称性などがあります.

回転対称性のない配置では，回転によって移り合う配置の数が，対象の数 n に等しくなります．しかし，π 回転対称性がある配置では，回転によって移り合う配置の数が，$n/2$ になります．一般に，$2\pi/d$ 回転対称性があれば，回転によって移り合う配置の数は，n/d になります．$n = 6$ で，赤赤青青緑緑の対象がある場合，回転対称性のない場合（上）とある場合（下）で回転させた図をかくと，以下のようになります．下のような，π 回転対称性を持つ配置は，例えば右半分に配置をかいて，左半分にはそれを回転させたものをかくことで得られます.



このように，回転対称性によって，回転で移り合う配置の数が違ってくるので，回転対称性の有無で配置を分類して数え上げ，別々に回転で移り合う配置の数で割ることで，ピザ順列が計算できます.

対象が n 個あり，重複順列のときと同様，同じ対象が，$n_1, n_2, \ldots, n_s$ 個ずつあるとします．このとき，回転対称性のある配置があるかどうかについては，$n_1, n_2, \ldots, n_s$ の最大公約数 d によって判断できます.

d	回転対称性
1	回転対称性がある配置はない
素数	回転対称性のない配置と $2\pi/d$ 回転対称性のある配置が存在
合成数	さまざまな回転対称性のある配置が混在

テキスト 3 ページにピザ順列の例題と解法がかいてあります．6 片のピザに具材 A, B, C が 2 片分ずつある場合です．この解法をよく読んでください.

ブレイク: (ex3) (1),(2) を解く.

- 6 -

多面体順列とは，多面体の面に適当な条件で色をつけたもののことです．ここで大事なことは，多面体順列では，空間内で回転して互いに移り合う順列は同一視するということです．

テキストでは，正多面体に対して，面の数だけ用意された色を重複なしに塗る問題を扱っています．これも今まで通りで，

$$\frac{\text{同一視しない時の塗り方の数}}{\text{空間内の回転により互いに移り合う塗り方の数}}$$

によって多面体順列が計算できます．詳細は，やはりテキストを見ていただきたいと思います．

ブレイク: (ex4) を解く．

- 7 -

この節では多項定理についてかいていて，他の節とやや異質ですが，重複順列の応用として，この定理を取り上げています．多項定理は，$(x_1+x_2+\cdots+x_s)^n$ を展開する公式で，(20) 式，すなわち，

$$(x_1+x_2+\cdots+x_s)^n = \sum_{\substack{n_1+\cdots+n_s=n \\ n_1,\ldots,n_s\geq 0}} \binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_s} x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_s^{n_s}$$

のことです．ここで，

$$\tbinom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_s} = \tfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_s!}$$

を多項係数といいます．これは重複順列や順序分割で現れた式ですね．

以下テキストでは証明がかいてあります．もう少しやさしくかいてみましょう．$(x_1+x_2+\cdots+x_s)^n$ を展開するために，この積を，

$$\begin{array}{ll}
1 & (x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{s-1}+x_s) \\
2 & (x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{s-1}+x_s) \\
3 & (x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{s-1}+x_s) \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
n & (x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{s-1}+x_s)
\end{array}$$

のように表してみます．この n 個の行の 1 つ 1 つから，変数を 1 つずつ取り出して掛ければ，1 つの項が出てきます．こうして可能なすべての項を取り出せは，展開が終わります．このとき，同類項をまとめなければ，s^n 個の項が出てきます．それは，

$$x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}\ldots x_{i_n}$$

の形になります．これを整理して，

$$x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}\ldots x_s^{n_s}$$

となったとしましょう．それでは，逆に，整理してこれになる項はどんなものでしょうか？ それは，x_i を n_1 個，x_2 を n_2 個，...，x_s を n_s 個含む項になります．それはまた，

$$\underbrace{x_1\ldots x_1}_{n_1}\underbrace{x_2\ldots x_2}_{n_2}\cdots\cdots\underbrace{x_s\ldots x_s}_{n_s}$$

の変数を自由に並べ替えてできる項ですね．その総数は，すでにやった重複順列の数:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_s!}$$

になります．したがって，多項定理の係数がこれに等しいことが示されました．これで証明は終わりです．

当然のことながら，多項定理は，$s=2$ のときには 2 項定理になるので，これは 2 項定理の一般化になっています．

ブレイク: (ex5) を解く．

- 8 -

ここでは，長方形の格子状のグラフにおいて，2 頂点間の最短道が 2 項係数で表せることを述べています．ただし，この事実自体よりも，それを応用することが重要です．テキスト 5 ページの図を見ると，A から B への最短道を，v_0, v_1, v_2 のどれを通るかで分類して，2 項係数を使った公式を導いています．他にもいろいろな応用を考えてみましょう．

ブレイク: (ex6) を解く．($n \times n$ 個の小正方形からなるグラフを使って証明してみましょう．)

- 9 -

試合の組合せによくトーナメント表が使われます．この組合せが何通りあるかを考えてみましょう．

6 ページにあるような，きれいなトーナメント表について，A から P までの 16 人の組合せ方は何通りあるでしょうか？ ここでも，いままでやってきた同一視の考え方が役立ちます．

実際，この表の下に，A から P までを書き込む方法は 16! 通りです．しかし，見かけはちがっても，実は同じ組合せになるものがたくさん出てきます．それでは，テキストにあるような組合せに対して，これと同じ組合せはどのようにしたらできるでしょうか？

たとえば，A と B を逆にしても組合せは同じです．すなわち，頂点 v_8 を中心にして左右を逆にする操作では，組合せは変わりません．同じことが，$v_9, v_{10}, \ldots, v_{15}$ についても言えます．

また，AB のブロックと CD のブロックを入れ替えても組合せは同じです．すなわち，v_4 を中心にして左右を逆にする操作では，組合せは変わりません．(ここで，簡単のため，AB の並びと CD の並びはそのままにします) 同じことが，v_5, v_6, v_7 についても言えます．

同様にして，他の頂点を中心にして左右を逆にする操作も，組合せを変えません．これらの操作は，独立に行え，操作を組合せることで，同じ組合せを表すトーナメント表をすべて作り出すことができます．こうして，トーナメント表の（実質的な）数は，

$$\frac{16!}{2^{15}}\ (= 658512875)$$

と計算できます．テキストでは，一般の人数で，自由にシードできるときの計算についても扱っています．

ブレイク: (ex7) を解く．

11

11章 順 序 集 合

- 1 -

11 章から 13 章までは，順序集合，束，ブール代数について解説しています．そこでは，順序集合の中で，次第に対象を特殊化していく流れになっています．したがって，まずは順序集合をしっかりと理解することが大切です．

順序関係は，反射的かつ反対称的かつ推移的な関係と定義されます．関係は 2 章で習ったので，思い出してほしいのですが，この 3 つの性質を持つ関係は，順序関係または順序といって，通常 $\leq$ で表します．そして，順序 $\leq$ が与えられた集合を，順序集合または半順序集合といいます．この場合の半は慣習上，あってもなくても同じ意味です．

順序集合において，$a \leq b$ などの数式の意味は以下の通りです．

数式	言葉での表現	意味
$a \leq b$	a は b に等しいか前にある（小さい） b は a に等しいか後にある（大きい）	左に同じ
$a < b$	a は b の前にある（より小さい） b は a の後にある（より大きい）	左に同じ
$a \ll b$	a は b の直前にある b は a の直後にある	$a < b$，かつ，$a < x < b$ をみたす x が存在しない

このように，順序集合の世界では，前にあるが小さい，後にあるが大きいと同じ意味に使われています．感覚的には，順序とは，大小関係と考えて差し支えありません．ただし，習慣上，大小集合という言葉は使いません．

そこで，順序集合の簡単な例として，$\{1, 2, 3, 4, 5\}$ に普通の順序 $\leq$ を入れたものがあります．この例では，すべての 2 元に対して，(1) 式，すなわち，

$$a \leq b \quad \text{または} \quad b \leq a$$

がなりたつという性質があります．普通，大小を考えるときは，これは当り前のことだと思うでしょう．しかし，これは実数かその部分集合などの特殊な場合になりたつ順序で，全順序といいます．全順序を与えられた集合を，全順序集合または鎖といいます．

(1) 式がなりたつとき，a と b は比較可能といいます．そうでないときは，比較不能といいます．極端な例として，任意の異なる 2 元が比較不能な順序集合があり，これを反鎖といいます．

以下，最大元，最小元，極大元，極小元の意味をまとめておきます．最大元は極大元の特別な場合，最小元は極小元の特別な場合になります．

記号	名前	意味
$\hat{1}$	最大元	自分以外のすべての元より大きい元
$\hat{0}$	最小元	自分以外のすべての元より小さい元
-	極大元	自分より大きい元がない元
-	極小元	自分より小さい元がない元

ブレイク: (ex1) を解く．

- 2 -

さて，順序集合といえばハッセ図です．ハッセ図は順序集合の構造をわかりやすく描いた図で，見かけ上はグラフです．ただ，グラフでは，図をさかさまにしても同型でしたが，ハッセ図では頂点の上下の位置関係を意識します．

2 つの頂点 a, b が，a が下，b が上になって繋がっていたら，$a \ll b$ です．この場合，上下は，斜め上，斜め下であってもかまいません．もし，a から上へ上へと繋がっていって，b に到達したら，（あるいは，b から下へ下へと繋がっていって，a に到達したら）$a < b$ を意味します．原則はこれだけです．

上に 2 つのハッセ図を描きましたが，左は間違いです．左の赤い辺は水平に頂点を繋いでいて，順序を表していないので，これは不要な辺です．青い辺は，これは確かに $d < a$ を意味しますが，$d \ll a$ ではないので，やはり不要な辺として処理されます．間違ったハッセ図は，この赤か青のタイプの不要な辺を含んでいるのです．

ある順序集合 P のハッセ図を逆さにしたハッセ図で表される順序集合を P の双対といい，P^* で表します．P^* における順序は，P における順序の双対順序といいます．双対順序はもとの順序を逆にしたものです．

テキスト 2 ページの上の図には，4 元以下の順序集合のハッセ図がかいてあります．この例で，順序集合を感覚的に捉えておくといいでしょう．

ブレイク: (ex2) を解く．

- 3 -

順序集合 P と Q が同型であるとは，直感的には，P と Q の構造が同じということです．正確には，P から Q への 1 対 1 対応 φ があって，

$$x \leq y \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(x) \leq \varphi(y)$$

をみたすとき，P と Q は同型であるといいます．このとき，$P \simeq Q$ とかき，φ を同型写像といいます．同型の順序集合は，ハッセ図を変形して移り合えます．テキスト 2 ページの下にある 4 つのハッセ図は，縦に並んだ 2 つずつが同型です．

- 4 -

順序集合 P の部分順序集合とは，P の一部からなる順序集合です．部分順序集合の順序は，P の順序から引き継がれます．P の部分順序集合には，P 自身や $\emptyset$ も含まれます．テキスト 3 ページの上の図には，左の順序集合 P の右に，部分順序集合の一例 Q がかいてあります．P では，a, c と b, d は直接繋がっていませんが，Q では，それらは繋がっています．それは，Q においては，$c \ll a$，$d \ll b$ になっているからです．

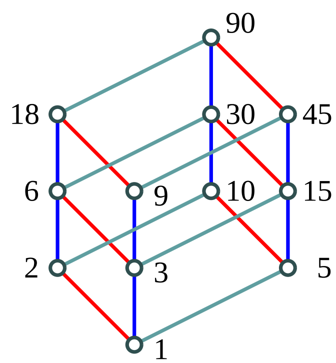
- 5 - - 6 - - 7 -

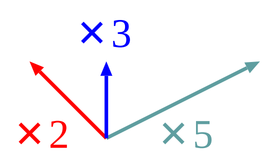
これ以後，基本的な順序集合を紹介しています．それぞれのハッセ図については，テキストにいくらかかいてあるので，参考にしてください．ここで扱う順序集合をまとめてみましょう．ここで，$x \mid y$ は，y は x で割りきれるという意味です．

記号	名前	順序
2^A	ベキ集合	$X \leq Y \iff X \subset Y$
D_n	n の約数の集合	$x \leq y \iff x \mid y$
$\mathscr{P}(n)$	n の分割の集合	$\lambda \leq \mu \iff \lambda$ は μ の細分
$\mathscr{P}(A)$	A の分割の集合	$\Gamma \leq \Gamma' \iff \Gamma$ は Γ' の細分

ベキ集合 2^A については，もとの集合の大きさで形が決まってしまうので，テキストの例 $|A| = 3$ や $|A| = 2, 4$ の場合をチェックしておけば十分でしょう．

約数の集合 D_n については，ベキ集合よりはバリエーションがあります．簡単な n で確認するといいでしょう．$n = 90$ の場合はテキストにハッセ図がありますね．$90 = 2 \times 3^2 \times 5$ と素因数分解されますので，3 つの素因数 $2, 3, 5$ それぞれの向きを上か斜め上に決めて，1 の頂点から，2 と 5 の向きには 1 つずつ，3 の向きには 2 つ辺を伸ばします．これらの辺に平行に辺を追加して，平行 4 辺形の頂点に，対応する数を書き入れれば，きれいな形のハッセ図ができます．数は 1 から始めて，頂点から頂点へ，素因数の向きに進むたびに，その素因数をかけてやれば，到達した頂点に書く数が決まります．





n の分割全体の集合 $\mathscr{P}(n)$ や，集合 A の分割全体 $\mathscr{P}(A)$ に対しては，細分により順序を入れることができます．それについてはテキストの説明を読んでください．

ブレイク: (ex3) (1),(2) を解く．(ex4) を解く．

2 つの順序集合 P, Q が与えられたとき，新しい順序集合 $P+Q$，$P \times Q$ を導入します．これらをそれぞれ，直和，直積といいます．このように，順序集合に対して演算ができるようにすることで，順序集合の研究などに役立ちます．

$P+Q$ は，P と Q のハッセ図を横に並べただけのもので，理解はしやすいと思います．しかし，$P \times Q$ については結構複雑なものになります．

$P \times Q$ の定義は，集合としては，

$$P \times Q = \{(x,y) \mid x \in P \ \text{かつ}\ y \in Q\}$$

（これは 2 章でやった集合の直積）であって，順序は，

$$(x,y) \leq (x',y') \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq x' \ \text{かつ}\ y \leq y'$$

で与えられるものです．これだけでは実際にハッセ図がかけないので，テキスト 5 ページの下の図を見てください．赤い順序集合 P と青い順序集合 Q の直積ですね．これは,（Q を大きめに描いておいて）Q の各頂点を P のコピーでおきかえて，Q の辺で P が結ばれているときは，P のコピーされた頂点同士を辺で結びます．このようにして，右辺の順序集合ができあがります．

順序集合の直和，直積については，(T1) がなりたちます．これはざっと見ておく程度でいいでしょう．

ブレイク: (ex5) を解く．

- 9 - については，この授業では飛ばします．

12

12 章　順序集合と束

- 1 -

ここでは，束について学びます．束を定義するには，テキスト - 1 - にあるような，束の公理をみたすものとして定義する方法と，11 章で導入した順序集合の一種として定義する方法があります．テキストでは，- 1 - から - 5 - までを費して，これらの 2 つの定義が同等であることを示しています．その証明をやりきることはやや大変なので，重要な部分をまとめてみましょう．

束の公理はテキストにあるように，交換律，結合律，吸収律の 3 つです．重要なので再掲します．

交換律	$a \vee b = b \vee a$	$a \wedge b = b \wedge a$
結合律	$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$	$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
吸収律	$a \vee (a \wedge b) = a$	$a \wedge (a \vee b) = a$

これを見てわかるように，それぞれの公理は 2 つずつの等式が対をなしてできています．それを赤と青でかいてあります．ただ，交換律，結合律はありふれたよくある公理であって，この束というものを特徴づけているのは，吸収律だと考えられます．

ブレイク: (ex1), (ex2) を解く．

- 2 -

束での双対原理は，集合代数ででてきた双対原理と似ています．集合代数との違いは，普遍集合や空集合が現れないことで，その分単純になります．すなわち，ある命題 A（束における等式）の中の $\vee$ と $\wedge$ を入れ替えてできる命題 A^* を A の双対といいます．そこで，A が公理から導かれた定理ならば，A^* も双対の公理から導くことができるので，やはり定理になるというのが，双対原理です．

ブレイク: (ex3) を解く．

- 3 -

この節では，誘導順序について説明しています．いま束を公理で定義した時点では，全く順序集合との関連がわかりません．この誘導順序によって，はじめて束に順序集合の構造が入ってくるのです．ここで，誘導順序とは，(1) 式，すなわち，

$$a \vee b = b \iff a \leq b \quad (a \wedge b = a \iff a \leq b \text{ でも同値})$$

で定義される，順序 $\leq$ のことです．

このように誘導順序を定義すると，これは順序の条件である，反射的，反対称的，推移的であることをみたします．テキストではその証明もかいてあります．

- 4 -

- 3 - で述べたことは，誘導順序によって束を順序集合とみなすことができるというものでした．これとは逆に，順序集合を束とみなす方法をここでは述べています．

そのために，ある意味で復習になりますが，上界，下界，上限，下限について説明しています．これらは普通微積のはじめの方で習うことがらですが，微積分では，主に実数の無限集合に対する上限，下限を考えるのに対して，ここでは 2 つの元 a, b，あるいは有限個の元に対して上限，下限を考えます．すなわち，まず a, b の上界とは，$x \geq a$ かつ $x \geq b$ をみたす x であり，a, b の上限 $\sup(a, b)$ とは，そのような x のうちで最小のもの，すなわち最小上界であると定義します．また，a, b の下界とは，$x \leq a$ かつ $x \leq b$ をみたす x であり，a, b の下限 $\inf(a, b)$ とは，そのような x のうちで最大のもの，すなわち最大下界であると定義します．

そこで，いま任意の 2 元の上限と下限が必ずあるような順序集合 P に対して，(2) 式，すなわち，

$$a \vee b = \sup(a, b), \quad a \wedge b = \inf(a, b)$$

で結び $\vee$ と交わり $\wedge$ を定義すれば，この演算は束の公理をみたし，P は束とみなすことができます．

- 5 -

これまで述べたのは，束 L から誘導順序によって順序集合 $\tilde{L}$ を構成できることと，つねに $\sup(a, b)$，$\inf(a, b)$ が存在する順序集合 P から (2) 式によって束 $\tilde{P}$ を構成できること，だったわけです．その際，順序集合 $\tilde{L}$ にはつねに $\sup(a, b)$，$\inf(a, b)$ が存在することが示され，(6) 式，すなわち，

$$\tilde{\tilde{L}} = L, \qquad \tilde{\tilde{P}} = P$$

が証明されます．この式の意味するところは，束を考える代わりに，つねに $\sup(a, b)$，$\inf(a, b)$ が存在する順序集合を考えておけばよいということになります．公理で定義された束よりは，順序集合として考えた束の方が直感的にわかりやすく，何よりもハッセ図で表示することができますので，ずっと便利だということです．

- 6 -

11 章で導入した順序集合 D_n と 2^A は，ここまでの議論をあてはめれば，束と考えることができます．それは，どちらもつねに（2 つの元に対する）sup，inf が存在して，(9),(10) 式，すなわち，

$$\begin{array}{lll} a \vee b = \sup(a, b) = \mathrm{lcm}\,(a, b) & a \wedge b = \inf(a, b) = \gcd(a, b) & (a, b \in D_n) \\ X \vee Y = \sup(X, Y) = X \cup Y & X \wedge Y = \inf(X, Y) = X \cap Y & (X, Y \subset A) \end{array}$$

のように計算できるからです．

ブレイク: (ex5) を解く．

- 7 -

ここでは束の同型を定義しています．一般には，束 L から束 M への 1 対 1 対応 φ があって，

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$$
$$\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$$

をみたすとき，$L \simeq M$ とかき，L と M は同型であると定義しますが，束が順序集合として与えられている場合は，順序集合として同型，すなわちハッセ図が同型であることと考えればいいでしょう．テキストに 6 元以下からなる束が（同型を除いて）すべてかいてあります．

- 8 -

ここでは部分束について定義しています．束 L の空でない部分集合 M が，L の演算 $\vee, \wedge$ につて閉じているとき，M を L の部分束といいます．L 自身も L の部分束になります．ここで，部分束と部分順序集合との違いについてよく認識する必要があります．部分順序集合はどのように選んでもいいのですが，部分束の場合は，L での演算の結果に左右されます．L の演算について閉じているのですから，M の元として x, y を選んだならば，$x \vee y$，$x \wedge y$ も選ばなければなりません．L の演算が M からはみ出てはならないのです．それをふまえて，D_{12} の部分束の例をよく見て理解してください．たとえば，D_{12} の部分束の元として，$3, 4$ を取ったとき，必然的に $3 \vee 4 = 12$，$3 \wedge 4 = 1$ も含まなければなりません．こうして，$\{1, 3, 4, 12\}$ からなる菱形の部分束が得られます．はじめに取る元が，$2, 3$ や $4, 6$ の場合も同様です．こうして 4 元からなる D_{12} の菱形の部分束は 3 つ得られます．一般に，4 元からなる菱形，すなわち D_6 と同型な部分束は，比較不能な元 x, y と，$x \vee y$，$x \wedge y$ で構成されます． したがって，D_6 と同型な部分束は，比較不能な 2 元の組合せによって得られます． D_{12} の 4 元からなる部分束は，この他に鎖（直線状のもの）も 3 つあります．これらは，D_{12} において上から下（または下から上）に元をたどっていけば得られます．一般に鎖の部分束はそのようにして得られます．

ブレイク: D_{36} の部分束で D_6 と同型なものはいくつあるか．(9)

- 9 -

ここでは有界束を導入していますが，その定義は明快で，最大元 $\hat{1}$ と最小元 $\hat{0}$ を持つ束ということです．有限束，すなわち有限個の元からなる束との違いを理解しましょう．テキストでは，有限束ならば有界束になることが示されています．すべての元の結びが $\hat{1}$，すべての元の交わりが $\hat{0}$ になるわけです．そして，$\hat{0}$ の直後の元（ハッセ図で $\hat{0}$ の 1 つ上の元）を原子といいます．

- 10 - - 11 -

次は分配束です．分配束は有界束ほどわかりやすくはありませんが，定義は明快で分配律:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

をみたすというものです．これは束のハッセ図のパッと見ではなかなか判別できませんが，幸い (T5): D_n と 2^A は分配束という定理があるので，これでかなりわかりやすくなると思います．ただし，これ以外にも分配束はあります．分配束であるための必要十分条件は (T6) で与えられ，部分束としてテキストにかいてある 5 元束を含まないということが，その条件になります．

- 12 -

この節では，有限（有限個の元からなる）分配束では，各元が他の元の結びで（ある意味で）一意的に表されることを述べています．(T7) がその内容ですが，用語が若干難しいですね．結び既約とは，その元がそれ以上他の元の結びに分解できないことを意味します．これ以上分解できない原子のようなイメージですね.（有界束ででてきた原子とはまた違うので注意）ある元を別の元の結びで表す場合，その元より小さい元の結びにしていきますが，使う元同士が比較可能のときは，より小さい元は結びにくわえても結果が変わらず無駄になります．同じ元を 2 つ以上結んでも結果は変わらず無駄になります．このような無駄を省いたとき，余分のないと表現します．こうして，(T7) の表現が理解されます．(T7') は大切な定理ですが，授業では割愛します．

- 13 -

相補束は分配束と並んで重要な束のクラスです．相補束になるには，まず有界束であることが前提になります．ある元 a の補元とは，結んで $\hat{1}$，交わって $\hat{0}$ になる元 a' のことです．有界束の各元に必ず補元があるときに，相補束といいます．(T8) で述べているように，有界な分配束は，補元があるとすればただひとつであるということが示せます．また，ややわかりにくいですが，(T9): 一意的な補元を持つ相補束の結び既約な元は原子のみであることも示せます．

- 14 -

やっとブール代数を定義する準備ができました．ブール代数とは，分配的かつ相補的な束のことです．(T7) (T8) (T9) の内容を総合すると，有限ブール代数の各元は，いくらかの異なる原子の結びでただひと通りに表せるということになります．かなりすっきりした性質を持っていますね．それで，今までででてきた 5 つの概念，順序集合，束，分配束，相補束，ブール代数の関係は，テキストのベン図のように表せます．

その他，(T11) (T12) (T13) については，軽く目を通しておいてください．また，- 15 - は割愛します．ブール代数については，次章で本格的に学びます．

13

13 章　ブール代数の基礎

- 1 -