– 離散系論ハンドアウト –

by K. Asai

0 章　記号の列と結合律

キーワード: 記号の列, 結合律, 演算

- 1 -（記号の列）n 個の記号 $a_1, \ldots, a_n$ が与えられているとし, それらの列

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n \tag{1}$$

を考える．ここで記号は特に数などである必要はなく, 純然たる記号とみなす．これらのうちで, 隣接した 2 つの記号はどれでも結合することができるとする．たとえば $a_2 a_3$ は結合でき, 結合したことを $(a_2 a_3)$ と括弧づけで表す．結合した記号あるいは単独の記号そのものを積ということにする．ここで隣接した 2 つの積はまた結合して積を作ることができるとする．それもまた括弧をつけて表す．たとえば,

$$((a_2 a_3)(a_4 a_5)) \tag{2}$$

のような積がある．このように結合を繰り返すとき, 最終的に (1) のすべての記号を使った積が得られる．これを n 文字の積ということにする．ただし, 結合の仕方は何通りもある．一般に結合の仕方が違えば, 結果としてできた n 文字の積は別のものとみなすべきである．

- 2 -（結合律）ここで, 結合律と呼ばれる次の条件を導入する．

(A1) 3 つの積 x, y, z がこの順に隣接しているとき,

$$((xy)z) = (x(yz)). \tag{3}$$

このとき, 次の定理を得る．

(T1) 結合律がなりたつとき, (1) から作った n 文字の積は結合の仕方によらずすべて等しい[1].

(∵) n に関する帰納法で示す．$n = 1$ では特に何も示すことはない．$n - 1$ で成立を仮定する．一般に (1) から作った n 文字の積は, 適当な積 x, y, z によって,

$$(x(yz)) \tag{4}$$

の形の結合で表すことができる．これは結合律により,

$$((xy)z) \tag{5}$$

と書き換えられる．そこで, (xy) を新たに x とおき直し, z を積に分解して (yz) と書き直せば, (5) は (4) で表される．それはまた結合律により, (5) と書き換えられる．この操作を繰り返すと z を構成する記号が減っていき, やがて

$$(x a_n) \tag{6}$$

[1] (T1) の後半:『(1) から作った n 文字の積は結合の仕方によらずすべて等しい』という命題を, 一般結合律という．(T1) は, 結合律がなりたてば, 一般結合律もなりたつということに他ならない．

の形になる．ここで x は

$$a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \tag{7}$$

から作った $(n-1)$ 文字の積であり, 帰納法の仮定より, 結合の仕方によらずすべて等しい．ゆえに, (6) もまた結合の仕方によらずすべて等しくなる．これで帰納法が完成した．(q.e.d.)

- 3 -（種々の分野に現れる結合律）上で見た結合律は, 数学の様々な分野における基本的な演算に対して大抵の場合なりたっている．その場合 (T1) によれば, その演算に関する積

$$a_1 a_2 \ldots a_n \tag{8}$$

は結合の仕方によらない, あるいは括弧のつけ方によらないことになる．それゆえ括弧をつけずに表記することができる．このことは計算や表記を著しく単純化することに繋がっており, 注目に値する．

結合律をみたすという場合, 代数系でよくあるように, ある集合に適当な演算 $*$ が定義され, 集合の任意の元 x, y, z について

$$(x * y) * z = x * (y * z) \tag{9}$$

がなりたつというのが普通である．適当な数の集合や多項式の集合などは, 加法と乗法について結合律をみたす．また n 次行列全体からなる集合も, 加法と乗法について結合律をみたす．その他結合律をみたすものとして, 集合代数や束における結びと交わり, ブール代数における加法と乗法などがある．別の例としては, 関数や関係の合成があげられる．関数の合成という演算は,

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \tag{10}$$

のような結合律をみたすが, 始域（定義域）と終域が異なる場合は, 前述のような集合に基づく扱いには含まれてこないので注意すべきである．

(ex1) 集合 A において定義される次の演算 $*$ のうちで, 結合律をみたすものはどれか？

1 :	$A = \mathbf{C}$	$x * y = x + y - xy.$
2 :	$A = \{$ 正の実数全体 $\}$	$x * y = e^{(\log x)(\log y)}.$
3 :	$A = \mathbf{R}$	$x * y = \log(e^x + e^y).$
4 :	$A = \{$ 実 2 次行列全体 $\}$	$x * y = xy - yx.$

1章　集合, 集合代数, 論理

☆9☆

キーワード: 集合, 部分集合, 集合代数, 集合代数の法則, 双対原理,
対称差, 包除原理, 特性関数, 命題, 論理

- 1 -（集合）ここでは集合は素朴にものの集まりと考える．ただし, その要素（元という）はすべて異なるものとする．$A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbf{Q}, 1 \leq x \leq 5\}$, $P = \{$すべての素数$\}$ などは集合の例である．表記上, $\{\cdots\}$ の中の元の順序のみが違う場合は同じ集合とみなされる．また, $\{\cdots\}$ の中に重複して元がかいてあっても, その重複は無視する．したがって, $\{1, 2, 5\} = \{2, 5, 1\} = \{2, 2, 5, 1, 2, 1, 5, 5\}$ である．なお, A を集合とするとき, x が A の元であることを x は A に属するといい, $x \in A$ で表す．x が A に属さないときは $x \notin A$ とかく．

有限個の元を持つ集合を有限集合といい, 無限個の元を持つ集合を無限集合という．元を持たない集合を空集合といい, $\emptyset$ で表す．有限集合 A に対して, その元の数を A の大きさまたは濃度といい, $|A|$, $\#A$, または $n(A)$ で表す．n 個の元からなる集合を, n 元集合という．

- 2 -（部分集合）集合 A, B に対して, $x \in A \Rightarrow x \in B$ がなりたつとき, A は B の部分集合である, あるいは A は B に含まれる（B は A を含む）といい, $A \subset B$（または $B \supset A$）とかく．

$$A = B \iff A \subset B \text{ かつ } B \subset A \tag{1}$$

がなりたつ．$A \subset B$ かつ $A \neq B$ のとき, A を B の真部分集合という．集合 A を固定したとき, A の部分集合全体からなる集合を A のベキ集合といい, 2^A で表す．有限集合 A に対して, その部分集合は各元を選ぶか選ばないかを指定すれば決定する．したがって, 部分集合の個数は, $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^{|A|}$ となる．すなわち, $|2^A| = 2^{|A|}$ である．

(ex1) $A = \{1, 2, 5\}$ のとき, 2^A を求めよ．

(ans) $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{1, 2, 5\}\}$.

- 3 -（集合代数）考える対象の範囲として普遍集合 U を1つ固定し, U の部分集合 $A, B, C, \ldots$ に対して集合算 $\cup, \cap, (\cdots)^c$ を定義した体系を集合代数と呼ぶ．

$$\begin{array}{rll} A \cup B & = \{x \in U \mid x \in A \text{ または } x \in B\} & \text{（結び）} \\ A \cap B & = \{x \in U \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\} & \text{（交わり）} \\ A^c & = \{x \in U \mid x \notin A\} & \text{（補集合）} \end{array} \tag{2}$$

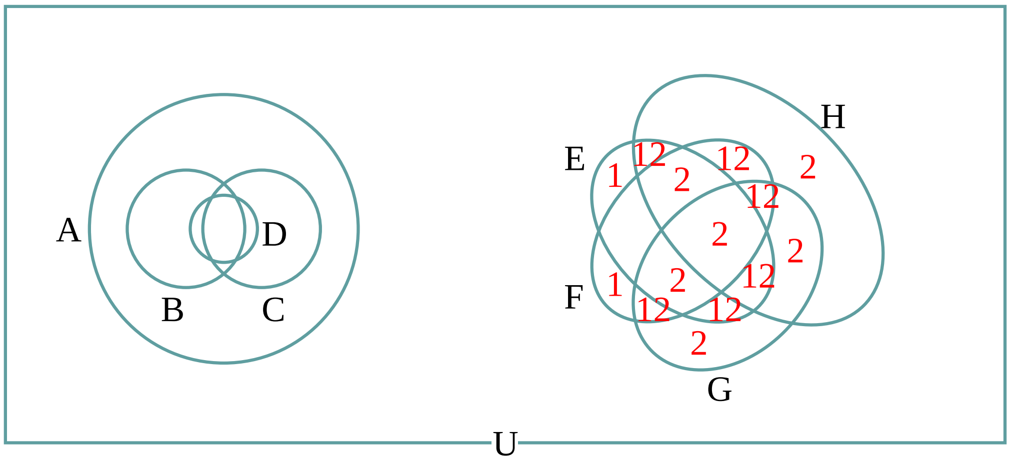
便宜上, これら以外にも

$$\begin{array}{rll} A - B & = A \cap B^c & \text{（差）} \\ A \triangle B & = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) & \text{（対称差）} \end{array} \tag{3}$$

などの演算も用いられる．

集合はしばしばベン図 (Venn diagram) と呼ばれる平面上の領域で表示される．対象になっているすべての集合は普遍集合 U を表す領域に含まれていると考える．ベン図は集合の間の包含関係や, 集合算の結果を表すのに便利である．

次のベン図左においては, $D \subset B \cup C \subset A$ であり, $(E \triangle F) \cap (G \cup H)$ で表される集合は, 右図の 12 で印された部分で示される.



- 4 -（集合代数の法則）集合代数は以下の法則をみたす.

$[S1]$	（ベキ等律）	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
$[S2]$	（結合律）	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	
$[S3]$	（交換律）	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$[S4]$	（分配律）	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	
$[S5]$	（同一律）	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap U = A$
$[S6]$	（同一律）	$A \cup U = U$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
$[S7]$	（対合律）	$(A^c)^c = A$	
$[S8]$	（補元律）	$A \cup A^c = U$	$A \cap A^c = \emptyset$
$[S9]$	（補元律）	$U^c = \emptyset$	$\emptyset^c = U$
$[S10]$	（吸収律）	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
$[S11]$	（ド・モルガンの法則）	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(ex2) これらの法則を, ベン図などを用いて確認せよ.

(note) 結合律がなりたつので, $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ および $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ の計算はどのように括弧をつけても結果が変わらない. ゆえにこれらは括弧なしで表記することができる. そして次がなりたつことが確認できる. ただし, $\{1, \ldots, n\} = [n]$ とおく.

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n &= \{x \in U \mid \text{ ある } i \in [n] \text{ に対して } x \in A_i\} \\ A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n &= \{x \in U \mid \text{ すべての } i \in [n] \text{ に対して } x \in A_i\} \end{aligned} \tag{4}$$

(note) 分配律あるいはド・モルガンの法則により, 次がなりたつことは容易に示せる.

$$\begin{aligned} A \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup \cdots \cup (A \cap B_n) \\ A \cup (B_1 \cap \cdots \cap B_n) = (A \cup B_1) \cap \cdots \cap (A \cup B_n) \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} (A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c = A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c \\ (A_1 \cap \cdots \cap A_n)^c = A_1^c \cup \cdots \cup A_n^c \end{aligned} \tag{6}$$

(ex3) (4), (5), (6) を示せ.

- 5 -（双対原理）集合代数における等式において, $\cup$ と $\cap$, および U と $\emptyset$ を入れ替えたものをもとの式の双対という．ある等式 E が恒等式ならば, その双対 E^* もまた恒等式である．これを双対原理という．その証明には, E の両辺の $(\cdots)^c$ を取ればよい．ド・モルガンの法則を繰り返せば, E の演算子は逆転し, 変数 $A, B, C, \ldots$ が $A^c, B^c, C^c, \ldots$ となり, U, $\emptyset$ が入れ替わった式が得られる．ここで, $A, B, C, \ldots$ が任意だったので, X^c を X $(X = A, B, C, \ldots)$ におきかえることで, E^* が得られる．

(ex4) 次の等式の双対を求めよ．(1) $A \cup (A \cap B) = A$. (2) $(A \cap B) \cup (A^c \cup B^c) = U$.

- 6 -（対称差）対称差については, 以下がなりたつ．

$$\begin{array}{ll} \text{（交換律）} & A \triangle B = B \triangle A \\ \text{（結合律）} & (A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C) \end{array} \tag{7}$$

これらは対称差の定義より容易に示される．（ベン図で考えてもわかる）結合律がなりたつので, $A_1 \triangle A_2 \triangle \cdots \triangle A_n$ はどのように括弧をつけても相等しくなり, したがって括弧なしで表記することができる．このような幾らか集合の対称差については, 次がなりたつ．

(T1) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ を集合とするとき,

$$A_1 \triangle A_2 \triangle \cdots \triangle A_n = \{A_1, \ldots, A_n \text{ のうちの奇数個に属する元全体}\}. \tag{8}$$

($\because$) n に関する帰納法による．$n = 1$ では明らか．$n - 1$ でなりたつと仮定する．(8) 右辺を S とおく．

$$\begin{aligned} & A_1 \triangle \cdots \triangle A_n = (A_1 \triangle \cdots \triangle A_{n-1}) \triangle A_n \\ & \qquad = [(A_1 \triangle \cdots \triangle A_{n-1}) - A_n] \cup [A_n - (A_1 \triangle \cdots \triangle A_{n-1})] \\ & \text{帰納法の仮定より,} \\ & \qquad = \{A_1, \ldots, A_{n-1} \text{ のうちの奇数個に属し, } A_n \text{に属さない元全体}\} \\ & \qquad\quad \cup \{A_1, \ldots, A_{n-1} \text{ のうちの偶数個に属し, } A_n \text{に属する元全体}\} \\ & \qquad = \{A_1, \ldots, A_n \text{ のうちの奇数個に属し, } A_n \text{に属さない元全体}\} \\ & \qquad\quad \cup \{A_1, \ldots, A_n \text{ のうちの奇数個に属し, } A_n \text{に属する元全体}\} \\ & \qquad = (S \cap A_n^c) \cup (S \cap A_n) = S \cap (A_n^c \cup A_n) \\ & \qquad = S \cap U = S. \end{aligned} \tag{9}$$

よって n でなりたつので, 帰納法が完成した．(q.e.d.)

(T1) は,

$$A_1 \triangle A_2 \triangle \cdots \triangle A_n \tag{10}$$

において, いくらかの集合が重複している場合には, 注意を要する．ある元が重複する集合に属するときは, その分属する集合の数を重複して数えて, 全体として奇数個の集合に属するかどうかを判断しなければならない．したがってまた, (10) の中で, 奇数個重複する集合は 1 つにでき, 偶数個重複する集合は削除できることがわかる．なお, すべての集合が偶数個ずつ重複している場合は, すべて削除されて空集合になる．

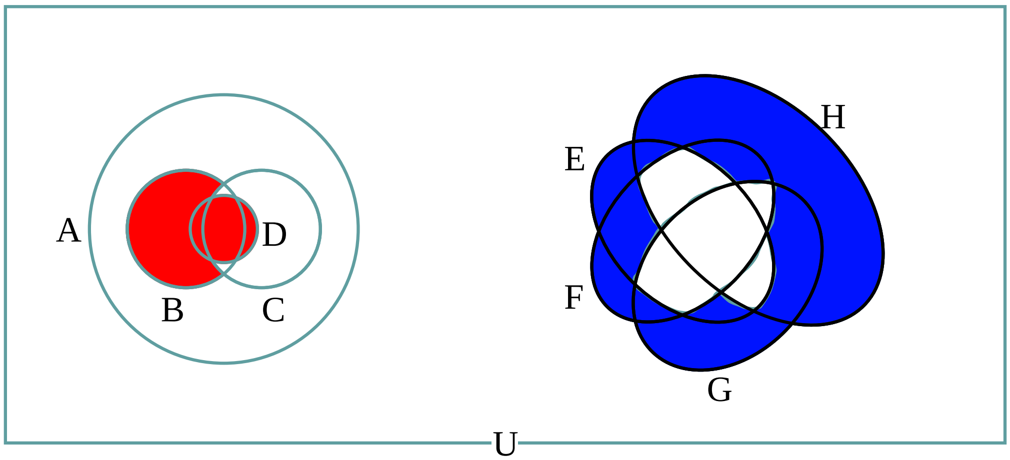
$$\underbrace{A_1 \triangle \cdots \triangle A_1}_{n_1} \triangle \underbrace{A_2 \triangle \cdots \triangle A_2}_{n_2} \triangle \cdots \triangle \underbrace{A_s \triangle \cdots \triangle A_s}_{n_s} = A_1^{\epsilon_1} \triangle \cdots \triangle A_s^{\epsilon_s} \tag{11}$$

ここで, n_i が奇数のとき, $A^{\epsilon_i} = A$, n_i が偶数のとき, A^{ϵ_i} は削除, または $A^{\epsilon_i} = \emptyset$ とする．

(ex5) (7) を示せ．

(ex6) $A, B, \ldots, H$ を - 3 - のベン図で表される集合とするとき, 次の集合を塗りつぶして示せ．(1) $A \triangle B \triangle C \triangle D$. (2) $E \triangle F \triangle G \triangle H$. (3) $(A \cap B) \triangle (B \cap C) \triangle (C \cap D)$. (4) $(E \cup F) \triangle (F \cup G) \triangle (G \cup H) \triangle (H \cup E)$. (5) $(E \cup F) \triangle (F \cup G) \triangle (G \cup H) \triangle (H \cup E) \triangle (E \cup G) \triangle (F \cup H)$.

(hint) (1),(2) のような問題の場合, 領域を交互に塗り分けられた特徴的な模様になる. (3),(4) のような問題では, △ で繋がれた各集合に含まれる領域に印をつけていき, 最終的に奇数個の印がある部分を選ぶ. (5) のような, 集合の対称式（集合を任意に入れ替えても変わらない式）の場合は, 領域が与えられた集合のうち何個に含まれるかということのみで, 塗り分けが決定する.



(ans) (3) 上の図の左の部分.

(5) 領域が E, F, G, H のうちのいくつに含まれるか (m) に注目し, それが与式の △ で繋がれた集合のうちのいくつに含まれるか (n) を求める. n が奇数のとき塗ればよい.

m	0	1	2	3	4
n	0	3	5	6	6

答えは上の図の右の部分.

- 7 -（包除原理）有限集合に対し, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ はよく知られた公式である. これを一般化すると次のようになる.

(T2)（包除原理）有限集合 $A_1, \ldots, A_n$ に対して,

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_s}|. \tag{12}$$

(∵) n に関する帰納法による. $n = 1, 2$ では明らか. $n-1$ でなりたつと仮定する. $n = 2$ でなりたつので,

$$\begin{aligned} & |A_1 \cup \cdots \cup A_n| = |(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup A_n| \\ = \ & |A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}| + |A_n| - |(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cap A_n| \\ = \ & |A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}| + |A_n| - |(A_1 \cap A_n) \cup \cdots \cup (A_{n-1} \cap A_n)|. \end{aligned} \tag{13}$$

ここで, 帰納法の仮定より,

$$\begin{aligned}
(13)\ 右辺 =\ & \sum_{s=1}^{n-1}(-1)^{s-1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_s\le n-1}|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_s}|\ +|A_n| \\
& -\sum_{s=1}^{n-1}(-1)^{s-1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_s\le n-1}|(A_{i_1}\cap A_n)\cap\cdots\cap(A_{i_s}\cap A_n)| \\
=\ & \sum_{s=1}^{n-1}(-1)^{s-1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_s\le n-1}|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_s}|\ +|A_n| \qquad (14)\\
& +\sum_{s=1}^{n-1}(-1)^{s}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_s\le n-1}|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_s}\cap A_n| \\
=\ & \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_s\le n}|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_s}|.
\end{aligned}$$

(最後から 2 番目の式は, A_n を使うか使わないかで分類した式になっている.)
こうして n でなりたつので, 帰納法が完成した. (q.e.d.)

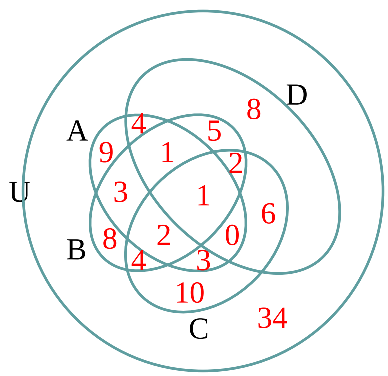
(ex7) $n=3,4$ のときの式をかけ.

(ex8) 以下の図は, ある 100 人のクラスにおいて, 兄弟姉妹のあるなしを調べた結果である. ここに,

A: 兄がいる学生の集合, B: 姉がいる学生の集合

C: 妹がいる学生の集合, D: 弟がいる学生の集合

とする. このとき, (T2) がなりたつことを確かめよ.



- 8 - (特性関数) 普遍集合 U を固定して, その部分集合 $A,B,C,\ldots$ を考える. 集合 A の特性関数 χ_A とは, U 上で定義されて 0 または 1 の値を取る関数であって,

$$\begin{cases} \chi_A(x)=1 & (x\in A) \\ \chi_A(x)=0 & (x\notin A) \end{cases} \tag{15}$$

をみたすものである. 特性関数の値は必ず 0 か 1 なので, つねに ${\chi_A}^n=\chi_A$ $(n=2,3,\ldots)$ がなりたつ. さらに, 特性関数については以下の公式がなりたつ.

$$\begin{array}{ll}
\chi_{A\cap B}=\chi_A\chi_B & \chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_A\chi_B \\
\chi_{A^c}=1-\chi_A & \chi_{A-B}=\chi_A(1-\chi_B) \\
\chi_{A\triangle B}=\chi_A+\chi_B-2\chi_A\chi_B &
\end{array} \tag{16}$$

これらの公式の証明は, ベン図を使えば簡単にできる. ベン図を描いて, 各エリアにおける公式の両辺の値が一致することを確かめればよい. (16) のはじめの 3 式を用いれば, 集合算

で構成された集合の特性関数はすべて計算できる. また, $A \supset B$ ならば $\chi_{A-B} = \chi_A - \chi_B$ がなりたつが, 一般には上にかいた通りである.

(ex9) (16) 最後の 2 式を計算で示せ.

特性関数については, 包除原理と同様の次の定理がなりたつ.

(T3) 集合 $A_1, \ldots, A_n$ に対して,

$$\chi_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq n} \chi_{A_{i_1}} \cdots \chi_{A_{i_s}}. \tag{17}$$

証明は (T2) とほぼ同様なので省略する.

- 9 -（集合と論理）命題とは, 一般に真か偽かがはっきりする文をさす. ただし, 命題の中にはパラメータが入っている場合が多く, 真か偽かはパラメータの値に依存する. たとえば, "$x + y$ は整数である" という命題の真偽は, まさに x, y の値に依存する. $P, Q, R, \ldots$ を命題とする. これらに対して, 論理演算子を用いた以下の命題計算を定義する.

$$\begin{array}{ll} P \vee Q: & (P \text{ または } Q) \\ P \wedge Q: & (P \text{ かつ } Q) \\ \sim P: & (P \text{ の否定}) \end{array} \tag{18}$$

これらは新たな命題になる. さて, P という命題は, そのパラメータによって真偽が決まる. そこで, P が真になるようなパラメータの組の集合 S_P を考える. これは命題 P の性質を完全に表していることがわかる. したがって, P は S_P で表示することができる. これは命題がベン図で表示できることを意味する. このとき,

$$\begin{array}{llll} P \vee Q & \longleftrightarrow & S_{P \vee Q} & = S_P \cup S_Q \\ P \wedge Q & \longleftrightarrow & S_{P \wedge Q} & = S_P \cap S_Q \\ \sim P & \longleftrightarrow & S_{\sim P} & = (S_P)^c \end{array} \tag{19}$$

のように対応する. いくらかの命題に命題計算を定義した体系を命題代数という. 上の対応からわかるように, 命題代数の法則は, 集合代数の法則と同等になる. 以下に命題代数の法則を示す. ここで, 同値な命題を $\equiv$ で表す. また, t は恒真命題（常に真の命題）, f は矛盾命題（常に偽の命題）である.

$[P1]$	（ベキ等律）	$P \vee P \equiv P$	$P \wedge P \equiv P$
$[P2]$	（結合律）	$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$	
$[P3]$	（交換律）	$P \vee Q \equiv Q \vee P$	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
$[P4]$	（分配律）	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	
$[P5]$	（同一律）	$P \vee f \equiv P$	$P \wedge t \equiv P$
$[P6]$	（同一律）	$P \vee t \equiv t$	$P \wedge f \equiv f$
$[P7]$	（対合律）	$\sim(\sim P) \equiv P$	
$[P8]$	（補元律）	$P \vee \sim P \equiv t$	$P \wedge \sim P \equiv f$
$[P9]$	（補元律）	$\sim t \equiv f$	$\sim f \equiv t$
$[P10]$	（吸収律）	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$
$[P11]$	（ド・モルガンの法則）	$\sim(P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$	$\sim(P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$

(ex10) (1) $C \subset A \cap D$ または $C \subset B \cap D$ ならば, $C \subset A \cup B$ かつ $C \subset D$ となることを示せ.（逆はなりたたない）

(2) $D \subset C \subset A \cap D$ または $D \subset C \subset B \cap D$ のときはどうなるか.

(ans) (1)

$$
\begin{aligned}
&C \subset A \cap D \text{ または } C \subset B \cap D \Rightarrow C \subset (A \cap D) \cup (B \cap D) \\
&\iff C \subset (A \cup B) \cap D \iff C \subset A \cup B \text{ かつ } C \subset D.
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&D \subset C \subset A \cap D \text{ または } D \subset C \subset B \cap D \\
&\iff (C \subset A \cap D \text{ または } C \subset B \cap D) \text{ かつ } D \subset C \\
&\Rightarrow\ C \subset (A \cap D) \cup (B \cap D) \text{ かつ } D \subset C \\
&\iff C \subset (A \cup B) \cap D \text{ かつ } D \subset C \\
&\iff (C \subset A \cup B \text{ かつ } C \subset D) \text{ かつ } D \subset C \\
&\iff C \subset A \cup B \text{ かつ } (C \subset D \text{ かつ } D \subset C) \\
&\iff C \subset A \cup B \text{ かつ } C = D.
\end{aligned}
$$

2章 関係とその表現

☆ 10 ☆

キーワード: 関係, ダイグラフ, 行列, 逆関係, 関係の合成, 関係の性質,
分割, 同値関係, 同値類, 商集合, 順序関係, 関係の個数

- 1 -（関係の定義）A, B を集合とするとき, A と B の直積 $A \times B$ を次のように定義する.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\, b \in B\} \tag{1}$$

$A \times B$ の元 (a, b) は順序対と呼ばれ, 順序の違いを区別した a, b の並びである. ここで, $A \times B$ の部分集合を A から B への関係という[1]. 特に, A から A への関係を A 上の関係という. R を A から B への関係とするとき, A を R の始域, B を R の終域という. $(a, b) \in R$ であることを aRb で表し, a は b と関係 R にあると考える. また, $(a, b) \notin R$ であることを $a\not{R}b$ で表し, a は b と関係 R にないと考える.

$A \times B$ の部分集合であれば, 何であっても A から B への 1 つの関係と考える. 1 つ 1 つの部分集合が, それぞれ異なった関係を表している. ここで, 部分集合に意味をつけることができれば, 関係を数式や言葉で表すことができる. たとえば, $A = \{1, 2, 3\}$ 上の関係:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\} \tag{2}$$

は, $xRy \iff x \leq y$ によって定義できる. これは関係を意味によって定義したものである. しかし, すべての関係に意味をつけられるとは限らない.

(ex1) (1) $A = \{1, 2, \ldots, 6\}$ とし, $xRy \iff x \mid y$（y が x で割りきれる）によって A 上の関係 R を定義するとき, R を集合の形で表せ.

(2) $A = \{$ 日本の都道府県全体 $\}$ とし, $xRy \iff$ “x と y は隣接する” によって A 上の関係 R を定義する. このとき, 長野県 Ry をみたす y をすべて求めよ.

- 2 -（関係の表現）関係は, 直接要素を書き並べる他に, ダイグラフ（矢線図）, 行列, 座標図で表現できる. 特にダイグラフと行列による表現が大切である. R を A から B への関係とする. まず A, B の元を頂点としてかき, aRb ならば, a から b への弧を描く. こうして作ったダイグラフを R のダイグラフといい, これがすなわちダイグラフによる R の表現である. ここで, $A = B$ のとき, すなわち, R が A 上の関係のときは注意が必要で, A の元を 1 つずつかいた上で, aRb のときに a から b への弧を描く. したがってこの場合はループができることがある.

$A = \{a_1, \ldots, a_r\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_s\}$ とし, R を A から B への関係とするとき, R の行列 $M_R = (m_{ij})$ $(i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, s)$ は次で定義される.

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & (a_i R\, b_j) \\ 0 & (a_i \not{R} b_j) \end{cases} \tag{3}$$

これは行列による R の表現である. この行列は, A, B の元の並べ方 $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s$ に依存していることに注意する. ゆえに, 本来は以下の例のように行列の行および列に元

[1] これは関係の中でも 2 項関係というものである. 一般に, $A_1 \times \cdots \times A_n$ の部分集合を $A_1, \ldots, A_n$ 上の n 項関係という.

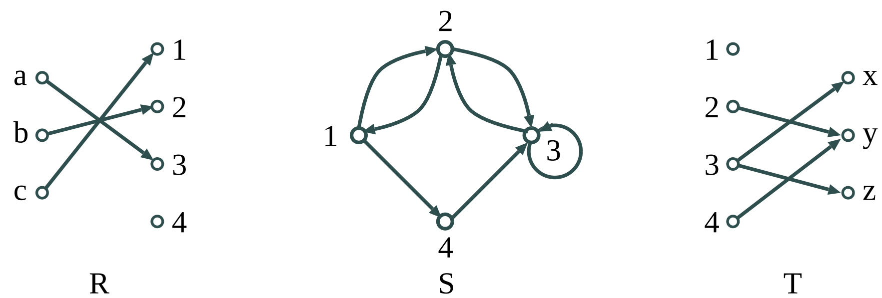
を付記するべきであるが, $1, 2, 3, \ldots; a, b, c, \ldots$ など元の順序が自然に決まる場合は省略してもよいことにする.

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{4}$$

座標図による表現は, 適当な座標平面 $A \times B$ をとり, その上に R の元 (a, b) を点集合として描いたものである. たとえば, $\mathbf{R}$ 上の関係が, $xRy \iff f(x, y) = 0$ のように 2 変数関数 $f(x, y)$ を用いて定義されたとき, この関係の座標図は曲線 $f(x, y) = 0$ のグラフになる.

(ex2) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{x, y, z\}$ とする. A から B への関係 $R = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1)\}$, B 上の関係 $S = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 3)\}$, B から C への関係 $T = \{(2, y), (3, x), (3, z), (4, y)\}$ を取る. R, S, T をそれぞれダイグラフおよび行列で表せ.

(ans) 以下にダイグラフを示す. T の行列は (4) 参照. R, S (T も) の行列は (10) の左辺参照.



- 3 -（逆関係）R を A から B への関係とするとき, R の逆関係 R^{-1} を,

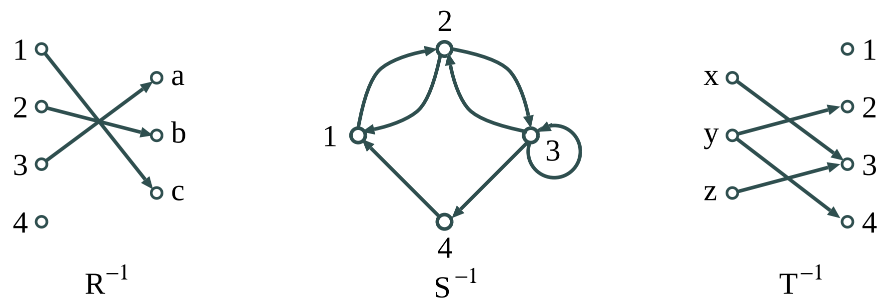
$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} \tag{5}$$

で定義する. これは B から A への関係である. R^{-1} のダイグラフは, R のダイグラフの弧の向きを逆にしたものになる. 特に $A \neq B$ のときは, (ex2,3) の解答例にあるように, R^{-1} のダイグラフは R のダイグラフの左右を反転させることで得られる. 明らかに次がなりたつ.

$$(R^{-1})^{-1} = R, \qquad M_{R^{-1}} = {}^t M_R \tag{6}$$

(ex3) (ex2) の R, S, T について, R^{-1}, S^{-1}, T^{-1} を求め, ダイグラフと行列で表せ.

(ans) 以下にダイグラフを示す.



- 4 -（関係の合成）A から B への関係 R と B から C への関係 S があるとき, 関係の合成 $R \circ S$ を次のように定義する. これは A から C への関係で, RS ともかく.

$$R \circ S = \{(a, c) \mid \text{ある}\, b \in B\, \text{が存在して}, aRb\, \text{かつ}\, bSc\} \tag{7}$$

さらに C から D への関係 T があるとき,

(T1) 合成に関する結合律:

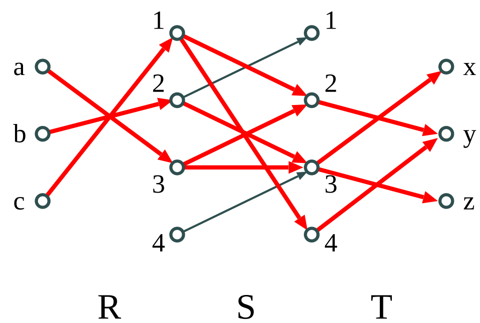
$$(RS)T = R(ST) \tag{8}$$

がなりたつ.

(∵) $(a, d) \in (RS)T$ とする. このとき, ある $c \in C$ が存在して, $(a, c) \in RS$ (#1) かつ $(c, d) \in T$ (#2). (#1) より, ある $b \in B$ が存在して, $(a, b) \in R$ (#3) かつ $(b, c) \in S$ (#4). (#2),(#4) より, $(b, d) \in ST$ (#5). したがって (#3),(#5) より, $(a, d) \in R(ST)$. これより, $(RS)T \subset R(ST)$ (#6). 同様にして, $R(ST) \subset (RS)T$ (#7) も言える. (#6),(#7) より, $(RS)T = R(ST)$ を得る. (q.e.d.)

(ex4) $R(ST) \subset (RS)T$ を示せ.

実際にいくらかの関係の合成を求めるには, それらの関係のダイグラフを横に並べて描き, 左端から右端に達する道があるときに限り関係があると考えればよい. たとえば, (ex2) において RST を求めるには以下の図を考える: （この場合, S は本来の描き方とは違うことに注意せよ）



この図より, $RST = \{(a, x), (a, y), (a, z), (b, x), (b, z), (c, y)\}$ となる.

行列を使って関係の合成を求めることもできる. すなわち,

(T2) $M^{\#}$ で行列 M の正の成分を 1 におきかえたものを表すとき,

$$M_{RS\ldots T} = (M_R M_S \ldots M_T)^{\#}. \tag{9}$$

これより関係の合成は, 行列の積で計算される. 上の例では,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

より, $RST = \{(a, x), (a, y), (a, z), (b, x), (b, z), (c, y)\}$ となる.

合成の逆関係については, 次がなりたつ.

(T3) A から B への関係 R と B から C への関係 S に対して,

$$(RS)^{-1} = S^{-1} R^{-1}. \tag{11}$$

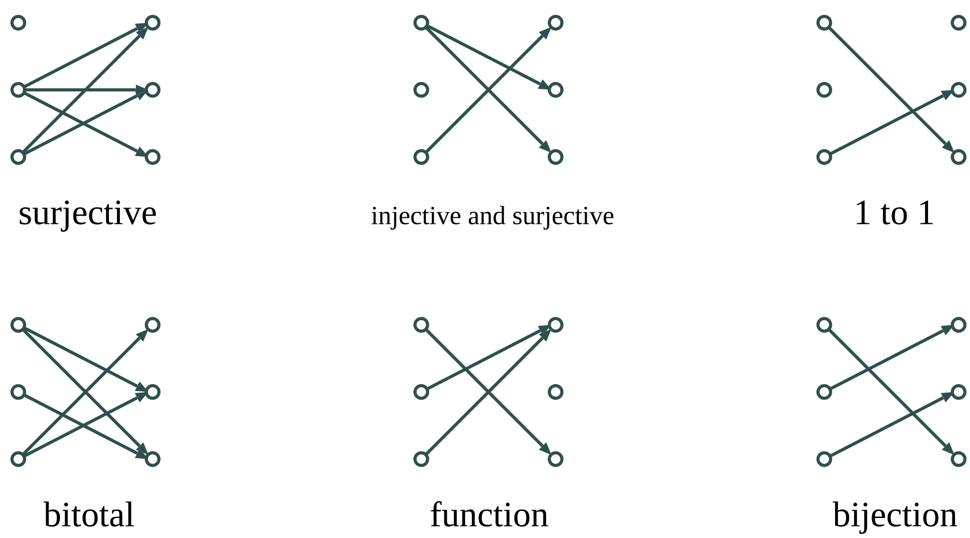
同様にして,

$$(R_1 R_2 \ldots R_s)^{-1} = R_s^{-1} \ldots R_2^{-1} R_1^{-1}. \tag{12}$$

(ex5) これを示せ.

- 5 -（関係の性質）A から B への関係 R については, 以下の性質がしばしば論じられる.

性質	定義
単射的（左一意的）	aRb かつ $a'Rb \Rightarrow a = a'$
関数的（右一意的）	aRb かつ $aRb' \Rightarrow b = b'$
1 対 1	単射的かつ関数的
左全域的	任意の $a \in A$ に対して, ある $b \in B$ が存在して, aRb
全射的（右全域的）	任意の $b \in B$ に対して, ある $a \in A$ が存在して, aRb
双全域的	左全域的かつ全射的
関数（関数関係）	関数的かつ左全域的
全単射（1 対 1 対応）	1 対 1 かつ双全域的



(note) 単射的な関係を単射, 全射的な関係を全射という. ただし, 関数的な関係を関数というわけではないことに注意する.

(note) 関係 R が関数の場合, $aRb \iff R(a) = b$ によって, R を通常の関数 $R : A \longrightarrow B$ とみなせる.（⇒ 3 章） この同一視により, 関係の集合は関数の集合を含んでいると考えられる.

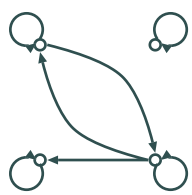
(note) 全単射は, ここでの全射かつ単射の意味ではないことに注意する.（正しくは全射かつ単射かつ関数） 全単射のことを 1 対 1 対応または双射ともいう.

(note) 単射的と関数的は互いに R の左右を逆にした性質であることに注意する. したがって, 単射の逆関係は関数的であり, 関数的関係の逆関係は単射である. 同様のことが, 左全域的と全射的についても言える. したがって, また同様のことが, 関数と単射的かつ全射的な関係についても言えるわけである. さらに, 1 対 1 の関係の逆関係は 1 対 1 であり, 双全域的関係の逆関係も双全域的である. 1 対 1 対応についても同様である.

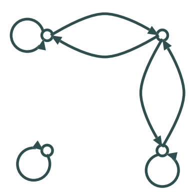
(ex6) (1) 1 対 1 対応が関数であることを示せ. (2) 各性質（あるいはいくらかの性質）を持つ関係の例をあげてみよ. (3) 関数の逆関係はどんな関係か.

- 6 -（集合上の関係の性質）A 上の関係のうち, 特に $\{(a,a) \mid a \in A\}$ を恒等関係という. また, $A \times A$, $\emptyset$ をそれぞれ全体関係, 空関係という. さらに A 上の関係 R については, 以下の性質がよく問題とされる.[2]

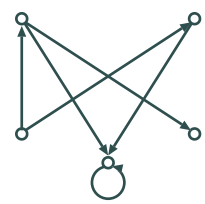
性質	定義	ダイグラフ
反射的	任意の $a \in A$ に対して aRa	すべての頂点にループがある.
対称的	$aRb \Rightarrow bRa$	1 つの弧のみで（片方向に）結ばれた異なる 2 頂点の組は存在しない.
反対称的	aRb かつ $bRa \Rightarrow a = b$	2 つの弧で（両方向に）結ばれた異なる 2 頂点の組は存在しない.
推移的	aRb かつ $bRc \Rightarrow aRc$	図の中の 2 つの弧を合成したものは必ずまた図の中に存在している.



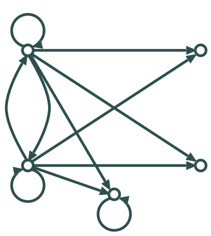
reflexive



symmetric



anti-symmetric



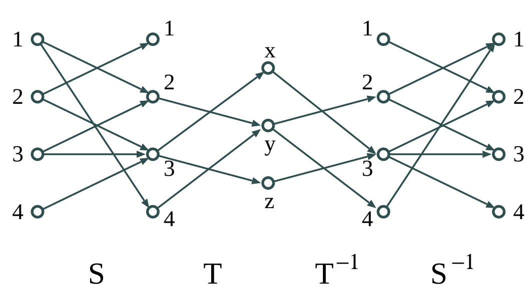
transitive

(note) a から b への弧と b から c への弧を合成すると, a から c への弧が得られると定義する.

(ex7) (1) $A = \{a,b,c,d\}$ とする. 上の 4 つの性質について, 各性質（あるいはいくらかの性質）を持つ A 上の関係をあげてみよ. (2) R が対称的 $\iff$ M_R が対称行列 を示せ.

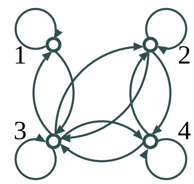
(ex8) (ex2) の R, S, T に対して次の関係をダイグラフで表し, それが反射的, 対称的, 反対称的, 推移的うちのどの性質を持つかをいえ. (1) $STT^{-1}S^{-1}$. (2) RSR^{-1}.

(ans) (1) 以下の図より,



[2] これ以外にも, 非反射的 ($a \in A \Rightarrow a \not R a$), 余反射的 ($aRb \Rightarrow a = b$), 非対称的 ($aRb \Rightarrow b \not R a$), 完全 ($a, b \in A \Rightarrow aRb$ または bRa), 三分的（任意の $a, b \in A$ に対して, aRb, bRa, $a = b$ のうちの 1 つだけがなりたつ）, ユークリッド的 (aRb かつ $aRc \Rightarrow bRc$ (かつ cRb)) などがある. 非対称的は, 反対称的かつ非反射的と同値である.

$STT^{-1}S^{-1} = \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$ を得る. これをダイグラフで表すと,



となる. この関係は, 反射的, 対称的.

- 7 -（分割）集合 A の分割とは, A の空でない部分集合からなる集合 $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_s\}$ であって, 次をみたすもののことである.

$$\begin{aligned} &A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_s \\ &A_i \cap A_j = \emptyset \qquad (i \neq j) \end{aligned} \tag{13}$$

各 A_i をこの分割の細胞という. $A = \{a, b, c\}$ に対しては, $\{\{a, b, c\}\}$, $\{\{a, b\}, \{c\}\}$, $\{\{a, c\}, \{b\}\}$, $\{\{b, c\}, \{a\}\}$, $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ の 5 つの分割がある. ある集合からその分割を作ることを, その集合を分割するという. n 元集合 A に対して, その分割の総数は n によって決まる. その数をベル数といい, B_n で表す.（⇒ 9 章）

(ex9) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とするとき, 3 つの細胞からなる A の分割はいくつあるか. (25)

- 8 -（同値関係）反射的 かつ 対称的 かつ 推移的な関係を同値関係という. R を A 上の同値関係とするとき[3], A の元 a と関係 R にある元全体の集合を A の（A における a の）同値類といい, $[a]$ で表す. すなわち,

$$[a] = \{x \in A \mid xRa\}. \tag{14}$$

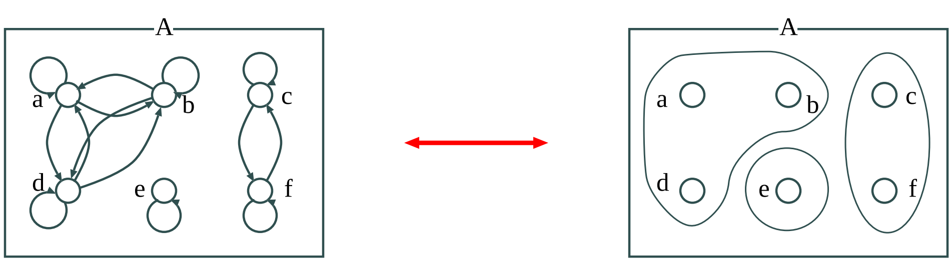
同値類は次の性質を持つ.

$$\begin{gathered} a \in [a] \\ [a] \cap [b] \neq \emptyset \iff aRb \iff [a] = [b] \\ x \in [a] \iff [a] = [x] \end{gathered} \tag{15}$$

これより, A の同値類たちをあげていくと, 同じものを除けばどの 2 つも共通部分がないことがわかる. ゆえに, A の同値類たちによって, A の分割:

$$\{[a] \mid a \in A\} \tag{16}$$

が得られる. これを R による A の商集合といい, A/R で表す. 逆に A の分割から同値関係を構成することもできる. それは, 分割の各細胞の中で全体関係になっていて, 異なる細胞間では全く関係を持たないような関係である. この操作は同値関係から分割を作るのと全く逆の操作になる. こうして, A 上の同値関係たちから, A の分割たちへの 1 対 1 対応が構成される.（図は $A/R = \{\{a, b, d\}, \{c, f\}, \{e\}\}$ となる例である.）



an equivalence relation R　　　　a partition A/R of A

[3] 同値関係はしばしば記号 $\sim$ で表される.

この 1 対 1 対応から, 次が得られる.

(T4) A を有限集合とするとき, A 上の同値関係の総数と A の分割の総数は等しい.

- 9 -（順序関係）反射的 かつ 反対称的 かつ 推移的な関係を, 順序関係あるいは順序という. 順序は通常 $\leq$ で表す. 集合 P 上の順序が与えられたとき, P を（その順序に関する）順序集合という. これについては 11 章で詳しく論ずる.

- 10 -（関係の個数）A を m 元集合, B を n 元集合とするとき, A から B への関係の個数を考えよう. 関係は $A \times B$ の部分集合なので, 関係の個数は部分集合の個数になる. 部分集合は, 1 章で見たように, $A \times B$ の各元を選ぶかどうかを決めれば決定するので, 部分集合の個数は $2^{|A \times B|} = 2^{mn}$ となる. 特に A 上の関係の個数は 2^{m^2} である. 以下, A 上の種々の性質を持つ関係の個数を考えよう.

（反射的）反射的な関係は, 必ず (a, a) の形の元を含むので, それ以外の元を含むかどうかを決めれば決定する. よってその総数は $2^{m^2 - m}$.

（対称的）対称的であれば, 異なる 2 頂点について, 両方向の弧で結ばれるか全く弧で結ばれないかのいずれかである. また各頂点について, ループを持つか持たないかのいずれかである. ゆえに対称的な関係の総数は, $2^{\binom{m}{2} + m}$ となる.

（反対称的）反対称的ならば, 異なる 2 頂点について, 弧がないか, あるとすればどちら向きかの計 3 通りの可能性がある. また各頂点について, ループを持つか持たないかのいずれかである. ゆえに反対称的な関係の総数は, $3^{\binom{m}{2}} \cdot 2^m$ となる.

（同値関係）(T4) より, A 上の同値関係の個数 $e(m)$ は, A の分割の総数 B_m と一致する. よって, $e(1) = 1$, $e(2) = 2$, $e(3) = 5$, $e(4) = 15, \ldots$ である.

3章　関数, 1対1対応, 濃度

☆8☆

キーワード: 関数, 始域, 終域, 像, 逆像, 全射, 単射, 1 対 1 対応, 合成,
制限, 拡張, 逆関数, 関数の個数, 濃度, 基数, 対角線論法

- 1 -（関数）A, B を集合とするとき, A から B への関数または写像

$$f : A \longrightarrow B \tag{1}$$

とは, A の各元 x に対し, x を B のただ1つの元 $f(x)$ に対応させる規則 f のことである. A を f の始域（定義域）といい, B を f の終域という. B の部分集合

$$\{f(x) \mid x \in A\} \tag{2}$$

のことを f の像といい, $\mathrm{Im}\,(f)$ または $f(A)$ で表す. $x \in A$ に対して $f(x)$ を f による x の像という. より一般に A の部分集合 A' に対して,

$$f(A') = \{f(x) \mid x \in A'\} \tag{3}$$

を f による A' の像という. また, $y \in B$ に対して

$$f^{-1}(y) = \{x \in A \mid f(x) = y\} \tag{4}$$

を f による y の逆像という. B の部分集合 B' に対して,

$$f^{-1}(B') = \{x \in A \mid f(x) \in B'\} \tag{5}$$

を f による B' の逆像という. A から A への関数のことを A の変換ともいう.

2つの関数 f, g が等しい, すなわち

$$f = g \tag{6}$$

がなりたつとは, f, g が共通の始域（それを A とする）と共通の終域を持ち,

$$f(x) = g(x) \qquad (x \in A) \tag{7}$$

をみたすことであると定義する.

関数 $f : A \longrightarrow B$ に対して, 集合 $\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ を f のグラフという. A, B が $\mathbf{R}$ の部分集合のとき, グラフは座標平面上の点集合（通常は曲線）で表される.

- 2 -（全射と単射）関数 $f : A \longrightarrow B$ が以下の各条件をみたすとき, 各々 全射, 単射, 全単射という.

(i)（全射）B の任意の元 y に対して, A のある元 x が存在して, $f(x) = y$ をみたす.

(ii)（単射）$x, x' \in A$ のとき, $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.

(iii)（全単射）f が全射でありかつ単射でもある.

全射の条件は, $f(A) = B$ と同値. 単射の条件は, $x, x' \in A$ のとき, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ と同値. 全単射のことを1対1対応または双射ともいう.

　A の変換 f が, すべての $x \in A$ に対して $f(x) = x$ をみたすとき, f を A 上の恒等関数（恒等変換）といい, id_A, id, 1_A または 1 で表す．恒等関数は 1 対 1 対応の最も簡単な例である．

(ex1) $f(x) = x^2$ について, 始域 A および終域 B が次の各々の場合, f が全射, 単射, 1 対 1 対応のうちのどれであるかを答えよ．ただし, $\mathbf{R}_0 = \{$ 非負実数全体 $\}$ とする．

(1) $A = B = \mathbf{R}$.　(2) $A = \mathbf{R}$, $B = \mathbf{R}_0$.　(3) $A = \mathbf{R}_0$, $B = \mathbf{R}$.　(4) $A = B = \mathbf{R}_0$.

- 3 -（合成）A, B, C を集合とし, A から B への関数 f と B から C への関数 g があるとき, f と g の合成 $g \circ f$ を

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \qquad (x \in A) \tag{8}$$

で定義する．これは A から C への関数とみなされる．さらに集合 D と C から D への関数 h があるとき,

(T1) 合成に関する結合律:

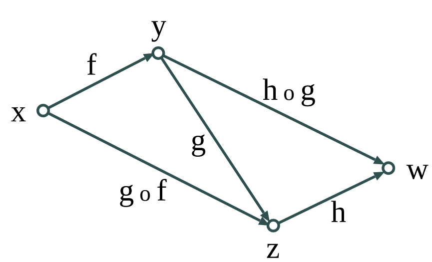
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \tag{9}$$

がなりたつ．

($\because$) 左辺および右辺は共通の始域 A と共通の終域 D を持つ．次に任意の $x \in A$ を取る．$f(x) = y$, $g(y) = z$, $h(z) = w$ とおく．

$$\begin{aligned}
&(h \circ g) \circ f(x) = h \circ g(f(x)) = h \circ g(y) = h(g(y)) = h(z) = w. \\
&h \circ (g \circ f)(x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x))) = h(g(y)) = h(z) = w. \\
&\therefore\ (h \circ g) \circ f(x) = h \circ (g \circ f)(x).
\end{aligned} \tag{10}$$

x は任意だったので, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.　(q.e.d.)



　関数 $f : A \longrightarrow B$ および 恒等関数に対して, 明らかに次がなりたつ．

$$1_B \circ f = f, \qquad f \circ 1_A = f \tag{11}$$

(T2) (i) 全射の合成はまた全射になる．(ii) 単射の合成はまた単射になる．(iii) 1 対 1 対応の合成はまた 1 対 1 対応になる．

(ex2) これを示せ．

($\because$) (i) $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ を全射とする．任意の $z \in C$ を取る．g が全射なので, $y \in B$ が存在して $g(y) = z$. f が全射なので, $x \in A$ が存在して $f(x) = y$.　$\therefore$ $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. ゆえに $g \circ f$ は全射である．(q.e.d.)

(ii) $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ を単射とする．$x, x' \in A$ を異なる 2 元とする．f が単射だから, $f(x) \neq f(x')$. g が単射だから, $g \circ f(x) = g(f(x)) \neq g(f(x')) = g \circ f(x')$. ゆえに $g \circ f$ は単射である．(q.e.d.)

(iii) (i),(ii) より明らか．(q.e.d.)

- 4 -（関数の制限と拡張）関数 $f : A \longrightarrow B$ および $S \subset A$ に対して, f の S への制限 $f|_S$ とは, 関数 $f|_S : S \longrightarrow B$ であって, $f|_S(x) = f(x)$ $(x \in S)$ をみたすもののことである. g が f の適当な集合への制限であるとき, f を g の拡張という.

- 5 -（逆関数）A から B への関数 f に対し, 次をみたすような B から A への関数 g を f の逆関数といい, f^{-1} で表す.

$$g \circ f = 1_A, \qquad f \circ g = 1_B \tag{12}$$

この定義からわかるように, $g = f^{-1}$ であると同時に, $f = g^{-1}$ である. すなわち, f, g は互いに他の逆関数になる. ゆえに $(f^{-1})^{-1} = f$ となる. また, f の逆関数は存在するとすればただ 1 つである. なぜならば, もし $g, \tilde{g}$ が f の逆関数とすると,

$$\begin{aligned} &(g \circ f) \circ \tilde{g} = 1_A \circ \tilde{g} = \tilde{g} \\ &g \circ (f \circ \tilde{g}) = g \circ 1_B = g \\ &\therefore\ \ g = \tilde{g}. \end{aligned} \tag{13}$$

(T3) (i) 1 対 1 対応 f にはその逆関数 f^{-1} が存在する. (ii) 逆に, f に逆関数が存在すれば, f は必然的に 1 対 1 対応でなければならない. (iii) g がある関数の逆関数ならば, g は 1 対 1 対応である.

(∵) (i) $f : A \longrightarrow B$ を 1 対 1 対応とする. 任意の $y \in B$ を取る. f は全射なので,

$$f(x) = y \tag{14}$$

をみたす $x \in A$ が存在する. ところが, f が単射なのでこのような x はただ 1 つしか存在しない. ゆえに y を決めれば x が決まり,

$$x = g(y) \tag{15}$$

と関数 $g : B \longrightarrow A$ を定義できる. このとき,

$$f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x) = y \tag{16}$$

であり, また任意の $x \in A$ に対して, $f(x) = y$ とおけば,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x. \tag{17}$$

ゆえに, $g = f^{-1}$. (q.e.d.)

(ii) f の逆関数 g が存在するとする. 任意の $y \in B$ を取る. $x = g(y)$ とおけば, $f \circ g(y) = f(x) = y$ となるので, f は全射である. 次に $x, x' \in A$ に対して, $f(x) = f(x')$ とすると, $g(f(x)) = g(f(x'))$. $\therefore$ $x = x'$. ゆえに f は単射である. これらより, f は 1 対 1 対応である. (q.e.d.)

(iii) そもそも $g = f^{-1}$ には f という逆関数がある. よって (ii) より g は 1 対 1 対応となる. (q.e.d.)

(T4) $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ が 1 対 1 対応のとき, 次がなりたつ.

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \tag{18}$$

同様にして, s 個の 1 対 1 対応の合成について,

$$(f_s \circ \cdots \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ \cdots \circ f_s^{-1}. \tag{19}$$

(ex3) これを示せ.

(note) - 1 - で見たように, f による B' の逆像 $f^{-1}(B')$ は任意の関数 f で定義できるが, 逆関数 f^{-1} が存在しているとは限らない. f^{-1} が存在するとき, f による B' の逆像は f^{-1} による B' の像と一致する.

- 6 -（関数の個数）A, B を有限集合, $|A| = m$, $|B| = n$ として, A から B への関数の個数を考えてみよう. A の各元に対して, これを B の元に対応させる方法は n 通りずつある. そして $|A| = m$ なので, 関数の個数は $\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{m} = n^m$ になる.

次に A から B への単射 f の個数を考えよう. ただし $m \leq n$ とする. それには f の像 $f(A)$ が何かで分類してやるとよい. 可能性として, B から m 元選んでそれを $f(A)$ とすることが考えられ, このとき A から $f(A)$ への単射の数は $m!$ である. よって単射の総数は, $\binom{n}{m} m! = \frac{n!}{(n-m)!}$.

別の考え方として, A の元を順に B に対応させていく方法もある. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ として, a_1 は n 通りの対応の仕方があり, 次に a_2 は a_1 と異なる元に対応させるので, $n-1$ 通りのやり方がある. これを繰り返して, 単射の総数は $n(n-1)\ldots(n-m+1)$ になる. これは上の結果と一致する.

特に $m = n$ として, A から B への 1 対 1 対応の個数は $m!$ になる.

最後に A から B への全射 f の個数を考えよう. ただし $m \geq n$ とする. 一般に, 集合 X の分割に対して, その細胞を任意に 1 列に並べたもの $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ を X の順序分割という.（⇒ 9 章） さて, f により B の各元 b_i $(i = 1, \ldots, n)$ には必ず A のいくらかの元が対応している. そこで, $A_i = f^{-1}(b_i)$ とし, それらを 1 列に並べてやると, $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ という形の A の順序分割が得られる. 逆に, 順序分割 $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ から, $f(A_i) = b_i$ によって全射 f を構成することもできる. この構成は全射から順序分割を作るのと全く逆の操作になる. こうして 1 対 1 対応

$$\{A \text{ から } B \text{ への全射全体}\} \longrightarrow \{A \text{ を } n \text{ 個に分ける順序分割全体}\} \tag{20}$$

が得られる. これより,

$$(A \text{ から } B \text{ への全射の数}) = (A \text{ を } n \text{ 個に分ける順序分割の数}) \tag{21}$$

を得る. これに基づいて全射の数を計算できる.

(ex4) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ のとき, (1) A から B への関数, (2) 全射, および, (3) B から A への単射の個数を求めよ.

(ans) (1) $3^4 = \boxed{81}$.

(2) 全射の数は A の順序分割 (A_1, A_2, A_3) の数に等しい. $|A_1| = 2$ のときは $|A_2| = |A_3| = 1$ になり, このときの順序分割の数は, $\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = \frac{4!}{2!1!1!} = 12$. $|A_2| = 2$ のとき, $|A_3| = 2$ のときも同様なので, 全射の総数は $12 \times 3 = \boxed{36}$.

(3) $\binom{4}{3} 3! = \boxed{24}$. あるいは, $4 \cdot 3 \cdot 2 = \boxed{24}$.

- 7 -（濃度と基数）有限集合 A の濃度とは, その元の個数 $|A|$ のことである. 無限集合の場合も含めて, 一般に集合 A の濃度を $|A|$ で表すことにする. 無限集合の濃度は $|A| = \infty$ となりそうであるが, ∞ 同士でもランクを作り, 区別するのが無限集合の濃度の考え方である. その方法は次のような簡単な規則による.

A から B への 1 対 1 対応が存在するとき, これらの濃度は同じとみなす

特に, $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ に対して, $|\mathbf{N}| = \aleph_0$ と定義する.

$\mathbf{N}$ から整数の集合 $\mathbf{Z}$ への 1 対 1 対応が存在するので, $|\mathbf{Z}| = \aleph_0$ である.

(ex5) その 1 対 1 対応を求めよ.

(ans) 答の一例を示す. $\mathbf{N}$ を奇数と偶数に分ける. $1, 3, 5, 7, \ldots$ は, $0, 1, 2, 3, \ldots$ に対応させ, $2, 4, 6, 8, \ldots$ は, $-1, -2, -3, -4, \ldots$ に対応させる. すなわち, $f(2n-1) = n-1$, $f(2n) = -n$ とすれば, 1 対 1 対応を構成できる. これより, $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & (x \text{ は奇数}) \\ -\frac{x}{2} & (x \text{ は偶数}) \end{cases}$.

　ある集合の濃度になるものを基数という. たとえば, $\{1, 2\}$ の濃度は 2 という基数である. 有限集合の濃度を有限基数という. これは非負整数に他ならない. 無限集合の濃度を無限基数という.

(T5) 以下がなりたつ.

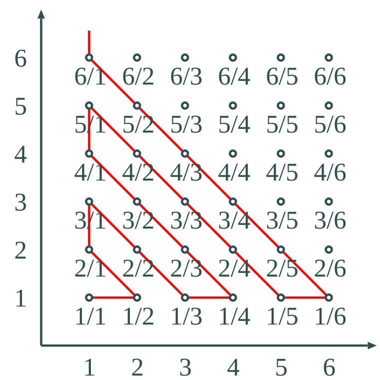
1: 正の偶数の集合や正負を含めた奇数の集合など, 整数の無限部分集合の濃度はすべて $\aleph_0$ である.

2: 有理数の集合 $\mathbf{Q}$ についても, $|\mathbf{Q}| = \aleph_0$ である.

3: 成分を整数とする行列の集合 M の濃度も $\aleph_0$ である.

4: 濃度が $\aleph_0$ である集合を可算無限集合という.

5: 実数の区間 $(0, 1)$, 実数の集合 $\mathbf{R}$ や複素数の集合 $\mathbf{C}$ は可算無限集合ではない. これらは同じ濃度を持ち, それを $\aleph_1$ と呼ぶ.



($\because$) 2: $\mathbf{Q}^+ = \{$ 正の有理数全体 $\}$ とおく. まず, $\mathbf{N}$ から $\mathbf{Q}^+$ への 1 対 1 対応を作る. 図のように $\mathbf{Q}^+$ の元を平面上に配置する. このとき, 1/1 から出発して, すべての正の有理数に図のような順番で 1 から順に番号をつけていくことができる. ただし, 同じ値の有理数が再登場してきたときは, その有理数は飛ばすことにする. こうすると, すべての正の有理数に重複無く番号がつけられ, それは $\mathbf{N}$ から $\mathbf{Q}^+$ への 1 対 1 対応を示している. そこで $\mathbf{N}$ から $\mathbf{Q}$ の場合は, 今の方法を次のように少し変形する. はじめに 0 に番号 1 をつけて, その後の有理数については基本的に上述の方法に従うが, 正負の有理数 $\pm p/q$ は組にして, 2 つずつまとめて番号をつけていくことにする. こうして $\mathbf{N}$ から $\mathbf{Q}$ への 1 対 1 対応を構成できた. (q.e.d.)

- 8 - (対角線論法) 実数の区間 $(0, 1)$ が $\mathbf{N}$ と同じ濃度を持たないことは, 以下の対角線論法と呼ばれる証明法で示される.

(T6) $\mathbf{N}$ から $(0, 1)$ への 1 対 1 対応は存在しない.

($\because$) 背理法による. $\mathbf{N}$ から $(0,1)$ への 1 対 1 対応 f が存在したとする. $x = 1, 2, 3 \ldots$ に対して, $f(x)$ をかいた表を作る.

$$\begin{array}{c|cccccc}
x & & & f(x) & & & \\
\hline
1 & 0. & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\
2 & 0. & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\
3 & 0. & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\
4 & 0. & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\
 & \cdots & & & \cdots & & \\
n & 0. & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots \\
 & \cdots & & & \cdots & &
\end{array} \tag{22}$$

ここで $(0,1)$ の元の表示は, たとえば 0.25 であれば, 0.24999... というように表示するものとする. さて, $y = 0.b_1 b_2 b_3 \cdots$ を次のように定義する.

$$b_i = \begin{cases} 2 & (a_{ii} = 1) \\ 1 & (a_{ii} \neq 1) \end{cases} \tag{23}$$

このとき, f は 1 対 1 対応なので, $(0,1)$ の元 y に対してある正整数 n が存在して, $f(n) = y$ となるはずである. しかし, y の小数第 n 位を $f(n)$ と比較すると,

$$\begin{array}{lclllll}
y & = & 0. & b_1 & b_2 & \cdots & b_n & \cdots \\
f(n) & = & 0. & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \cdots
\end{array} \tag{24}$$

ここで b_n の定義より $b_n \neq a_{nn}$ なので, $y \neq f(n)$ となってしまい矛盾する. (q.e.d.)

この定理より, ただちに $\mathbf{N}$ から $\mathbf{R}$ への 1 対 1 対応が存在しないこともわかる. なぜならば, もし存在すれば, $\mathbf{R}$ から $(0,1)$ への 1 対 1 対応と合成して, $\mathbf{N}$ から $(0,1)$ への 1 対 1 対応を構成できてしまうからである. それはこの定理に反する.

(ex6) $\mathbf{R}$ から $(0,1)$ への 1 対 1 対応を構成せよ.

メモ : $\aleph$ とはヘブライ語の A に当たる文字である.

4章 行列, 1次方程式系, 行列式

☆☆☆

- 1 -	行列:	線形代数ハンドアウト 5章 を参照のこと
- 2 -	1次方程式系:	線形代数ハンドアウト 6章 を参照のこと
- 3 -	行列式:	線形代数ハンドアウト 7章 を参照のこと

5章 グラフ理論の要点

☆ 14 ☆

キーワード: グラフ, 頂点, 辺, 隣接, 接続, 多重グラフ, 部分グラフ, 同型, 次数, 歩道,
小道, 道, 回路, サイクル, 連結性, 切断点, 橋, 距離, 直径, オイラー多重グラフ, ハミルトングラフ,
完全グラフ, 完全 s 部グラフ, サイクルグラフ, 木, 隣接行列, 分解と因子

- 1 -（グラフの定義）頂点の集合（頂点集合）V と辺の集合（辺集合）E の組 $G = (V, E)$ をグラフという. ここで, 辺とは 2 つの異なる頂点 u, v の組合せ $\{u, v\}$ であり, 可能な 2 頂点の組合せの中から, いくらかを辺として選ぶものとする. V, E は $V(G), E(G)$ とも表記し, それぞれ G のすべての頂点, すべての辺から構成される. グラフは頂点（小さい円かドット）を線で結んだ図を描いて表示する. ここで, 頂点 u, v を結んだ線は辺 $\{u, v\}$ と同一視される. すべての頂点と辺が描かれていれば, 頂点の位置は任意でよく, 辺は曲線であってもよい. また, 辺同士が交差しても差し支えない. V は通常空ではないとされるが, E は空であってもよい. V が有限集合であるとき, G を有限グラフといい, そうでないとき無限グラフという. ここでは特に断らない限り, グラフと言えば有限グラフを指すことにする.

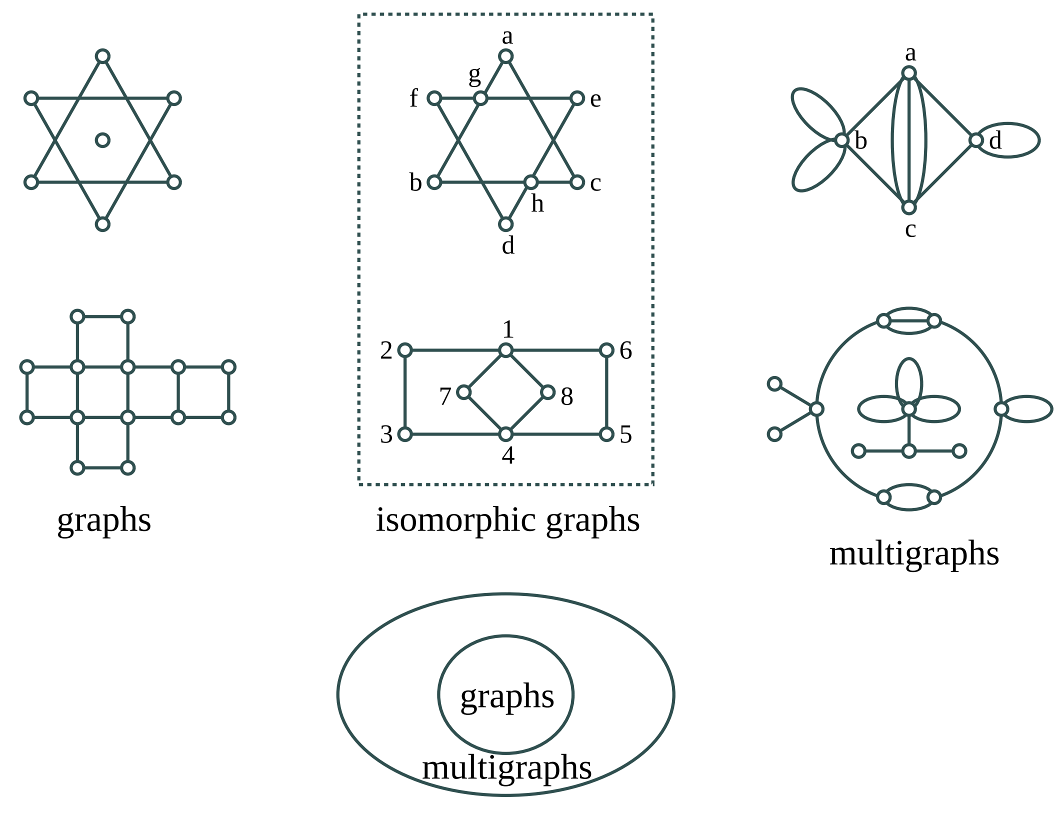


Figure 1: Graphs and multigraphs

- 2 -（隣接）グラフ G において, 2 つの異なる頂点 u, v を結ぶ辺 $e = \{u, v\}$ が存在するとき, u と v は隣接するといい, u, v をそれぞれ e の端 (頂) 点, u, v をまとめて e の両端点という. このとき, e は u と v に接続するといい, あるいは u と v は e に接続するともいう. また, 2 つの異なる辺 e, f が共通の端点を持つとき, e と f は隣接するという.

- 3 -（多重グラフ）2 つの頂点を 2 本以上の辺で結んだとき, それらの辺を多重辺という. 1 つの頂点から出てその頂点へ戻る辺はループといい, これは端点が 1 つの辺である. 1 つの頂点に 2 つ以上のループがあるときは, それらを多重ループという. グラフにおいては, - 1 - よりこれらの構造は許されない. このような構造を許す拡張されたグラフを多重グラフと呼ぶ. 多重グラフの概念の中には, グラフが含まれている と考える.

多重グラフはグラフの図を拡張した概念であって, これに対して - 1 - と同様の定義を与えるには注意が必要である. まず, 多重グラフの多重辺の 1 つ 1 つ[1] は異なる辺とみなして別々の名前を与え, u, v を両端点とする多重辺の 1 つの名前が e であれば, $e : \{u, v\}$ と表すことにする. ただし, 紛れのない場合には, グラフ同様多重辺の 1 つを $\{u, v\}$ のように表記することがある. u を端点とするループについては, $\{u, u\} = \{u\}$ のように表記する. 多重ループも 1 つ 1 つを異なる辺とみなして別々の名前を与えるが, 紛れのない場合は $\{u\}$ のように表す. 多重グラフを頂点集合 V と辺集合 E の組として $G = (V, E)$ とかくときは, E に属する多重辺, 多重ループは本来の表記として, $e : \{u, v\}$, $f : \{u\}$ のように表すべきであるが, 簡単のため,

$$E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}, \{a, c\}, \{a, c\}, \{a, c\}, \{b\}, \{b\}, \{d\}\} \tag{1}$$

のように, 辺の名前を省略して多重集合[2] として E を表すこともある. これは, Figure 1 の右上の多重グラフの辺の多重集合である.

多重グラフでは, ループも辺の一種であり, 多重辺や多重ループは, (両) 端点が共通な辺の集合である. 辺はその端点に（あるいは端点は辺に）接続するという. 多重グラフの辺 $\{u, v\}$ が少なくとも 1 つ存在するとき, 頂点 u, v は隣接するという. 特に, ループ $\{u\}$ が存在するとき, u は u 自身と隣接するという. 2 つの異なる辺が少なくとも 1 つの共通の端点を持つとき, それらは隣接するという.

多重グラフが有限個の頂点と辺を持つとき, これを有限多重グラフといい, そうでないとき, 無限多重グラフという. グラフ同様, ここでは特に断らない限り, 多重グラフと言えば有限多重グラフを指すことにする.

- 4 -（部分グラフ）$G = (V, E)$ をグラフとする. V, E それぞれの部分集合 V', E' を取って作ったグラフ $G' = (V', E')$ を G の部分グラフという. ただし, E' は両端点が V' に属する辺のみを含むものとする. V' を指定したとき, E' を最大とする部分グラフ $G' = (V', E')$ は V' によりただ 1 つに定まる. この G' を V' から（V' で）誘導される G の部分グラフ（誘導部分グラフ）という. 定義より, G 自身も G の部分グラフであるが, G 以外の G の部分グラフを G の真部分グラフという.

同様にして, 多重グラフ $G = (V, E)$ の部分多重グラフ $G' = (V', E')$ は, V, E それぞれの部分集合 V', E' によって作った多重グラフと考える. ここで, E は集合として表示されているとする. E を多重集合として考えているときは, E' は E の部分多重集合[3] とする. 誘導部分多重グラフも同様に定義する.

- 5 -（同型なグラフ）2 つのグラフ $G = (V, E)$ と $G' = (V', E')$ における頂点の繋がり具合いが完全に一致しているとき, G と G' は同型であるといい, $G \simeq G'$ とかく. グラフの辺を曲げたり伸縮することを許して頂点を動かし変形した結果, グラフを同じにできるときに同型であると考えてよい. 厳密には, V から V' への 1 対 1 対応 φ が存在して次をみたすときに, G と G' は同型であるという.

$$G \text{ において } u, v \text{ が隣接する} \iff G' \text{ において } \varphi(u), \varphi(v) \text{ が隣接する} \tag{2}$$

この φ を G から G' への同型写像という.

[1] 多重辺を構成する要素（辺）の 1 つ（1 つ）のことを, 多重辺の 1 つ（1 つ）ということにする.
[2] 元（要素）の重複回数を考えにいれたものの集まりのこと. $\{2, 3, 3, 3, 5, 5\}$ など.
[3] 多重集合 E に対して, 各元を最大その重複回数まで取ることを許して作った新たな多重集合 E' を E の部分多重集合という.

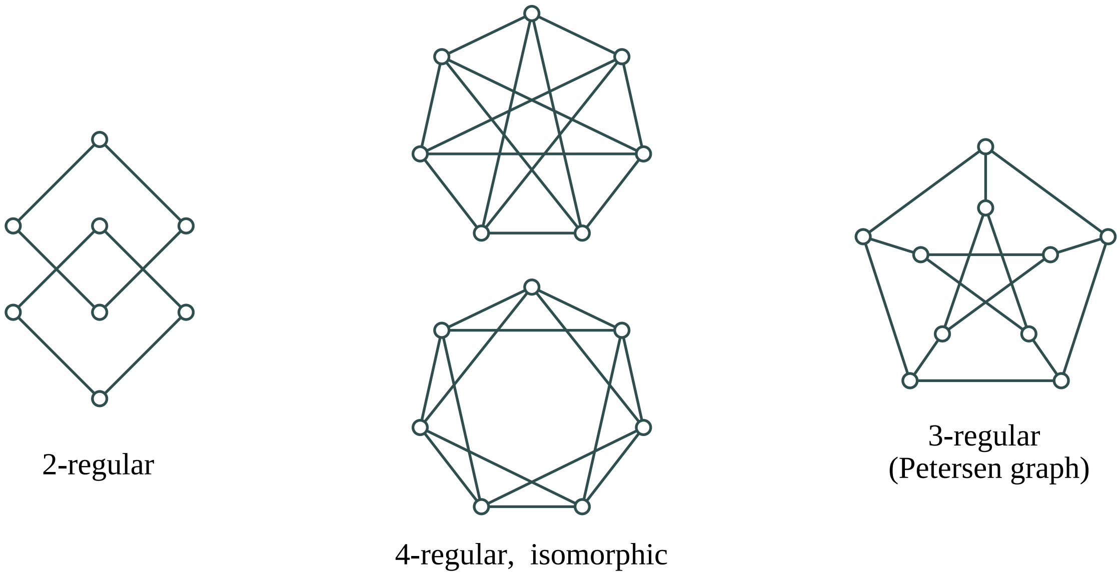


Figure 2: Examples of regular graphs

多重グラフの同型についても, 直感的にはグラフの場合と同様である. 厳密には, 次をみたす 1 対 1 対応 $\varphi : V \longrightarrow V'$ が存在するとき G と G' は同型（$G \simeq G'$）であるといい, φ を G から G' への同型写像という.

$$\begin{array}{ll} (\text{辺 } \{u, v\} \text{ の数}) = (\text{辺 } \{\varphi(u), \varphi(v)\} \text{ の数}) & (u, v \in V,\ u \neq v) \\ (\text{ループ } \{u\} \text{ の数}) = (\text{ループ } \{\varphi(u)\} \text{ の数}) & (u \in V) \end{array} \tag{3}$$

グラフまたは多重グラフの同型については, 次がなりたつ.

$$\begin{array}{l} G \simeq G; \qquad G \simeq G' \iff G' \simeq G \\ G \simeq G',\, G' \simeq G'' \Rightarrow G \simeq G'' \end{array} \tag{4}$$

（これは同型という概念に対してつねになりたつことがらである.）

(ex1) Figure 1 の中央の 2 つのグラフは同型か？ そうならば, 同型写像はどう取ればよいか？

(ans) 同型である. φ は次の通り.（これ以外にもある）

v	a	b	c	d	e	f	g	h
$\varphi(v)$	6	7	5	3	8	2	1	4

(5)

- 6 -（頂点の次数）多重グラフのある頂点 v に接続する辺の数（ループは 1 つで 2 つ分に数える）を v の次数と呼び, $\deg(v)$ で表す. ループでない辺は異なる 2 つの頂点に接続し, ループはただ 1 つの頂点に接続する. したがって, 各頂点の次数を足していくと, 辺が丁度 2 回ずつ数えられていく. ゆえに次の定理を得る.

(T1) 多重グラフ G の頂点を $v_1, v_2 \ldots, v_p$, 辺の数を q とするとき,

$$\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2q. \tag{6}$$

次数が偶数の頂点を偶 (頂) 点, 奇数の頂点を奇 (頂) 点という. 次数 0 の頂点を孤立 (頂) 点という. 孤立頂点 1 つからなるグラフを自明なグラフという. 多重グラフ G において, すべての頂点の次数が等しいとき, G は正則であるといい, 特にすべての頂点の次数が n

であるときは, n-正則であるという．G のすべての頂点の次数を大きい順に（増加しないように）並べたものを, G の次数列という．多重グラフが同型ならば次数列が等しくなるが, 逆はなりたたない.

(ex2) (1) 次数列 2,2,2,2,2,2 を持つグラフで同型でないものを 2 つ求めよ． (2) 次数列 3,3,2,2,1,1 を持つグラフで同型でないものをいくらか求めよ.

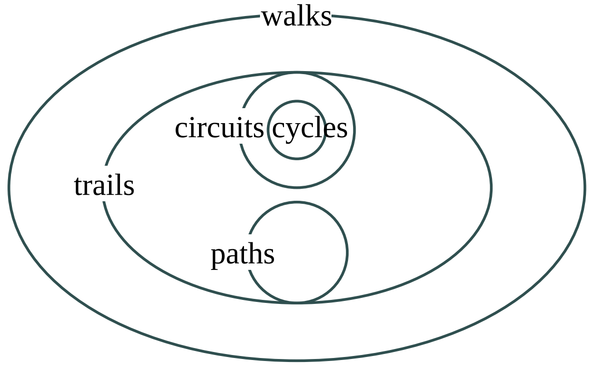


Figure 3:

- 7 -（歩道, 小道, 道）$n \geq 0$ とする．多重グラフ $G = (V, E)$ の頂点と辺の交互の列:

$$w = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{n-1} e_n v_n \tag{7}$$

$(v_0, \dots, v_n \in V;\ e_1, \dots, e_n \in E)$ において, 各 e_i の両端点が v_{i-1} と v_i になるとき（e_i がループのときには, e_i の端点が $v_{i-1} = v_i$ になる）, w を v_0 から v_n への（G の, G 内の）歩道という．ここで, n を w の長さといい, v_0 を w の始点, v_n を w の終点という．歩道においては, 同じ頂点や同じ辺を繰り返し用いても差し支えない．始点と終点が等しい歩道を閉じた歩道という．歩道に対していろいろな制限をつけることで, 以下のような類別を得る.

歩道	制限なし
小道	同じ辺を 2 回以上用いない歩道
道	同じ頂点を 2 回以上用いない歩道
回路	長さが 1 以上の閉じた小道
閉路（サイクル）	始点と終点が同じ以外はすべて頂点が異なる回路

(note) 長さ k の閉路を k-閉路（k-サイクル）という.

(note) (i) 道は小道であり, 小道は歩道である．(ii) サイクルは回路である．(iii) グラフにおいては, サイクルの長さは 3 以上である．多重グラフでは 1-サイクル, 2-サイクル もあり得る.

(note) すべての頂点を用いる, 含む, 通るということを, 全域という言葉で表す．たとえば全域歩道はすべての頂点を用いる（通る）歩道である．また, G の全域部分グラフといえば, G のすべての頂点を用いる（含む）部分グラフとなる.

(note) 紛れのない場合には, 歩道を頂点列または辺の列で表すことがある.

(note) 具体的にかく必要がないときは, u から v への歩道を $u \longrightarrow v$ で表すことがある.

(note) u から v への歩道は, u, v を結ぶ歩道, u, v 間の歩道などともいう．小道, 道の場合も同様.

(ex3) Figure 1–2 の各グラフの歩道, 小道, 道, 回路, サイクルをいくらかあげてみよ.

(ex4) サイクルの定義を "始点と終点が同じ以外はすべて頂点が異なる, 長さ 1 以上の閉じた歩道" とするのは厳密には間違いである．なぜか？

明らかに次がなりたつ.

(T2) 多重グラフ内に u から v への歩道があるとき, これを寄り道せずに行けば,（近道すれば）u から v への道ができる.

(T2') 多重グラフ内に辺 e を通る回路があるとき, これを寄り道せずに行けば,（近道すれば）e を通るサイクルができる.

- 8 -（連結性）多重グラフ G の任意の (異なる)2 頂点の間に道が存在するならば, G は連結であるという．連結でないとき, 非連結という．括弧内 "異なる" はなくても定義として同値である．直感的に言うと, G が全体として繋がっているとき連結というのである．ただし, Figure 2, 4 の左のグラフのように, 図が単に重なっているだけでは繋がっているとはみなさない.

G の極大な連結部分多重グラフのことを, G の連結成分という．多重グラフは一般にいくらかの連結成分からなっている．Figure 2 の左のグラフは 2 つの連結成分, Figure 4 の左のグラフは, 2 つの長方形と 1 つの十字の計 3 つの連結成分からなる.

G を連結多重グラフとする．G の 1 つの頂点 v とそれに接続するすべての辺を取り除いた多重グラフ G_1 が非連結になるとき, v を G の切断点という．また, G の 1 つの辺 e を取り除いた多重グラフ G_2 が非連結になるとき, e を G の橋という．Figure 4 の右のグラフは, 3 つの切断点と 2 つの橋を持つ.

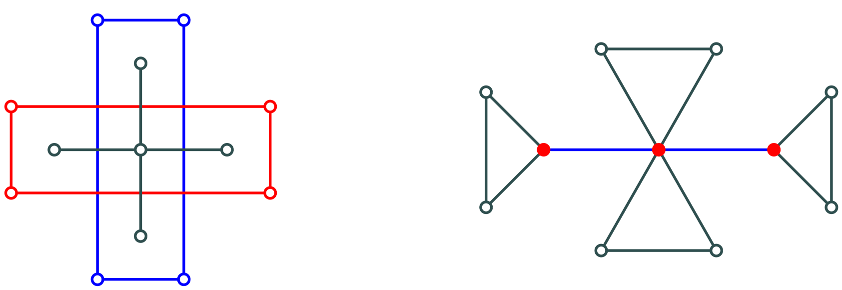


Figure 4:

(ex5) (1) Figure 1 の (多重) グラフのうちでどれが連結か？ またそれぞれの連結成分を示せ．(2) 切断点と橋を 3 つずつ持つグラフを作れ.

(T3) 多重グラフ G が連結でサイクルを持つとき, サイクル上の 1 辺を除いて得られる多重グラフ G' は連結である.

(∵) 多重グラフ G が連結でサイクル C を持つとする．C 上の 1 辺 e を除いて得られる多重グラフを G' とする．G' の任意の異なる頂点 u, v を取る．G は連結なので, u から v への道 w が G 内に存在する．ここで w が e を通っていなければ, w は G' 内にも存在し, u から v への道になる．w が e を通っているとき, e の端点を x, y として,

$$w = u \dots xey \dots v \tag{8}$$

とかける．ここで xey の部分を C 上で遠回りして, $xe_1x_1 \dots x_{n-1}e_ny$ の形に直せば,

$$w' = u \dots xe_1x_1 \dots x_{n-1}e_ny \dots v \tag{9}$$

が得られる．これは e を含まないので, G' 内に存在する．ただし一般には歩道になっているので, w' を近道して, u から v への G' 内の道 w'' を得る．(q.e.d.)

(T3) の証明を見返してみると, サイクルを回路におきかえても何ら変更なくなりたつことがわかる. ゆえに,

(T3') 多重グラフ G が連結で回路を持つとき, 回路上の 1 辺を除いて得られる多重グラフ G' は連結である.

G を連結多重グラフとするとき, (T3) の内容は G のサイクル上の辺は G の橋にはならないということである. 逆に, $e = \{x, y\}$ が G の橋でないとき, e を除いても x, y 間の道があるので, これに e を繋げば G 内に e を通るサイクルができる. これより次を得る.

(T3") G を連結多重グラフとするとき,

$$\begin{array}{lcl} e \text{ がサイクル上にある} & \Longleftrightarrow & e \text{ は } G \text{ の橋でない} \\ e \text{ がサイクル上にない} & \Longleftrightarrow & e \text{ は } G \text{ の橋である} \end{array} \tag{10}$$

- 9 -（距離と直径）多重グラフの頂点 u, v 間の距離とは, u から v への最短道の長さであり, $d(u, v)$ で表す. ただし, u から v への道がないときは, $d(u, v) = \infty$ とする. ここで定義された距離は, 次の距離の公理をみたす.

$$\begin{array}{l} d(u,v) \geq 0 \\ d(u,v) = 0 \iff u = v \\ d(u,v) = d(v,u) \\ d(u,x) \leq d(u,v) + d(v,x) \end{array} \tag{11}$$

ここで, ∞ の計算や大小関係については, 次のように定義する. s を任意の整数とするとき, $\infty > s$, $\infty + s = \infty$, $\infty + \infty = \infty$.

多重グラフ G の直径とは, 2 頂点間の距離の最大値のことであり, $\mathrm{diam}(G)$ で表す. 非連結の場合, 直径は ∞ である.

(ex6) (1) (11) を示せ. (2) Figure 1 中央, Figure 2 の中央と右, Figure 4 の右のグラフの直径を求めよ. (ans) 順に, 3,2,2,4.

- 10 -（オイラー多重グラフ）多重グラフ G のすべての辺を通る小道をオイラー小道といい, それが存在する多重グラフを周遊可能という. G のすべての辺を通る閉じた小道をオイラー回路といい, それが存在する多重グラフをオイラー多重グラフという. オイラー回路が存在するグラフをオイラーグラフという. オイラー回路は回路という名前がついているが, 長さについては条件はないので, 長さ 0 でもよいことに注意する.

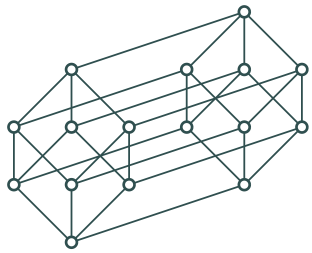
(T4) G を連結 (多重) グラフとするとき,

$$G \text{ がオイラー (多重) グラフ} \iff G \text{ が奇頂点を持たない} \tag{12}$$

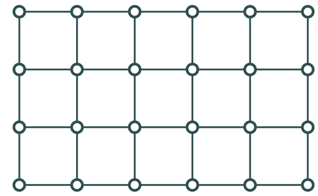
$$G \text{ が周遊可能} \iff G \text{ の奇頂点が 0 個か 2 個} \tag{13}$$

($\because$) (12) ($\Rightarrow$) G をオイラー多重グラフとし, そのオイラー回路を w とする. 任意の頂点 v を取り, この頂点の次数を考える. v が w の始点 (= 終点) でないとする. w はオイラー回路なので, w が v を通過する度に v に接続する辺を 2 つずつ消費し,[4] 最終的にはすべて使い尽くす. ゆえに, v の次数は偶数でなければならない. v を 1 回も通過しないのであれば, v は孤立頂点でやはり次数は 0(偶数) である. v が w の始点 (= 終点) のときは, w ははじめに v に接続する辺を 1 つ消費し, 以後 v を通過する度に 2 つずつ消費して, 最後に v で終わるときに 1 つ消費する.（w の長さが 0 のときは, v は孤立頂点である.）ゆえにこの場合も v の次数は偶数になる. したがって, G は奇頂点を持たない. (q.e.d.)

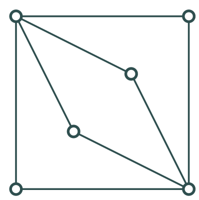
[4] ループについては頂点から出るときに 1 つ, 入るときにまた 1 つとして 2 重に数える.



an Eulerian and Hamiltonian graph



a Hamiltonian graph



an Eulerian graph

Figure 5:

(∵) (12) ($\Leftarrow$) G が連結かつ奇頂点を持たないとする．G 内に最長の閉じた小道 w を取る．すると, w はオイラー回路になることを背理法で示す．w がオイラー回路でないとする．このとき w が通らない辺が存在するが, そのような辺の中で, w が通る頂点に接続しているもの e が存在することがわかる．なぜならば, もしそれがなければ w が通過した頂点は, w が通過していない頂点に道で到達できない．しかるに G は連結だったので, w は全域になる．そうなれば, e が存在することになって矛盾する．そこで, w 上の頂点 u に w が通過しない辺 e が接続しているとする．ue から出発して, w の辺を使わず, できるだけ長い小道 w' を作ってみる．このとき, w' は必ず u に戻ってくる．なぜならば, 各頂点に接続する辺の数は偶数で, そのうち w に使われてしまった辺の数も偶数なので, 各頂点に接続する辺のうち偶数 (0 も含む) 個が使われずに残っている．そして, w' が v に到達したとき, v に接続する辺を 1 つ消費したので奇数個の辺が残っていて, そのうち 1 つを使って w' は次に進むことができる．ゆえに, w' は u に戻るまで止まらない．こうして $w' = ue \dots e'u$ を得る．ここで w は閉じているので, u から始めることにすると u に戻り, $w = ue_1 \dots e_n u$. そこで, w の終点 u に w' を繋げることで, 新たな閉じた小道 $\tilde{w} = ue_1 \dots e_n ue \dots e'u$ を得る．これは w より長いので, w が最長であることに反する．(q.e.d.)

(∵) (13) ($\Rightarrow$) G が周遊可能とすると, オイラー小道 $w = v_0 e_1 v_1 \dots e_n v_n$ がある．ここで, v_0, v_n を結ぶ辺 e を G に追加したものを G' とすれば, G' にオイラー回路:

$$w = v_0 e_1 v_1 \dots e_n v_n e v_0 \tag{14}$$

を作れる．ゆえに (12) より G' は奇頂点を持たない．ここで回路上の辺 e を除いて G に戻すと e の両端点 v_0, v_n のみが次数を 1 ずつ減らすので, G の頂点は v_0, v_n を除いてすべて偶頂点である．$v_0 = v_n$ の場合はすべてが偶頂点になる．(q.e.d.)

(∵) (13) ($\Leftarrow$) G が 連結で (13) 右辺をみたすとする．ここで, G に奇頂点がないときは, (12) よりオイラー回路がある．奇頂点が 2 つのときは, これらを e で繋いでできた G' は (12) 右辺をみたすので, G' にオイラー回路 w が存在する．w から e を除けば, G のオイラー小道になる．(q.e.d.)

(13) の証明からわかるように, G の奇頂点が 2 個の場合は, それらの頂点の間にオイラー小道がある.

G が連結でないときも, (T4) の証明の ($\Rightarrow$) はそのまま成立する. さらに, オイラー (多重) グラフまたは周遊可能であれば, 孤立頂点以外の連結成分が2つ以上はありえないことがわかる. ($\Leftarrow$) については, (T4) の条件に加えて, G の孤立頂点以外の連結成分が多くとも 1 つのとき, 孤立頂点を除いたグラフに (T4) を適用すれば, オイラー回路やオイラー小道の存在が示せる. 以上をまとめると次を得る.

(T4') (i) G がオイラー (多重) グラフであるための必要十分条件は, G が奇頂点を持たず, 孤立頂点を除けば連結になることである.[5]

(ii) G が周遊可能であるための必要十分条件は, G の奇頂点が 0 個か 2 個で, 孤立頂点を除けば連結になることである.[6]

- 11 -（ハミルトングラフ）グラフ G のすべての頂点を通るサイクル（全域サイクル）をハミルトンサイクルといい, G のすべての頂点を通る道（全域道）をハミルトン道という. ハミルトンサイクルを持つグラフをハミルトングラフという. グラフがハミルトングラフかどうかを見分ける一般的な方法は知られていない.

(ex7) 縦 m 行, 横 n 列に並んだ頂点が縦横に格子状に結ばれた長方形のグラフを $L_{m,n}$ とおく. 次を示せ. $L_{m,n}$ がハミルトングラフであるための必要十分条件は, mn が偶数になることである.

- 12 -（いろいろなグラフ）1（完全グラフ）n 個の頂点を持ち, 任意の異なる 2 頂点が隣接しているグラフを完全グラフといい, K_n で表す. K_n の辺の個数は $\binom{n}{2}$ である. また K_n は $(n-1)$-正則である.

- 12 -2（完全 s 部グラフ）一般に, グラフ G の頂点集合 V の適当な分割: $\{V_1, \ldots, V_s\}$ が存在して, 同じ細胞内の頂点同士は決して隣接せず, 異なる細胞に属する任意の 2 頂点が隣接するとき, G を完全 s 部グラフ（完全多部グラフ）という. $|V_i| = p_i$ のとき, $G = K_{p_1,\ldots,p_s}$ とかく. V の高々s 個の細胞への適当な分割: $\{V_1, \ldots, V_r\}$ が存在して, 同じ細胞内の頂点同士が決して隣接しないとき, G を s 部グラフ（多部グラフ）という.

- 12 -3（サイクルグラフ）n 頂点を持つサイクル状（n 角形かそれと同型）のグラフをサイクルグラフといい, C_n で表す. 図の中で辺が交差していてもよい.

- 12 -4（道グラフ）長さ $n-1$ の道, すなわち n 頂点を持つ道をグラフと見たものを道グラフといい, P_n で表す.

- 12 -5（車輪グラフ）ある 1 つの頂点を, サイクルグラフ C_{n-1} の各頂点に繋げてできるグラフを車輪グラフといい, W_n で表す.

- 12 -6（木）連結かつサイクルを持たない（非閉路的）グラフを木という. 孤立頂点のみからなる木を自明な木という. n 頂点を持ち, 直径が高々2 であるような木を (n-) 星といい, S_n で表す. 道グラフ P_n も木の一種である. 単にサイクルを持たないグラフを森という. 森の各連結成分は, 明らかに木である. したがって, 森は木が幾らか（1 つでもよい）集まったものである.

(ex8) (1) K_4 は C_4 をいくつ含むか？ (2) K_5 は C_5 をいくつ含むか？ (3) W_n はサイクルグラフをいくつ含むか？ (4) 頂点数が 8 以下の木を同型を除いてすべて求めよ.
(5) 次の (a),(b),(c) それぞれに対して, 同型がなりたつように n, p, q, r を求めよ.
(a) $S_n \simeq K_{p,q}$. (b) $W_n \simeq K_n$. (c) $W_n \simeq K_{p,q,r}$.

[5] G が孤立頂点のみからなる場合も含む.
[6] 同上.

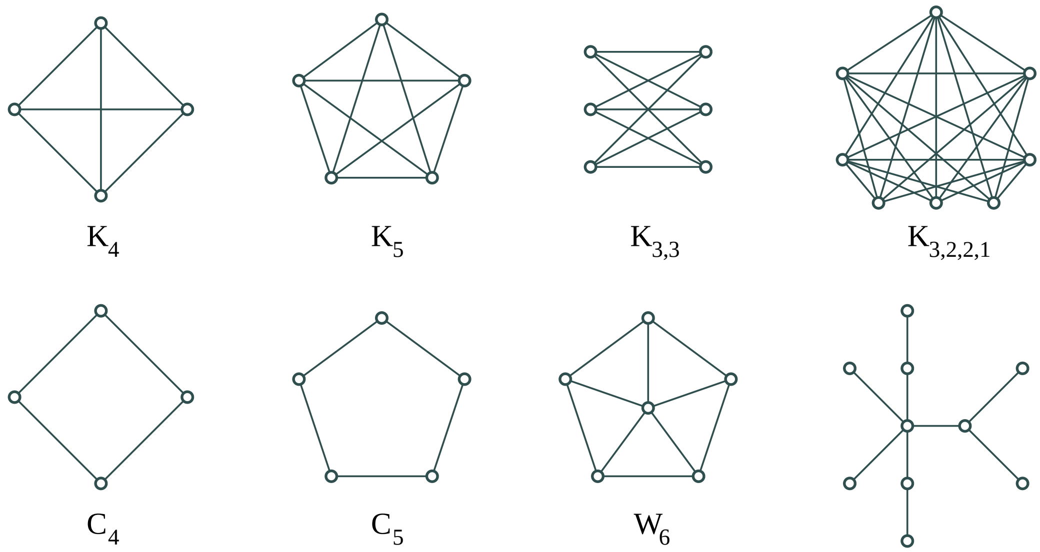


Figure 6:

- 13 -（隣接行列など）多重グラフ G の頂点を $v_1, \ldots, v_p$ とおくとき, G の隣接行列 $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, p)$ を次で定義する.

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{（辺 } \{v_i, v_j\} \text{ の数）} & (i \neq j) \\ \text{（ループ } \{v_i\} \text{ の数）} & (i = j) \end{cases} \tag{15}$$

定義より, 多重グラフの隣接行列はつねに対称行列である. 逆に, 非負整数を成分とする任意の対称行列 A に対して, ある多重グラフ G が存在して, G の隣接行列が A になる. 隣接行列の n 乗に関して, 次の定理がなりたつ.

(T5) A を多重グラフ G の隣接行列とする. このとき, $A^n = \left(a_{ij}^{(n)}\right)$ とおくと,

$$a_{ij}^{(n)} = (v_i \text{ から } v_j \text{ への長さ } n \text{ の歩道の数}). \tag{16}$$

(∵) ダイグラフにおける類似の定理の証明と同じなので, 省略. 7 章 (T5) 参照.

これより, 多重グラフが連結かどうかを計算で判定できる次の定理を得る.

(T6) G を p 頂点の多重グラフ, A を G の隣接行列, E を p 次単位行列とするとき,

$$G \text{ が連結} \iff E + A + A^2 + \cdots + A^{p-1} \text{ が 0 成分を持たない.} \tag{17}$$

(∵)

$$\begin{aligned} G \text{ が連結} \quad &\iff \text{任意の異なる } u, v \text{ に対して, 道 } u \longrightarrow v \text{ がある.} \\ &\iff \text{任意の異なる } u, v \text{ に対して, 長さ } (p-1) \text{ 以下の歩道 } u \longrightarrow v \text{ がある.} \\ &\iff E + A + A^2 + \cdots + A^{p-1} \text{ が 0 成分を持たない.} \quad \text{(q.e.d.)} \end{aligned} \tag{18}$$

G を p 頂点: $v_1,\ldots,v_p$, q 辺: $e_1,\ldots,e_q$ を持つ多重グラフとするとき, G の接続行列 $M=(m_{ij})$ $(i=1,\ldots,p;\ j=1,\ldots,q)$ を次で定義する.

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & (e_j \text{ が } v_i \text{ に接続するとき}) \\ 0 & (e_j \text{ が } v_i \text{ に接続しないとき})\end{cases} \tag{19}$$

さらに, G の連結行列 $C=(c_{ij})$ $(i,j=1,\ldots,p)$ を次で定義する.

$$c_{ij}=\begin{cases}1 & (v_i \text{ から } v_j \text{ への道があるとき}) \\ 0 & (v_i \text{ から } v_j \text{ への道がないとき})\end{cases} \tag{20}$$

定義より, 連結行列は対称行列である. また G が連結の時, 連結行列はすべての成分が 1 の p 次行列になる.

(note) 多重グラフ G からその隣接行列 A (あるいは接続行列 M) を作成すれば, A (あるいは M) から G と同型な多重グラフを再現できる. ただし, 同型な多重グラフであっても, 頂点や辺の順序によって, 隣接行列, 接続行列, 連結行列は異なるものになりうることに注意する.

(note) 多重グラフ G が非連結で, 連結成分 $G_1,\ldots,G_s$ からなるとする. このとき, 頂点 $v_1,\ldots,v_p$ を, G_1 の頂点から順に G_s の頂点まで並べたものとし, 辺 $e_1,\ldots,e_q$ も G_1 の辺から順に G_s の辺まで並べたものとする. この順序に応じて G の隣接行列, 接続行列, 連結行列をかけば, 各 G_i の隣接行列 A_i, 接続行列 M_i, 連結行列 C_i を用いて,

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & O & \ldots & O \\ O & A_2 & \ldots & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & \ldots & O & A_s\end{pmatrix} \qquad M=\begin{pmatrix}M_1 & O & \ldots & O \\ O & M_2 & \ldots & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & \ldots & O & M_s\end{pmatrix}$$
$$C=\begin{pmatrix}C_1 & O & \ldots & O \\ O & C_2 & \ldots & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & \ldots & O & C_s\end{pmatrix} \tag{21}$$

のように表される. 特に, C_i はすべての成分が 1 の行列である.

(ex9) 次の多重グラフの隣接行列, 接続行列, 連結行列をかけ.

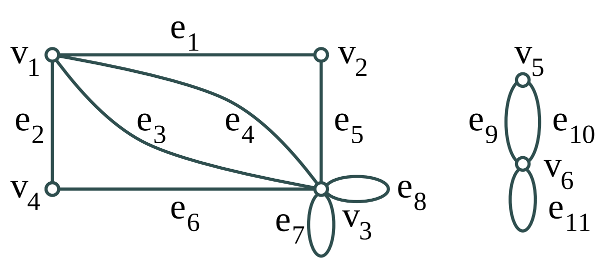


Figure 7:

(ans) 順に, 隣接, 接続, 連結行列を示す.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

- 14 -（参考）（分解と因子）グラフ $G = (V, E)$ の部分グラフたち: $G_1, \ldots, G_s$ $(G_i = (V_i, E_i))$ が以下の条件をみたすとき, G は $G_1, \ldots, G_s$ に分解されるという.

$$\begin{aligned} &E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_s \\ &E_i \cap E_j = \emptyset \qquad (i \neq j) \end{aligned} \tag{23}$$

グラフ G の全域部分グラフ H が r-正則であるとき, H を G の r-因子と呼ぶ. 連結 2-因子はハミルトンサイクルに対応するので, 単にハミルトンサイクルと呼ぶことがある. 一般に 2-因子はいくらかのサイクルグラフからなる.

グラフをいくらかの r-因子に分解することがしばしば問題とされる. たとえば, K_4 はハミルトンサイクルと 1-因子に分解可能である. K_5 は 2 つのハミルトンサイクルに分解可能である. 一般に, K_{2n+1} は, n 個のハミルトンサイクルに分解可能である. K_{2n} は, $(n-1)$ 個のハミルトンサイクルと 1 つの 1-因子に分解可能である.

6章 平面多重グラフの要点

☆ 12 ☆

キーワード: 平面 (多重) グラフ, 領域, オイラーの公式, クラトフスキーの定理, 双対,
頂点 (領域) 彩色, 彩色数, 4 色 (5 色) 定理, 木, 全域木, 最小全域木, プリム法, クラスカル法,
ラプラシアン行列, キルヒホッフの定理, ケーリーの公式, 曲面上の地図

- 1 -（平面多重グラフ）多重グラフを辺が交差しないように平面上に描いたものを平面多重グラフという．平面多重グラフがグラフであれば平面グラフという．平面多重グラフは地図とも呼ばれる．実際に辺が交差しているかどうかに関わらず, 辺が交差しないように平面上に描くことが可能な多重グラフを平面的であるという．平面的でない多重グラフを非平面的であるという．

- 2 -（領域）G を平面多重グラフとする．G の辺に囲まれた部分がより細かい部分に（辺によって）分割されていないとき, それを G の 1 つの領域という．G は, 平面をいくつかの領域に分けることになる．G の外側の部分も 1 つの領域になることに注意する．G の領域 d にはいくらかの穴があったり, 辺や孤立頂点が入り込んでいる場合もある．d の外周をなす辺や穴をなす辺により, d は囲まれているとみなす．d を囲む辺および, d 内に入り込んでいる辺を d の境界辺といい, d のすべての境界辺と, d 内の孤立頂点からなる多重グラフを d の境界という．d の境界を描く（すなわち, すべての境界辺を通る）閉じた最短歩道の長さを d の次数といい, $\deg(d)$ で表す．

G が非連結のときは, 領域の次数に対しては注意がいる．この場合, ある領域 d の境界 Γ は非連結になり, Γ はいくらかの閉じた最短歩道で描かれるので, d の次数はそれらの歩道の長さの和になる．

G の 2 つの領域が隣接するとは, これらが少なくとも 1 つの境界辺を共有することである．1 つの領域内にいくらかの辺が入り込んでいるとき, この領域は自分自身に隣接すると考える．

G の領域 d の境界 Γ の辺は, Γ の橋であるかないかによって類別される．e が橋であれば, e の片側から線を描き, Γ の辺や頂点に交わらずに, d 内を通って e の反対側に到達できるので, e は d に入り込んでいる辺である．e が橋でなければ, 5 章 (T3”) より e はサイクル上にあるので, e は 2 つの異なる領域（1 つはサイクルの内側にあり, もう 1 つはサイクルの外側にある）の境界が共有している辺である．これは d を囲む辺になる．

領域の次数については, 頂点の次数の場合と同様に次の定理がなりたつ．

(T1) 平面多重グラフ G の領域を $d_1, d_2 \ldots, d_r$, 辺の数を q とするとき,

$$\sum_{i=1}^{r} \deg(d_i) = 2q. \tag{1}$$

(∵) G の辺は, (i) 1 つの領域に入り込んでいるか, または (ii) 2 つの異なる領域の境界が共有しているか のいずれかである．すべての領域に対して, その境界を描く閉じた最短歩道を考えるとき, (i) の辺は 1 つの最短歩道に 2 回数えられる．(ii) の辺は 2 つの最短歩道に 1 回ずつ数えられる．いずれにせよ, 辺は丁度 2 回ずつ数えられるので, (T1) がなりたつことになる．(q.e.d.)

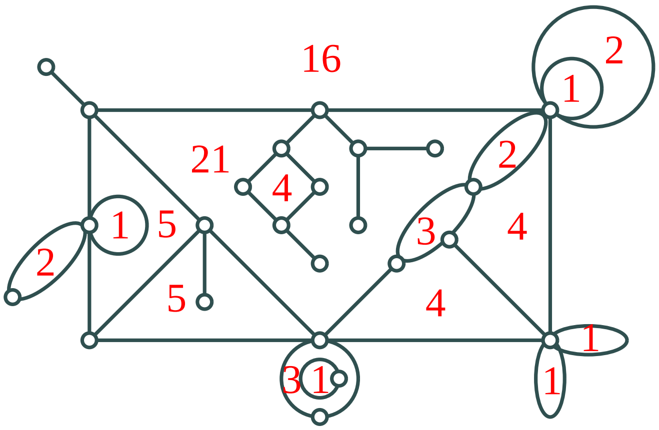


Figure 1: A plane multigraph and the degrees of all regions

(note1) 領域 d に入り込んでいる辺（d 内の辺）の数を m_d, d と他の領域の境界が共有する辺（d を囲む辺）の数を n_d として,

$$\deg(d) = 2m_d + n_d \tag{2}$$

と定義すれば, (T1) は明白である．難しいのは, それが d の境界を描く閉じた最短歩道の長さに等しいことの証明である．以下それを示しておく．

(∵) d の境界を Γ とする．Γ において d 内の辺をすべて 2 重辺にしたものを Γ' とすれば, 各 2 重辺に挟まれた新たな領域ができ, Γ' のすべての辺は d を囲む辺となる．したがって, Γ' の各辺の両側は d と他の領域になる．そこで, 任意の頂点 v を取り, v に接続する辺とそれらで分けられた領域を考えると, d と他の領域が交互に現れる．そのことから, 各頂点の次数は偶数になり, Γ' の連結成分はオイラー多重グラフとなって, オイラー回路 w' が存在する．これより, Γ' を Γ に戻すことで, Γ の連結成分を描く閉じた歩道 w が構成でき, その長さは (2) に一致する．あとは w が最短であることの確認だが, Γ の中に, d 内のある辺 $e = \{u, v\}$ を 1 回だけ通る閉じた歩道があれば, uev 以外に u から v への道があり, e を通るサイクルができるので, e が d を囲む辺になってしまって矛盾する．(q.e.d.)

- 3 - (T2)（オイラーの公式）連結平面多重グラフ G の頂点数, 辺数, 領域数をそれぞれ p, q, r とするとき,

$$p - q + r = 2. \tag{3}$$

(∵) 辺の数 q に関する帰納法による．$q = 0$ では G は自明な木になり, $p = r = 1$ で明らかにオイラーの公式がなりたつ．ここで $q - 1$ でなりたつと仮定する．今, 連結平面多重グラフ G の頂点数, 辺数, 領域数をそれぞれ p, q, r とする．

(i) はじめに G がサイクル C を持つとすると, C 上の 1 辺 e を除いて G' を作るとき, p は変らず, q, r は 1 ずつ減る．r が 1 減る理由は, e を境界辺として共有する 2 つの領域が, はじめ C の内側と外側にあり, e を取り除くことで, これらが 1 つの領域に合併するからである．また 5 章 (T3) より, G' は連結である．このとき仮定より, G' はオイラーの公式をみたすので,

$$p - (q - 1) + (r - 1) = 2, \qquad \therefore \quad p - q + r = 2. \tag{4}$$

(ii) 次に G がサイクルを持たないとする. G 内の最長の道 w を考えれば, その終点 v の次数 $=1$ となる. なぜならば, もし次数が 2 以上ならば, w をさらに伸ばせるか, G にサイクルができてしまうからである. そこで, v および v に接続する辺を除いて G' を作るとき, r は変らず, p, q は 1 ずつ減り, かつ G' は明らかに連結である. よって仮定より G' はオイラーの公式をみたすので,

$$(p-1)-(q-1)+r=2, \qquad \therefore \quad p-q+r=2. \tag{5}$$

こうして (i),(ii) いずれの場合も G はオイラーの公式をみたす. これで帰納法は完成した. (q.e.d.)

より一般に, (必ずしも連結でない) 平面多重グラフ G については, その連結成分の数を k とすれば,

$$p-q+r=k+1 \tag{6}$$

がなりたつ. 以下簡単にその理由を述べる. G は k 個の連結成分を持つので, $k-1$ 個の辺を追加することで連結平面多重グラフ G' にできる. そのとき, 頂点数と領域数は変わらず, 辺数だけが $k-1$ 増えるので,

$$p-(q+k-1)+r=2. \tag{7}$$

これより (6) を得る.

- 4 - (平面グラフ) 平面グラフは多重辺とループを禁止され, かつ辺の交差も禁止されるため, 頂点数を固定するとき, 辺数に制限がでてくる. 具体的には次のようである.

(T3) 連結平面グラフ G の頂点数を p, 辺数を q とする. $p \geq 3$ ならば,

$$q \leq 3p-6. \tag{8}$$

さらに G が 3-サイクルを持たないならば,

$$q \leq 2p-4. \tag{9}$$

($\because$) G が連結かつ $p \geq 3$ のグラフという条件より, 外側の領域の次数 ≥ 3 であり, G がグラフなので, その他の領域の次数も 3 以上になる. ゆえに (T1),(T2) より,

$$\begin{aligned} &2q = (\text{領域の次数の和}) \geq 3r = 3(q-p+2). \\ &\therefore \quad q \leq 3p-6. \end{aligned} \tag{10}$$

また, G が 3-サイクルを持たないならば,

$$\begin{aligned} &2q = (\text{領域の次数の和}) \geq 4r = 4(q-p+2). \\ &\therefore \quad q \leq 2p-4. \end{aligned} \tag{11}$$

(note2) (8) は G が $p \geq 3$ ならば, 非連結のときもなりたつ. (非連結の場合は, 各連結成分で (8) がなりたつから. あるいは辺を追加して連結グラフにできるから.) (9) についても同様.

(ex1) (1) 6-正則平面グラフは存在しないことを示せ. (2) 5-正則平面グラフの頂点数は 12 以上であることを示せ. (3) 平面グラフには必ず次数が 5 以下の頂点が存在することを示せ. (4) 5-正則平面グラフの例をあげよ.

- 5 -（クラトフスキーの定理）(T3) より, K_5 および $K_{3,3}$ は非平面的である（平面的でない）ことが示される. この定理のある意味での逆もなりたち, まとめてクラトフスキーの定理と呼ばれる.

(T4) グラフ G が非平面的であるための必要十分条件は, G が部分グラフとして K_5 または $K_{3,3}$ と同相なグラフを含むことである. (C. Kuratowski, 1930)

(note3) 2 つのグラフが, 同型なグラフのいくらかの辺上にいくらかの次数 2 の頂点を書き入れて得られるとき, これらは同相であるという.

(ex2) (1) K_5 が非平面的であることを示せ. (2) $K_{3,3}$ が非平面的であることを示せ.

- 6 -（双対）連結平面多重グラフ G の双対 G^* とは, 次のようにして作った連結平面多重グラフのことである.

(i) G の各領域（国）の中に頂点（首都）を 1 つずつ描く.

(ii) G の 2 つの領域が境界辺 e を共有して隣接しているとき, e に 1 回だけ交差する辺で 2 つの領域の首都を結ぶ.（該当するすべての e に対してこの操作を行う.）

(iii) G の 1 つの領域 d に辺 e が入り込んでいるときは, d 内の首都を端点とし, e と 1 回だけ交わるループを描く.（該当するすべての e に対してこの操作を行う.）

(iv) G^* の辺同士は交差してはならない.

(note4) (i) G と G^* は互いに他の双対になっている. ゆえに $(G^*)^* \simeq G$ がなりたつ. (ii) G と G^* の辺数は等しく, G の領域 d の次数は, d 内に描いた G^* の頂点の次数に等しい. (iii) G の領域数は G^* の頂点数に等しく, G の頂点数は G^* の領域数に等しい.

(note5) 双対の定義は, G が非連結のときにもそのまま適用でき, 双対は必ず連結になる. そして (note4) (ii) はなりたつが, (i) の $(G^*)^* \simeq G$ と, (iii) の後半はなりたたない.

(note6) 平面多重グラフ G, H に対して, $G \simeq H \Rightarrow G^* \simeq H^*$ はなりたたない. つまり, 同型な平面多重グラフでも, 描き方によっては双対が同型にならないことがある.

(ex3) (1) いろいろな連結平面多重グラフに対して, その双対を描いてみよ. (2) 2 つの頂点と 3 つの辺を持つ同型な連結平面多重グラフであって, それぞれの双対が同型でないものをあげよ. (3) 3 つの頂点と 4 つの辺を持つ連結平面多重グラフであって, その双対と同型になるものをあげよ. (4) 木の双対はどんな多重グラフか？

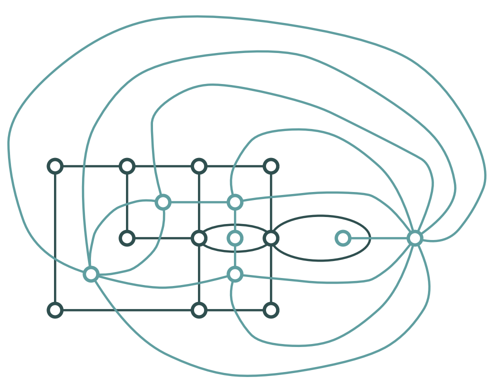


Figure 2: A plane multigraph and its dual

(note6) でみたように, 双対をつくるという操作は, 一般には同型を保存しない. たとえば, 1 つの頂点にいくつものループをつけた平面多重グラフ (ループつき頂点) は, ループの数が同じであればすべて同型であるが, その描き方によって双対は多種多様な木になる. 言い替えると, 頂点数が同じ木の双対は, すべて同型なループつき頂点になる. このようにループつき頂点の描き方は, 木の多様性に匹敵することになる.

そこで, 木のいくらかの頂点に（多重）ループをつけた平面多重グラフ（ループつき木）G を考える. G の中の木に含まれる辺をすべて縮約（- 10 - 参照）すれば, G はループつき頂点になり, その双対は木になる. その後, G に施した縮約を元に戻せば, G の双対にはいくらかの（多重）ループがつくことがわかる.

(T5) ループつき木の双対はまたループつき木である.

- 7 -（彩色）グラフの頂点彩色（単に彩色）とは, 隣接頂点が異なる色になるようにすべての頂点を塗ることである. 高々n 色で彩色することを n-彩色するという. 彩色は, 多重グラフでも同様に定義できるが, ループを含む場合はそれが接続する頂点が自分自身に隣接し, 彩色できないため, 彩色は不能である. グラフ G の彩色数 $\chi(G)$ とは, G の彩色に必要な色数の最小値である. たとえば $\chi(K_n)=n$, $\chi(K_{m,n})=2$, $\chi(C_{2n})=2$, $\chi(C_{2n+1})=3$ である. グラフ G が n-彩色可能であることは, G が n 部グラフであることと同値である. なぜならば, n-彩色可能ならば, 同色の頂点を集めて細胞にすればn 部グラフを構成でき, また逆に n 部グラフの各細胞を同色で塗れば n-彩色できるからである. 木（あるいは森）は 2-彩色可能なので, 2 部グラフである.

平面多重グラフの領域彩色とは, 隣接領域が異なる色になるようにすべての領域を塗ることである.（ただし, 1 つの領域は 1 色で塗る.） この定義によると, 非自明な木や, ある領域に辺が入り込んでいる平面多重グラフは領域彩色できない. G の領域彩色は G^* の頂点彩色と同等である.

(ex4) (1) 5 章 Figure 6 のグラフを頂点彩色せよ. また, Figure 2 のループつきの多重グラフを領域彩色せよ.

- 8 -（平面グラフの彩色）平面グラフの彩色については次のことが知られている.

(T6)（4 色定理）平面グラフは 4-彩色可能. (K. Appel, W. Haken, 1976)

この証明の鍵は, 可約な グラフ[1] からなる不可避集合を作ることである. すなわち,

(i) グラフの集合であって, 任意の平面グラフに, その集合に属するいずれかのグラフが部分グラフとして必ず含まれているものを考える. このような集合を不可避集合という.

(ii) 次の性質を持つグラフ H を考える. H を部分グラフとして含む任意の平面グラフ G は, H を除いて 4-彩色できればG も 4-彩色できる. このとき, H を可約という.

可約なグラフからなる不可避集合が構成できれば, 4 色定理は証明できる. なぜならば, 仮に彩色に 5 色以上必要な平面グラフがあったとすると, そのようなもののうち頂点数が最小のものを G とすれば, G の部分グラフで不可避集合に属するものがある. これを除いたグラフ G' が 4-彩色できればG も 4-彩色できるので, G' は 4-彩色できない. これは G の最小性に反する.

当時コンピューターによる計算を 1200 時間以上行った結果, 1936（後に 1476 に縮小）の可約なグラフからなる不可避集合が構成された. 現在までにいくらかの改良がなされたが, 基本的にコンピューターですべて調べ尽くすような証明法しか知られておらず, 通常の数学の証明とは非常に趣きを異にするものであり, 様々な議論を呼んだ. しかし, 5 色で塗り分けられることについては普通の証明が可能である. 以下それを見てみる.

(T7)（5 色定理）平面グラフは 5-彩色可能.

($\because$) 頂点数 p に関する帰納法による. $p=1$ では明らか. $p-1$ で成立を仮定する. G を頂点数 p の平面グラフとする. 平面グラフには, 次数 ≤ 5 の頂点が存在するのでこれを v とする. G から v を除いて得られる部分グラフを G' とおく.

(i) G において $\deg(v) \leq 4$ ならば, G' を帰納法の仮定より高々5 色で塗り, その上で, v を追加して G に戻して, v に隣接する 4 つ以下の頂点と異なる色で v を塗れば, G を高々5 色で塗れる.

[1] ここでのグラフは, 考えているグラフ G の部分グラフであって, 各頂点の G における次数が指定されているものを指す.

(ii) G において $\deg(v) = 5$ とする．v に隣接する頂点を，反時計回りに $v_1, v_2, \ldots, v_5$ とする．G' を帰納法の仮定より 5 色で塗る．この時点で $v_1, \ldots, v_5$ が 4 色以下で塗られていれば，v をもう 1 つの色で塗って G を 5 色で塗れる．よって，$v_1, \ldots, v_5$ が 5 色，すなわち，順に色 $1, 2, 3, 4, 5$ で塗られた場合を考える．ここで，G' において 1,3 で塗られた頂点の集合 V_1 から誘導される部分グラフの中で，v_1 を含む連結成分 H を考える．H が v_3 を含んでいなければ，H の中で色 1,3 を交換する．このようにしても，彩色の条件をみたしている．このとき，v_1, v_3 とも 3 で塗られたので，G において v を 1 で塗ることができ，G が 5 色で塗れる．

H が v_3 を含むとき，H 内に v_1 から v_3 への 1,3 が交互に塗られた道 w ができる．そこで G' において 2,4 で塗られた頂点の集合 V_2 から誘導される部分グラフの中で，v_2 を含む連結成分 K を考える．w の存在により，K は v_4 を含むことができない．よって前の議論と同様 K の中で色 2,4 を交換すると G を 5 色で塗れる．以上で帰納法が完成した．(q.e.d.)

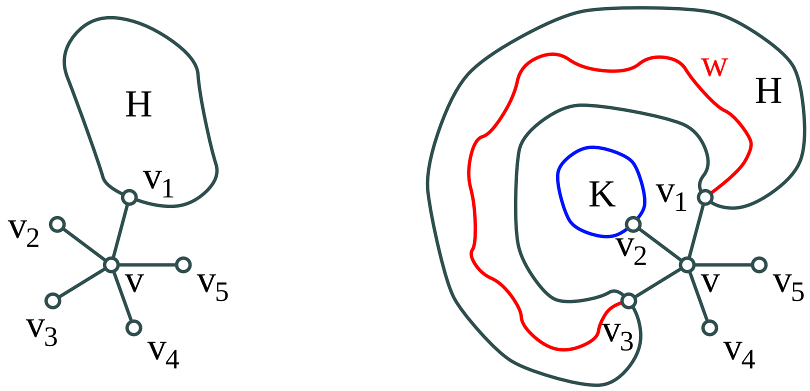


Figure 3: Proof of the five color theorem

- 9 -（木）木が平面的であることは，直感的には理解されるが，厳密には帰納法などで証明できる．これを認めた上で，木を平面グラフとして描けば，サイクルを持たないために，領域がただ 1 つしかないことがわかる．そこでオイラーの公式を用いると，

$$p = q + 1 \tag{12}$$

が得られる．（この式は直接証明することもできる）グラフ G に対して次がなりたつ．

(T8) G は木 $\overset{\text{(i)}}{\Longleftrightarrow}$ G は連結かつ $p = q + 1$ $\overset{\text{(ii)}}{\Longleftrightarrow}$ G にはサイクルがなく $p = q + 1$．

(∵) (i) (⇒) 上で述べたことより明らか.

(⇐) 背理法による．グラフ G が連結かつ $p = q + 1$ であるとする．このとき，G が木でないと仮定する．すると，G が連結なのだから，G はサイクルを持つことになる．そこで，G のあるサイクル上の 1 辺を取り除いてグラフ G' を作ると，5 章 (T3) よりそれは連結である．G' にサイクルがあれば，またそのサイクル上の 1 辺を取り除いて G'' を作るとこれは連結である．以下繰り返すと，結局サイクルがなく連結なグラフ $G^{(s)}$ を得る．これはすなわち木であり，$G^{(s)}$ の頂点数は p，辺数は $q - s$ なので，$p = (q - s) + 1$ $(s \geq 1)$ を得る．これは $p = q + 1$ と矛盾する．(q.e.d.)

(∵) (ii): G は木 $\Longleftrightarrow$ G にはサイクルがなく $p = q + 1$ を示す．

(⇒) 明らか.

(⇐) G にはサイクルがなく $p=q+1$ とする. G はいくつかの連結成分からなっているので, それを $G_1,\ldots,G_s$ とおく. すると, 各 G_i は木である. よって G_i の頂点数 p_i, 辺数 q_i に対して, $p_i=q_i+1$ を得る. したがって, $p_1+\cdots+p_s=q_1+\cdots+q_s+s$, すなわち $p=q+s$ を得る. ここで $p=q+1$ だったので, $s=1$. これより, $G=G_1$ は木である. (q.e.d.)

木は連結なので必ず 2 頂点間の道が存在するが, 同時にそれがただ 1 つであることが示される. より正確には, グラフ G に対して次がなりたつ.

(T9) G は木 $\iff$ G の任意の 2 頂点 u,v に対して, u から v への道がただ 1 つ存在する.

(∵) (⇒) G を木とする. G は連結なので, 任意の 2 頂点 u,v に対して, u から v への道が存在するが, そのような道で異なるもの w,w' があったと仮定して矛盾を導く. u から始まった道 w,w' が頂点 u_0 までは共通であり, その次の頂点が各々 x,x' $(x\neq x')$ であったとする. w' の頂点で x' 以降にでてくるもののうち, はじめて w に含まれるものが存在するのでそれを y とする. これは w においても x 以降に現れる. したがって, サイクル $u_0x\longrightarrow y\longrightarrow x'u_0$ ができてしまい, 木の定義と矛盾する. (q.e.d.)

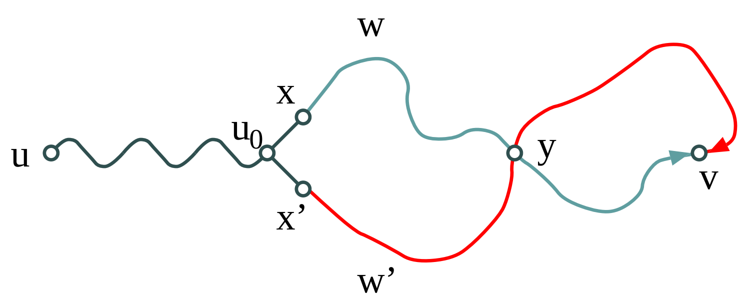


Figure 4: Different paths in a tree

(∵) (⇐) G を (T9) 右辺の条件をみたすグラフとする. 明らかに G は連結である. G にサイクル C があったと仮定する. C 上の任意の異なる 2 頂点 u,v を取れば, C 上で u から v への道は明らかに 2 つ存在するので矛盾する. (q.e.d.)

T を自明でない木とするとき, T は明らかに 2 つ以上の次数 1 の頂点を持っている. T のそれ以外（次数が 2 以上）の頂点はすべて T の切断点である. また T のすべての辺は橋である. 逆に, すべての辺が橋になる連結グラフは木に限る.

(ex5) (1) 木が平面的であることを示せ. (2) 次数 2 以上の頂点がすべて切断点になる連結グラフで木でないものをあげよ. (3) すべての辺が橋になる連結グラフは木に限ることを示せ.

一般に連結グラフ G が与えられ, その頂点数が p, 辺数が q であるとする. G の中にサイクルがあれば, サイクル上の 1 辺を取り除く, という操作を繰り返せば, いつか連結でサイクルがないグラフ T が得られる. これは木であり, 辺数のみが q' に減っている. したがって, $p=q'+1\leq q+1$ を得る.

(T10) 連結グラフ G の頂点数を p, 辺数を q とすると, $p\leq q+1$ がなりたつ.（逆はなりたたない）等号成立は G が木の場合のみである.

- 10 -（全域木）連結多重グラフ G の全域部分グラフが木であるとき, これを G の全域木という. すなわち全域木とは, すべての頂点を含む（部分グラフとしての）木に他ならない. 通常全域木は多数存在する. G の全域木がいくつあるかを数え上げることは基本的な問題である. G の全域木の個数を $t(G)$ とかく. G のある辺 e を 1 つ取るとき, G の全域木は e を含むか含まないかのいずれかである. e を含まない全域木は G から e を除いた多重グラフ $G-e$ の全域木とみなせる. また e を含む G の全域木の数を $t_e(G)$ とかけば,

$$t(G) = t(G-e) + t_e(G) \tag{13}$$

を得る.

多重グラフ G とその辺 e に対して, e を 1 点に縮小しながらその両端点を他の頂点との隣接関係を保ったまま 1 つの頂点にまとめる操作を e の縮約といい, この結果得られる多重グラフを G/e とかく. ただし, e がループのときは, G/e は単に e を取り除くものとする. このとき, (13) においてループでない辺 e を含む G の全域木は G/e の全域木と 1 対 1 対応できるので, e をループでない辺とするとき,

$$t(G) = t(G-e) + t(G/e) \tag{14}$$

が得られる (deletion-contraction recurrence). (14) (あるいは (13)) は全域木を数え上げる上で基本的な公式である.

より一般に, G の辺の部分集合 E' を選ぶとき, E' の中のどの辺を使うかで全域木を分類することができる. 辺の部分集合 F に対して, $t_F(G)$ で F に属するすべての辺を含む G の全域木の数を表し, G/F で F に属するすべての辺の縮約によって得られる多重グラフを表すとき, 次がなりたつ.

$$t(G) = \sum_{F\subset E'} t_{E'-F}(G-F) = \sum_{F} t((G-F)/(E'-F)) \tag{15}$$

ただし, 右辺の和は E' の部分集合 F であって, $E'-F$ がサイクルを含まないもの全体を亘る. ここでは (ex6) に (15) の応用例を示す.

グラフの各辺に重みと呼ばれる数値が与えられているとき, それはラベルつきグラフと呼ばれる. 辺 e の重みを $w(e)$ で表す. ラベルつき連結グラフ G の全域木のうちで, 使った辺の重みの総和が最小になるものを G の最小全域木という. 最小全域木を見つけるアルゴリズムはいろいろあるが, ここでは代表的なプリム法とクラスカル法について説明する.

（プリム法）ラベルつきグラフ G の最小全域木のうちの 1 つを構成するアルゴリズム. 1 つの頂点から木を成長させる. まず, G の 1 つの頂点 v を自由に選び, これを T_1 とする. 次に T_1 に接続する（ループでない）辺とそれにつく頂点のうちで, 辺の重みが最小のものを 1 つ選び, それを T_1 に追加して木 T_2 を作る. 一般に木 T_k が得られたとき, T_k の頂点と T_k に含まれない頂点を両端点とする辺のうちで重みが最小のものを 1 つ選び, これを T_k に追加して頂点が 1 つ多い木 T_{k+1} を作る. これを繰り返せば最小全域木 T_p（p は G の頂点の数）が得られる.

（アルゴリズムの妥当性）G の最小全域木の 1 つを T とし, 上記のプリム法で得られた木の列 $T_1, T_2, \ldots, T_p$ を考える. $T = T_p$ ならば T_p は最小全域木である. そこで, $T \neq T_p$ とする. T_k が T の部分グラフにならないような最小の k を取る. T_k の辺のうちで, T に含まれないものを e とし, その両端点を x, y とする. ここで, T_{k-1} に e と共に y が追加されて T_k を得たとし, $V = V(T_{k-1})$ とする. T は全域木なので, T 内の x から y への道が存在する. その道の途中にある辺 f が存在し, その一方の端点は V に属し, もう一方は V に属さない. このときプリム法により,

$$w(e) \leq w(f) \tag{16}$$

である．そこで T において f を除去し, 代わりに e を追加することで, 新たな最小全域木 T' を作ることができる．この操作を繰り返せば, 番号 k が増加していき, 最終的に $T^{(s)} = T_p$ となって, T_P が最小全域木であることがわかる．(q.e.d.)

（クラスカル法）ラベルつきグラフ G の全域森（すべての頂点を含む森）に辺を追加していき, 最終的に 1 つの最小全域木を構成するアルゴリズム．はじめは頂点のみの森 F_0 である．これに重みが最小の辺を 1 つ選んで追加することで, F_1 を得る．一般に森 F_k が得られたとき, 追加しても森を保つ（サイクルができない）辺のうち重みが最小のものを 1 つ選び, これを F_k に追加して F_{k+1} を作る．これを繰り返せば最小全域木 F_{p-1} を得る．

（アルゴリズムの妥当性）G の最小全域木の 1 つを T とし, クラスカル法で得られた森の列を $F_0, F_1, \ldots, F_{p-1}$ とする．$T = F_{p-1}$ ならば F_{p-1} は最小全域木なので, $T \neq F_{p-1}$ とする．F_k が T の部分グラフにならないような最小の k を取り, F_k の辺のうちで T に含まれないもの（すなわち F_{k-1} に追加された辺）を e とする．ここで T に e を付け加えたグラフはサイクルを含む．F_k はこのサイクルを完全には含まないので, サイクル上で F_k に含まれない辺 f がある．F_{k-1} は T の部分グラフなので, F_{k-1} には e, f のどちらを追加しても森を保ち, (16) がなりたつ．そこで, T に e を追加して f を除いたグラフ T' は最小全域木になる．この操作を繰り返すと, $T^{(s)} = F_{p-1}$ となる．(q.e.d.)

(ex6) Figure 5 (i) のグラフの全域木の総数を求めるには, 図の辺 e, f に注目し, 全域木の中に e, f を使うかどうかで場合分けしながら計算する．e, f ともに使うときは, 外部を除いて 3 つの領域 a, b, c があり, それらの境界をなす各サイクルから 1 つずつ辺を除き, サイクルを破壊すれば, すべてのサイクルがなくなりまた連結性も保たれて, 全域木ができることになる．その個数は $3 \times 2 \times 2$ と計算できる．e のみを使うときは, 図から f を除いて考えれば, 個数は 3×4. f のみを使うときは, 図から e を除いて考えれば, 個数は 5×2. e, f ともに使わないときは, 7. したがって全域木の総数は, $\boxed{41}$.

(ex7) Figure 5 (ii) の最小全域木を求めよ．

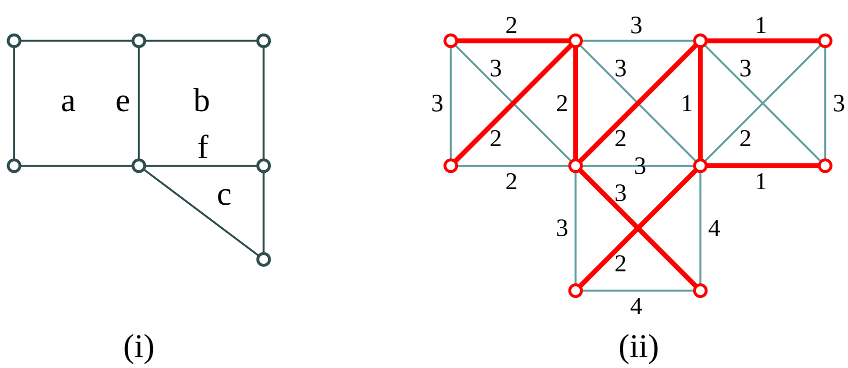


Figure 5: Spanning trees

- 11 -（ラプラシアン行列とキルヒホッフの定理）キルヒホッフの定理とは, ループのない連結多重グラフ G に対して, その全域木の数を行列式で表す公式である．それを述べるために少し準備をする．まず, G の次数行列 D とは, G の頂点の次数を適当な順序で対角成分として並べた対角行列である．次に, G のラプラシアン行列 L とは,

$$L = D - A \tag{17}$$

で定義される行列である．ここに, A は G の隣接行列であり, D, A における頂点の順序は一致しているものとする．

(T11) （キルヒホッフの定理）G の全域木の数 $t(G)$ は, G のラプラシアン行列 L の任意の (i,j) 余因子に等しい.

($\because$) （概略のみ）G の接続行列において, 各列の 2 番目の 1 を -1 におきかえたものを有向接続行列ということにし, M で表す. L の i 行 j 列を除いた行列を L_{ij} とかく. このとき, L と M および L_{ii} と M の i 行を除いた行列 F に対して,

$$L = M\,{}^tM, \qquad L_{ii} = F\,{}^tF \tag{18}$$

がなりたつ. ここで, L の (i,i) 余因子, すなわち $|L_{ii}|$ が $t(G)$ に等しいことを示す. コーシー・ビネの公式[2] より,

$$|L_{ii}| = \sum_S |F_S||{}^tF_S| = \sum_S |F_S|^2 \tag{19}$$

ここに, S は $n-1$ 個の辺からなる集合全体を亘る. $|F_S|$ は S が木をなすとき, 1 または -1 の値を取り, そうでないときは 0 になるので, 右辺は $t(G)$ に等しい. (i,j) 余因子でも同様の結果を得る. (q.e.d.)

Figure 6 のグラフ G に対して,

$$L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{20}$$

であり, $t(G)$ は次のように求まる.

$$|L_{11}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8; \qquad (-1)^{3+4}|L_{34}| = -\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 8. \tag{21}$$

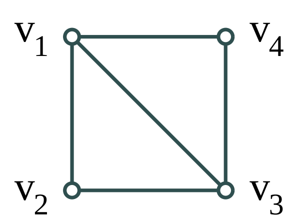


Figure 6:

(note7) 特殊なグラフに対して, その全域木の数が簡潔な公式で表される場合がある. たとえば $t(K_n) = n^{n-2}$（ケーリーの公式）, $t(K_{m,n}) = m^{n-1}n^{m-1}$, $t(C_n) = n$ などがある. 最後の式は明らかだが, 前の 2 つは色々な証明が可能であり, キルヒホッフの定理からも導ける. ケーリーの公式については, K_n のすべての全域木を, $1, \dots, n$ を用いた長さ $n-2$ の文字列 $(i_1, i_2, \dots, i_{n-2})$ に 1 対 1 に対応させることでも証明できる.

[2] $m \le n$ のとき, (m,n) 型行列 A と (n,m) 型行列 B に対して, $|AB| = \sum_S |A_S||B^S|$. ここに, S は $\{1,2,\dots,n\}$ の m 元部分集合全体を亘り, A_S (B^S) は n 個の列（行）から S に含まれる番号の列（行）を選んでできる m 次行列である.

- 12 -（曲面上の地図）通常多重グラフは平面上に描かれるが, 曲面上に描くことも試みられる. ただし, 単に曲がった面というだけではなく, 平面と位相の異なる曲面を問題にする. たとえば, トーラス, すなわちドーナツの表面が典型的な例で, 穴が 2 つ, 3 つと空いたドーナツ等も考えられる. このような面に描く場合, 平面上では辺が交差してしまう多重グラフも, 曲面上では辺を交差させずに描けることがある. 曲面上で辺が交差していない多重グラフを曲面上の地図という. ここで, 曲面 S 上の任意の地図を彩色するのに必要な色数の最小値を S の彩色数と呼ぶ. 4 色定理より, 平面または球面の彩色数は 4 であるが, トーラスの彩色数は 7 である. 実際, トーラス上では K_7 が地図として表現できる. 一般に, クラインの壺を除く曲面の彩色数 χ について,

$$\chi = [(7 + \sqrt{49 - 24e})/2] \tag{22}$$

がなりたつ. (J. W. T. Youngs, G. Ringel, 1968, 平面を除く場合) クラインの壺では $\chi = 6$ となる. ここに, e は曲面のオイラー標数, $[\cdots]$ は整数部分を表す. 曲面上の連結な地図の各領域が平面の領域と同相になるとき, $p - q + r$ の値は曲面によって決まり, それはオイラー標数になる. g 穴ドーナツ面では, $e = 2 - 2g$ となる.

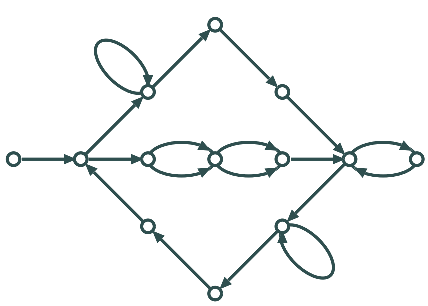
7章　ダイグラフの基礎

☆ 10 ☆

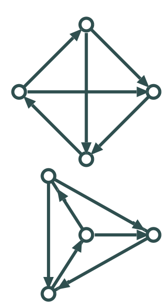
キーワード: ダイグラフ, 隣接, 部分ダイグラフ, 同型, 出次数, 入次数, 歩道, 半歩道,
対称的, 完全, トーナメント, 非閉路的, 多重木, 有向木, 強, 片方向, 弱, 成分,
オイラーダイグラフ, 隣接行列, 最短道

- 1 -（ダイグラフ）頂点の集合 V と弧の集合 A の組 $D=(V,A)$ をダイグラフという．ただし, 弧とは 2 つの頂点の順序対 (u,v)（$u=v$ でもよい）を選んで適当な名前をつけたもので, (u,v) の名前が e ならば, $e:(u,v)$ で表す．A の中に同一の順序対（名前が異なる）が 2 つ以上含まれることもある．このように, 同一の順序対が 2 つ以上あれば, それらを多重弧という．多重弧の 1 つ 1 つは異なる弧とみなす．弧の本来の表記 $e:(u,v)$ は, 紛れのない場合は (u,v) と略記する．弧 (u,v) は, 頂点 u から頂点 v への矢印で表され, これを u から v への弧という．特に (u,u) の形の弧をループといい, 同一の順序対で表されるループが 2 つ以上あればそれらを多重ループという．多重弧（または多重ループ）の名前を省略した場合, A は多重集合とみなされる．ダイグラフを描くときは, すべての頂点とすべての弧（多重弧はその個数分描く）を描けばよく, 弧は交差してもよい．ダイグラフは, 多重グラフの辺に矢印をつけたものといえる．V, A が有限集合のとき, D を有限ダイグラフ, そうでないとき無限ダイグラフという．ここでは有限ダイグラフのみを扱うことにする．

- 2 -（隣接）ダイグラフ D において, 弧 $e=(u,v)$ $(u\neq v)$ が存在するとき, u は v に隣接する, あるいは v は u から隣接するという．また, e は u から接続する, あるいは e は v に接続するという．このとき, u を e の始点, v を e の終点といい, u,v をまとめて e の両端点という．始点, 終点を単に端点ともいう．ループ $f=(u,u)$ が存在するとき, u は u 自身に隣接するといい, f は u に接続するという．このとき u を f の端点というが, 便宜上, 始点あるいは終点ともみなすことにする．



a digraph with multiarcs
and loops



isomorphic
digraphs

Figure 1:

- 3 -（部分ダイグラフ）$D=(V,A)$ をダイグラフとする．V,A それぞれの部分集合 V',A' を取って作ったダイグラフ $D'=(V',A')$ を D の部分ダイグラフという．ただし, A' は両端点（ループならば端点）が V' に属する弧のみを含むものとする．V' を指定したとき, A' を最大とする部分ダイグラフ $D'=(V',A')$ は V' によりただ 1 つに定まる．この

D' を V' から（V' で）誘導される D の部分ダイグラフ（誘導部分ダイグラフ）という．定義より, D 自身も D の部分ダイグラフであるが, D 以外の部分ダイグラフを D の真部分ダイグラフという．

- 4 -（同型性）2 つのダイグラフ $D=(V,A)$ と $D'=(V',A')$ における頂点の繋がり具合いが完全に一致しているとき, D と D' は同型であるといい, $D \simeq D'$ とかく．ダイグラフの弧を曲げたり伸縮することを許して頂点を動かし変形した結果, ダイグラフを同じにできるときに同型であると考えてよい．より数学的には, V から V' への 1 対 1 対応 φ が存在して次をみたすときに, D と D' は同型であるという．

$$（u \text{ から } v \text{ への弧の数}）=（\varphi(u) \text{ から } \varphi(v) \text{ への弧の数}） \qquad (u,v \in V) \tag{1}$$

この φ を D から D' への同型写像という．

- 5 -（頂点の次数）ダイグラフ D の頂点 v を始点とする弧の数を v の出次数と呼び, $\deg^+(v)$ で表す．同様に v を終点とする弧の数を v の入次数と呼び, $\deg^-(v)$ で表す．v の入次数と出次数の和を次数と呼び, $\deg(v)$ で表す．各頂点の出次数を足していくと, 弧が丁度 1 回ずつ数えられていく．入次数の場合も同様．よって次の定理を得る．

(T1) ダイグラフ D の頂点を $v_1, v_2 \ldots, v_p$, 弧の数を q とするとき,

$$\sum_{i=1}^{p} \deg^+(v_i) = \sum_{i=1}^{p} \deg^-(v_i) = q. \tag{2}$$

入次数 $=0$ の頂点を入口, 出次数 $=0$ の頂点を出口という．次数 $=0$ の頂点を孤立頂点という．

- 6 -（歩道, 小道, 道）$n \geq 0$ とする．ダイグラフ $D=(V,A)$ の頂点と弧の交互の列:

$$w = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots v_{n-1} e_n v_n \tag{3}$$

$(v_0,\ldots,v_n \in V;\ e_1,\ldots,e_n \in A)$ において, $i=1,\ldots,n$ に対して $e_i=(v_{i-1},v_i)$ となるとき, w を v_0 から v_n への（D の, D 内の）歩道という．ここで, n を w の長さといい, v_0 を w の始点, v_n を w の終点という．歩道においては, 同じ頂点や同じ弧を繰り返し用いても差し支えない．これに対して, 多重グラフの場合と全く同様の制限（“辺” は “弧” と読み替える）をつけることで, 小道, 道, 回路, 閉路（サイクル）, k-閉路（k-サイクル）が定義される．始点と終点が等しい歩道を閉じた歩道という．

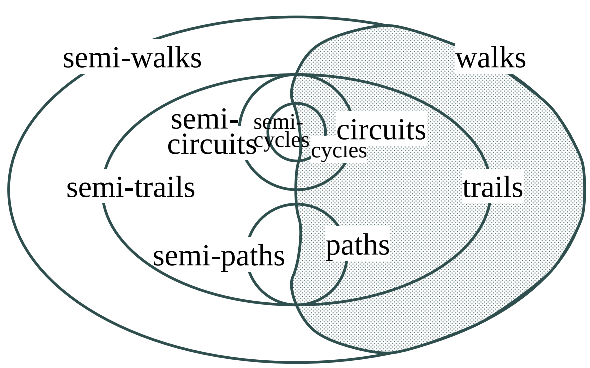


Figure 2:

ダイグラフの場合は, これらの概念に対してさらに半-version が存在する．ダイグラフにおける歩道は矢印の方向に進んでいるのに対して, 半歩道では, 必ずしも矢印の向きに進まなくてよい．半小道, 半道, 半回路, 半サイクルもまた, 矢印を逆行してもよいものとして導入される．

(note) (i) 道は小道であり, 小道は歩道である. (ii) サイクルは回路である. (iii) $**$ は半 $**$ である. $**$ には歩道, 小道, 道, 回路, サイクルが入る.

(note) 紛れのない場合には, 歩道を頂点列または弧の列で表すことがある.

(note) 具体的にかく必要がないときは, u から v への歩道を $u \longrightarrow v$ で表すことがある.

(note) 全域歩道とは, すべての頂点を通る歩道のことである. 全域半歩道, 全域道なども, すべての頂点を通るという意味で用いられる.

(note) 多重グラフの場合と同様に, オイラー回路（すべての弧を通る閉じた小道）やハミルトンサイクル（全域サイクル）等を定義する. オイラーダイグラフ, ハミルトンダイグラフの定義も同様で, それぞれ, オイラー回路, ハミルトンサイクルを持つダイグラフとして定義する.

多重グラフの場合同様, 次がなりたつ.

(T2) ダイグラフ内に u から v への歩道があるとき, これを近道すれば, u から v への道ができる. また弧 e を通る回路があるとき, 近道すれば e を通るサイクルができる.

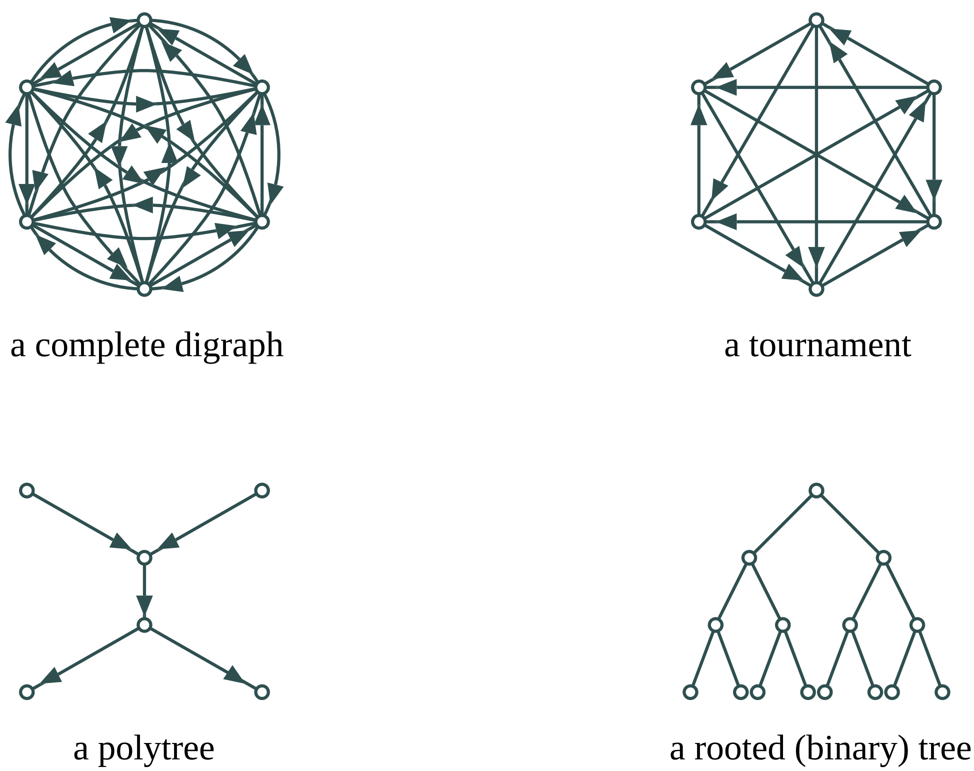


Figure 3:

ダイグラフ D において,

$$(u \text{ から } v \text{ への弧の数}) = (v \text{ から } u \text{ への弧の数}) \qquad (u, v \in V) \tag{4}$$

がなりたつとき, D を対称的 (symmetric) という.

完全グラフの各辺 $\{u, v\}$ を, 2 つの弧 (u, v), (v, u) でおきかえて得られるダイグラフを完全ダイグラフという. 完全ダイグラフは対称的である. 完全グラフの各辺を適当に向きづけて弧にしたものを, トーナメント (tournament) という. 頂点数が同じでも, 互いに同型でないトーナメントが存在する. トーナメントにはハミルトン道が存在する.

サイクルを含まないダイグラフを非閉路的 (acyclic) という. 特に, グラフとしての木の辺を適当に向きづけて弧にしたものを, 多重木 (polytree) という.

多重木のうちで, 根 (root) と呼ばれる頂点を 1 つ持ち, 根から各頂点への道が（ただ 1 つ）存在するものを, 有向木 (directed tree) という. 有向木 T において, 弧 (u,v) が存在するとき, u を v の親, v を u の子という. 2 つ以上の頂点が共通の親を持つとき, これらを兄弟という. 根から頂点 v への道の途中に頂点 u があるとき, u を v の先祖, v を u の子孫という. 子を持たない頂点を葉という. ある頂点から葉への道を T の枝という. 根から頂点 v への道の長さを v の深さという. 頂点の深さの最大値を T の深さという. 葉以外の各頂点の子の数がつねに n のとき, T を n 分木という.

グラフとしての木の 1 つの頂点を根と指定するとき, これを根つき木 (rooted tree) という. 根から各頂点への道が存在するように辺を向きづければ, これは有向木と同じ構造を持つ. そこで根つき木に対しては, 上記の用語を同じ意味で用いることにする. 根つき木は根を頂上にかき, そこからの道が下に降りるように描く（さらに辺は交差させない）ことが多い.

根つき木において, 各頂点の子の（横向きの）順序の違いを区別するとき, これを順序根つき木 (ordered rooted tree) という. 順序根つき木の葉に変数, その他の頂点に演算記号を割り当てた, ラベルつき順序根つき木（頂点に割り当てられた記号等をその頂点のラベルという）は, 自然に数式を表示するので, 応用上多用される. たとえば, Figure 3 右下の根つき木を順序根つき木とみなし, 根に $/$, 葉に左から, $a,b,c,d,e,f,g,h,$ その他の頂点に $-$ を割り当てれば, 数式 $((a-b)-(c-d))/((e-f)-(g-h))$ を表現できる.

数式のポーランド記法（前置記法）とは, $a+b$ を $+ab$ と表記する記法のことである. この記法によると, 上述の数式は, $/--ab-cd--ef-gh$ と括弧なしで表示できる. これとは逆に, 数式の逆ポーランド記法（後置記法）とは, $a+b$ を $ab+$ と表記する記法のことである. この記法によると, 上述の数式は, $ab-cd--ef-gh--/$ と, これも括弧なしで表示できる. このような（逆）ポーランド記法による表示は順序根つき木を利用すると簡単に求まる. 数式を表したラベルつき順序根つき木を T とする. T は辺を交差させず, 葉を水平に揃えて描いたときに, その葉が左から

$$v_1, v_2, \ldots, v_s \tag{5}$$

と並ぶとする. ここで, T の根から v_s への全域最短半歩道で葉がこの順に現れるものを w とすれば, w にはじめて現れるのが早い順にすべての頂点を重複なく左から右に並べ, それをラベルに変換すればポーランド記法を得る. 同様に, T の根から v_1 への全域最短半歩道で葉が (5) の逆順に現れるものを w' とすれば, w' にはじめて現れるのが早い順にすべての頂点を重複なく右から左に並べ, それをラベルに変換すれば逆ポーランド記法を得る.

(ex1) (1) 対称的なダイグラフ, 非閉路的なダイグラフ, 完全ダイグラフの例をそれぞれあげよ. (2) 6 頂点を持つトーナメントをいくらか描き, それぞれのハミルトン道を見つけよ. (3) トーナメントはハミルトン道を持つことを示せ. (4) 深さ 2 および 3 の 2 分木をすべて求めよ.

- 7 -（連結性）ダイグラフに対しては, 以下の 3 つの連結性が考えられる.

1: 強 (連結): 任意の異なる頂点 u,v に対して, u から v への道（と v から u への道）が存在する. [括弧内はなくても同値.]

2: 片方向 (連結): 任意の異なる頂点 u,v に対して, u から v への道か, または v から u への道が存在する.

3: 弱 (連結): 任意の異なる頂点 u,v に対して, u から v への半道が存在する.

強ならば片方向, 片方向ならば弱である. 弱でもないときは非連結という. 片方向であって強でないときは狭義片方向, 弱であって片方向でないときは狭義弱という. 弱連結のことを単に連結ともいう.

連結性の判定には次の定理が有効である.

(T3) D を有限ダイグラフとする.

$$\begin{array}{llcl} 1: & D \text{ が強} & \Longleftrightarrow & D \text{ が閉じた全域歩道を持つ.} \\ 2: & D \text{ が片方向} & \Longleftrightarrow & D \text{ が全域歩道を持つ.} \\ 3: & D \text{ が弱} & \Longleftrightarrow & D \text{ が全域半歩道を持つ.} \end{array} \tag{6}$$

($\because$) 1: ($\Rightarrow$) D が強とする. D において最も多くの種類の頂点を通る歩道を 1 つ選び, これを $w = v_0 v_1 \dots v_n$ とする. もし w が全域歩道でないなら, w に登場しない頂点 v を取れる. D が強なので, v_n から v への道があり, これを w の終点に繋げることで歩道 w' を得る. しかし, w' は明らかに w より多くの種類の頂点を持つので仮定に反する. ゆえに w は全域歩道である. 次に, D が強なので v_n から v_0 への道があり, これを w の終点に繋げれば, 閉じた全域歩道 w'' を得る. (q.e.d.)

1: ($\Leftarrow$) D が閉じた全域歩道 w を持つとする. 任意の異なる頂点 u, v を取る. これらが w にこの順で登場すれば, 歩道 $u \longrightarrow v$ が得られる. これを近道して道 $u \longrightarrow v$ を得る. w に v, u の順に登場しても, w の始点 v_0 を経由して歩道 $u \longrightarrow v_0 \longrightarrow v$ が存在するので, 近道して道 $u \longrightarrow v$ を得る. (q.e.d.)

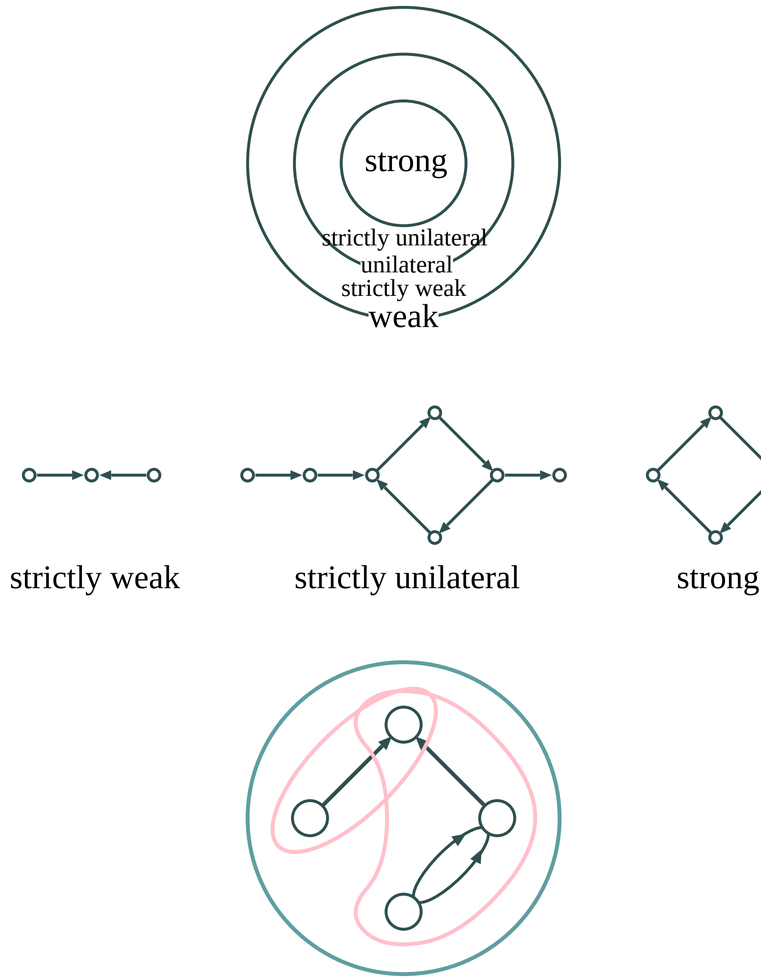
2: ($\Rightarrow$) 背理法による. D が片方向とする. ここで D が全域歩道を持たないと仮定する. D において最も多くの種類の頂点を通る歩道を 1 つ選び, これを $w = v_0 v_1 \dots v_n$ とする. このとき, 仮定より, w に使われていない頂点 u が D 内に存在する. 今, i を v_i から u への道が存在するような最大の番号とする. もしそのような番号がなければ, $i = -1$ とおく. すると, v_{i+1} から u への道はないのだから, D が片方向であることより, u から v_{i+1} への道があることになる. したがって, 新たな歩道 $\tilde{w} = v_0 v_1 \dots v_i \longrightarrow u \longrightarrow v_{i+1} \dots v_n$ が得られる. しかしこれは, w が最も多くの種類の頂点を通るということに反する. (q.e.d.)

2: ($\Leftarrow$) D が全域歩道 w を持つとする. 任意の異なる頂点 u, v を取る. w においては, u, v がこの順に登場するか, または逆の順に登場すると考えてよいので, u, v を両端点とする歩道が得られる. これを近道して u, v を両端点とする道を得る. (q.e.d.)

3: より簡単なので省略.

ダイグラフ D に対して, D の極大な弱部分ダイグラフを D の弱 (連結) 成分という. これは多重グラフの連結成分と同様の概念で, 直感的には弧で繋がったひとかたまりの部分ダイグラフのことである. 同様にして, D の強 (連結) 成分, 片方向 (連結) 成分は, それぞれ D の極大な, 強部分ダイグラフ, 片方向部分ダイグラフのことである. 2 つの強部分ダイグラフ $D_1 = (V_1, A_1)$, $D_2 = (V_2, A_2)$ があって, これらが少なくとも 1 つの頂点を共有していれば, D_1, D_2 の結び（正確には $V_1 \cup V_2$ から誘導される部分ダイグラフ）はまた強である. したがって, 一般に弱成分はいくらかの強成分に分解され, 強成分同士が適当に弧で繋がれた形になっている. ただし, いくらかの強成分がサイクルで繋がれてしまうと, それらが 1 つの強成分になってしまうので, それは禁止される. すなわち, 強成分を 1 つの頂点で表して単純化すれば, 弱成分は非閉路的な弱ダイグラフ P を構成する. そこで $\longrightarrow$ を $\leq$ と考えると, P は順序集合の構造を持ち, その中での片方向成分は, P の中の極大な鎖に相当する.（$\Rightarrow$ 11 章）

(ex2) (1) 強, 狭義片方向, 狭義弱のダイグラフの例をあげよ. (2) 完全ダイグラフは強であることを示せ. (3) トーナメントは片方向であることを示せ.



strong, unilateral, and weak components

Figure 4:

- 8 -（オイラーダイグラフ）多重グラフの場合同様, オイラーダイグラフであるための条件は比較的簡潔なものである.

(T4) ダイグラフ D がオイラーダイグラフであるための必要十分条件は, D が孤立頂点を除いて弱であり,[1] 各頂点 v に対して, $\deg^+(v) = \deg^-(v)$ がなりたつことである.

(∵) 多重グラフにおける類似の定理: 5 章 (T4) とほぼ同様に証明できる. D をオイラーダイグラフとする. D はオイラー回路 w を持つので, 孤立頂点でない任意の頂点 u, v に対して, 小道 $u \longrightarrow v$, したがって道 $u \longrightarrow v$ があるため, 孤立頂点を除けば, D は強であり, したがって弱である. 次に任意の頂点 v に対して, w が v に入っては出る度に v を終点とする弧と v を始点とする弧を消費し, 最後には使い尽くすので, v の入次数と出次数は等しくなる.

　逆に, D が孤立頂点を除いて弱であり, 各頂点の入次数と出次数が等しいとする. D が孤立頂点のみからなる場合は明らかにオイラーダイグラフになるので, D に孤立頂点でない頂点 u があるとし, これを始点とする最長の小道を w とする. 各頂点の入次数と出次数が等しいので, w は u 以外の頂点で止まることはありえない. ゆえに w は回路である. そこで, w がオイラー回路になることを背理法で示す. w がオイラー回路でないとすると, w が通らない弧が存在するが, そのような弧の中で, w が通る頂点 v を端点とする

[1] D が孤立頂点のみからなる場合を含む.

もの e がある．（でなければ w 上の頂点が w が通過していない頂点に半道で到達できないので w は孤立頂点を除いて全域になり, e が存在して矛盾する.）e の向きがどちらであれ, $\deg^+(v) = \deg^-(v)$ より, v を始点とし, w が通らない弧 e_1 が存在する．ゆえに, w が通っていない弧を用いた小道 $ve_1v_1\ldots$ があり, 上述の議論と同様にして, これは v に至るまで延長でき, $w' = ve_1v_1\ldots e_nv$ を得る．そこで w, w' を繋げれば, w より長い回路 $\tilde{w}$ を得て矛盾する．(q.e.d.)

(note) (T4) より, ダイグラフが弱かつ $\deg^+(v) = \deg^-(v)$ $(v \in V)$ ならば, 強であることがわかる．

(ex3) 5 頂点を持つトーナメントでオイラーダイグラフになるものを見つけよ．

- 9 -（隣接行列）ダイグラフ D の頂点を $v_1, \ldots, v_p$ とおくとき, D の隣接行列 $M = (m_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, p)$ を次で定義する．

$$m_{ij} = (v_i \text{ から } v_j \text{ への弧の数}) \tag{7}$$

これは多重グラフの隣接行列に相当するものであるが, 一般に対称行列にはならない．隣接行列が対称行列になるためには, ダイグラフが対称的であることが必要十分である．また, 非負整数を成分とする任意の正方行列 M に対して, あるダイグラフ D が存在して, D の隣接行列が M になる．ダイグラフ D からその隣接行列 M を作成すれば, M から D と同型なダイグラフを再現できる．ただし同型なダイグラフでも, 頂点の順序によって隣接行列が変わりうることに注意する．

多重グラフの場合と同様, ダイグラフ D が非連結のとき, その弱成分を $D_1, \ldots, D_s$ とすれば, D のすべての頂点を, D_1 の頂点から順に D_s の頂点まで並べることで, D の隣接行列 M は, 各 D_i の隣接行列 M_i を用いて,

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & O & \ldots & O \\ O & M_2 & \ldots & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & \ldots & O & M_s \end{pmatrix} \tag{8}$$

のように表せる．加えて, 多重グラフの場合と同様に, 次の定理がなりたつ．

(T5) M をダイグラフ D の隣接行列とする．このとき, $M^n = \left(m_{ij}^{(n)}\right)$ とおくと,

$$m_{ij}^{(n)} = (v_i \text{ から } v_j \text{ への長さ } n \text{ の歩道の数}). \tag{9}$$

(∵) n に関する帰納法による．$n = 1$ では長さ 1 の歩道は 1 つの弧に対応するので明らかに成立する．$n-1$ で成立を仮定する．$M^n = MM^{n-1}$ より,

$$\begin{aligned} m_{ij}^{(n)} &= \textstyle\sum_{k=1}^{p} m_{ik} m_{kj}^{(n-1)} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{p} (\text{長さ 1 の歩道 } v_i \longrightarrow v_k \text{ の数}) \cdot (\text{長さ } (n-1) \text{ の歩道 } v_k \longrightarrow v_j \text{ の数}) \\ &= (\text{長さ } n \text{ の歩道 } v_i \longrightarrow v_j \text{ の数}). \end{aligned} \tag{10}$$

ここで, 最後から 2 番目の式は, 始点 v_i の次の頂点が何であるかによって長さ n の歩道を分類して, その総数を数えている式なので, 最後の式に等しい．これより, 命題は n でもなりたち, 帰納法が完成した．(q.e.d.)

この定理より, ダイグラフが強かどうかを計算で判定できる次の定理を得る．

(T6) D を p 頂点のダイグラフ, M を D の隣接行列, E を p 次単位行列とするとき,

$$D \text{ が強} \iff E + M + M^2 + \cdots + M^{p-1} \text{ が } 0 \text{ 成分を持たない．} \tag{11}$$

($\because$)

$$
\begin{aligned}
D\text{ が強} \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{任意の異なる } u,v \text{ に対して, 道 } u \longrightarrow v \text{ がある.}\\
&\Longleftrightarrow \quad \text{任意の異なる } u,v \text{ に対して, 長さ } (p-1) \text{ 以下の歩道 } u \longrightarrow v \text{ がある.}\\
&\Longleftrightarrow \quad E + M + M^2 + \cdots + M^{p-1} \text{ が } 0 \text{ 成分を持たない.} \quad \text{(q.e.d.)}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

(ex4) 次のダイグラフ D の隣接行列を M とするとき, M^5 を求めよ.

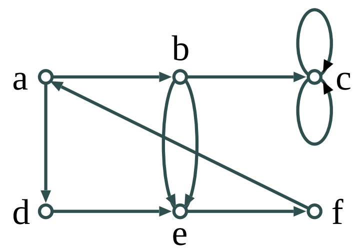


Figure 5:

(ans)

$$
M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array}\\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0\\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
\tag{13}
$$

であり, M^5 の (i,j) 成分は D における i から j への長さ 5 の歩道の数になるので, 以下それを求める.

$$
a \begin{cases} \xrightarrow{2^3} c \qquad (8) \\ \xrightarrow{3} f \longrightarrow a \begin{cases} \longrightarrow b \qquad (3) \\ \longrightarrow d \qquad (3) \end{cases} \end{cases}
$$

$$
b \begin{cases} \xrightarrow{2^4} c \qquad (16) \\ \xrightarrow{2} f \longrightarrow a \begin{cases} \longrightarrow c \qquad (2) \\ \xrightarrow{3} e \qquad (6) \end{cases} \end{cases}
$$

$$
c \xrightarrow{2^5} c \qquad (32)
$$

$$
d \longrightarrow f \longrightarrow a \begin{cases} \longrightarrow c \qquad (1) \\ \xrightarrow{3} e \qquad (3) \end{cases}
$$

$$
e \longrightarrow f \longrightarrow a \begin{cases} \xrightarrow{2} c \qquad (2) \\ \xrightarrow{3} f \qquad (3) \end{cases}
$$

$$
f \longrightarrow a \begin{cases} \xrightarrow{2^2} c \qquad (4) \\ \xrightarrow{3} f \longrightarrow a \qquad (3) \end{cases}
$$

$$
\therefore \ M^5 = \begin{pmatrix}
0 & 3 & 8 & 3 & 0 & 0\\
0 & 0 & 18 & 0 & 6 & 0\\
0 & 0 & 32 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0\\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3\\
3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}. \tag{14}
$$

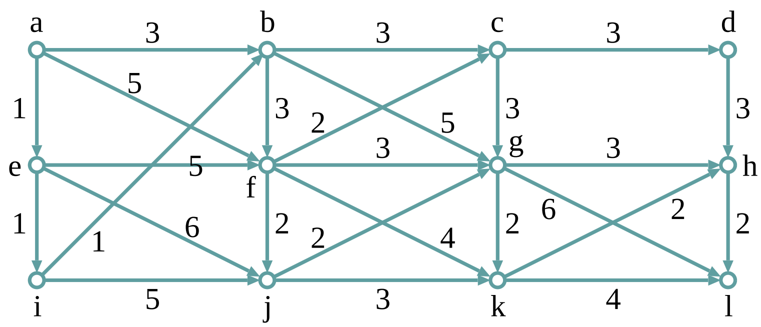
- 10 -（最短道）ラベルつきダイグラフとは, 弧に適当な数（重み）が割り付けられたダイグラフのことである. 弧 e の重みを $w(e)$ で表す. ラベルつきダイグラフにおける歩道の長さとは, 用いた弧の重みの和である. ただし, 重複して弧を用いた場合はそのつど重みを加算する. したがって最短道とは, 重みの和が最小になる道のことである. これを求めるのに有効なアルゴリズムを次に示す.

（最短道を求めるアルゴリズム）

1: 始点に 0 とかく.

2: 頂点 v を終点とする各々の弧 e_i の始点 u_i に数 m_i がかかれたとき, $m_i + w(e_i)$ を最小とするすべての弧の先端をマークし, その最小値を v にかく.

3: これを繰り返して終点にかかれた数が最短道の長さであり, マークされた弧のみを使って得られる道がすべての最短道である.



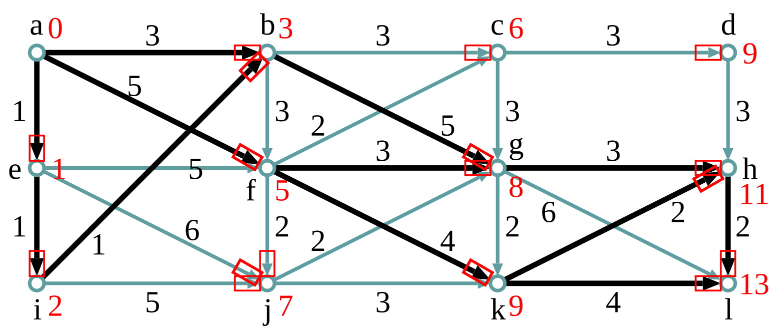


Figure 6:

この例では, a から l への最短道は $abghl$, $aeibghl$, $afghl$, $afkhl$, $afkl$ でその長さは 13 になる.

8章　有限状態機械, 有限オートマトン

☆☆☆

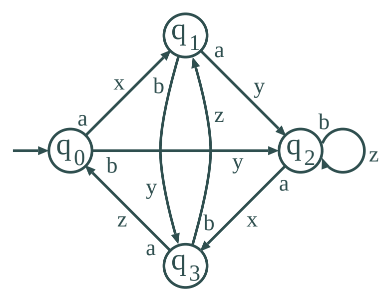
キーワード: 有限状態機械, 有限オートマトン, 状態遷移図, 決定性, 非決定性

- 1 -（有限状態機械）有限個の取り得る内部状態 $q_0, q_1, \ldots, q_n$ を持ち, 入力記号に応じてその内部状態を変えながら, 記号を出力していく仮想的な機械を有限状態機械という. 有限状態機械 M は形式的には $M = \langle A, S, Z, q_0, f, g \rangle$ という組で表される. ここでその各要素は以下の通りである.

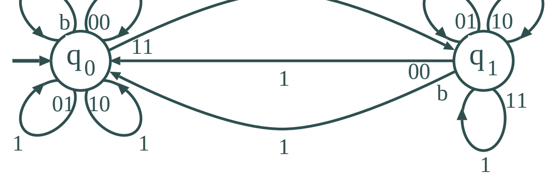
$$\begin{array}{lll} A = \{\text{入力記号全体}\} & & \\ S = \{\text{内部状態全体}\} & f : S \times A \longrightarrow S & :\text{状態遷移関数} \\ Z = \{\text{出力記号全体}\} & g : S \times A \longrightarrow Z & :\text{出力関数} \\ q_0 = \text{初期状態} & & \end{array} \tag{1}$$

有限状態機械は, 状態遷移関数と出力関数および初期状態 q_0 を指定すれば決定する. それを表で書いたものを状態遷移表, ダイグラフで描いたものを状態遷移図という. 状態遷移図の方が直観的に理解しやすい. 以下に簡単な有限状態機械の例を示す. ただし, 左が状態遷移表, 右がそれに対応する状態遷移図である. 状態遷移図では, 初期状態 q_0 を指定する弧（矢印）が付記される.

	a	b
q_0	q_1,x	q_2,y
q_1	q_2,y	q_3,y
q_2	q_3,x	q_2,z
q_3	q_0,z	q_1,z



この機械において $ababba$ を入力すると, $xyzyzx$ が出力される. この例では, 入力に対する出力には特に意味を持たせることができないが, 意味のある働きを持った機械を構成することもできる. 次に 2 進数の足し算をさせる機械を示す.



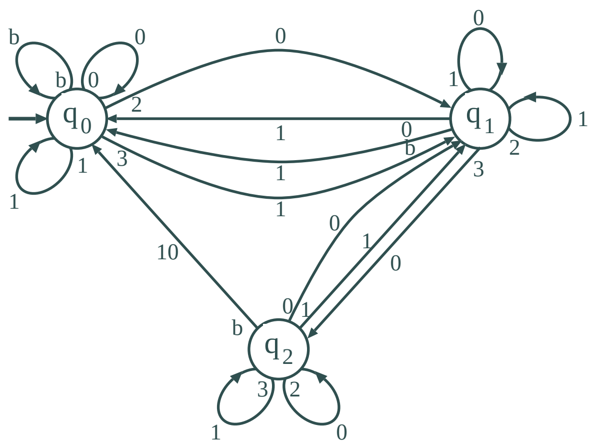
この機械では, 2 進数の足し算

$$\begin{array}{rl} & a_n \ldots a_2 a_1 a_0 \\ + & b_n \ldots b_2 b_1 b_0 \\ \hline \end{array} \tag{2}$$

をさせるとき, $a_0b_0\ a_1b_1\ \ldots$ の順に入力を行う. したがって入力記号は 0 と 1 の 2 つの数の並びで, 2 文字で 1 つの記号と解釈する. a_nb_n 入力後は b（空白）を入力して計算を終

了する．答えは1の位から順に出力される．ここで, q_0 は繰り上がりのない状態, q_1 は繰り上がりがある状態を表している．

次に示すのは, 3つの2進数を同時に足すことのできる有限状態機械である．



$$\begin{array}{rl} & a_n \ldots a_2 a_1 a_0 \\ & b_n \ldots b_2\, b_1 b_0 \\ + & c_n \ldots c_2\, c_1 c_0 \\ \hline \end{array} \tag{3}$$

ここでは簡単のため, 本来の入力記号 $a_j b_j c_j$ の代りに $a_j + b_j + c_j$ を10進数で表したものを入力記号として用いている．q_0, q_1 は前の例と同様で, q_2 は1桁先が繰り上がった状態を表している．

- 2 -（有限オートマトン）出力のない有限状態機械が有限オートマトンである．ただし, その内部状態の中には受理状態と呼ばれる特別な状態がある．受理状態は複数個あってもよい．有限オートマトン M は形式的には $M = \langle A, S, T, q_0, f \rangle$ という組で表され, 記号の意味は有限状態機械の場合と同じである．ただし,

$$T = \{ \text{受理状態全体} \} \subset S. \tag{4}$$

有限オートマトンは, 入力された記号列[1] に対して, これを受理または却下する機能を持つ．入力記号に応じて, 初期状態から始めて次々に状態を変化させていき, 入力を終了したときの状態が受理状態であれば記号列を受理し, そうでなければ却下する．このように原理は単純であるが, 様々な機能を持った有限オートマトンを構成することができる．オートマトンには, その構成が違っていても, 全く同じ働きをするものがある．このようなオートマトンを, 同値なオートマトンと呼ぶ．あるオートマトンを同値でより簡単な構造のオートマトンに変形する（同値変換する）ことは大切である．

オートマトンには決定性と非決定性の2種類がある．決定性とは, 各内部状態において入力を定めれば次に移るべき状態が一意に決定するという本来のオートマトンを指し, 非決定性とは, 入力を定めたときに次の状態が複数個（0個もありうる）存在するようなオートマトンである．言い換えると非決定性とは, $M = \langle A, S, T, Q_0, f \rangle$ において f が

$$f : S \times A \longrightarrow 2^S, \tag{5}$$

すなわち状態と入力から状態の集合への関数となっているものである．（初期状態もいくらかの状態の集合 Q_0 でよい.） 非決定性オートマトンの受理については次のように考える．記号を入力していくと, 途中で（あるいははじめから）内部状態を複数個持つようになる．このときそれらの状態に対して入力に対する状態遷移を行い, 得られたすべての状

[1]記号列は空列（何も入力されていない状態）でもよい．

態を次の状態とみなす．そして入力が終了した際, 持っている状態のうちで少なくとも 1 つの状態が受理状態であれば, 入力記号列を受理するものとする．途中で状態が空になる場合は, 機械は停止し記号列を却下する．

(T1) 非決定性有限オートマトンは, 決定性有限オートマトンに同値変換できる．

(∵) 非決定性有限オートマトン $M = \langle A, S, T, Q_0, f \rangle$ を取る．M において複数個の状態を取ったとき, 入力を与えると, f により次の複数個の状態が決まる．そこでこのような状態の集合を 1 つの状態と思うことで, 決定性に変換できる．2^S を新たに状態の集合 $\tilde{S}$ とおけば,

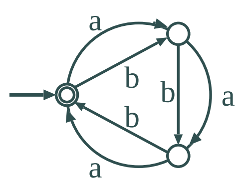
$$\begin{array}{rccc} \tilde{f}: & \tilde{S} \times A & \longrightarrow & \tilde{S} \\ & (\{q_1, q_2, \ldots, q_s\}, a) & \longmapsto & f(q_1, a) \cup f(q_2, a) \cup \cdots \cup f(q_s, a) \end{array} \tag{6}$$

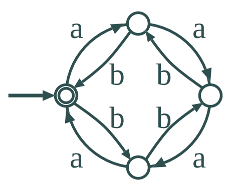
により, 状態遷移関数 $\tilde{f}$ を定義できる．また受理状態は,

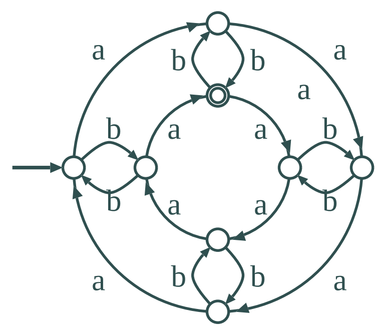
$$\tilde{T} = \{Q \subset S \mid Q \cap T \neq \emptyset\} \tag{7}$$

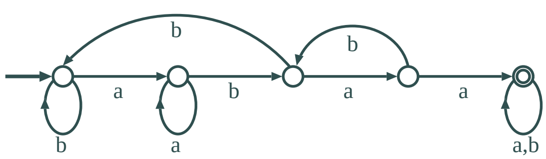
で定める．このとき M と同値な決定性有限オートマトン $\tilde{M} = \langle A, \tilde{S}, \tilde{T}, Q_0, \tilde{f} \rangle$ が得られる．(q.e.d.)

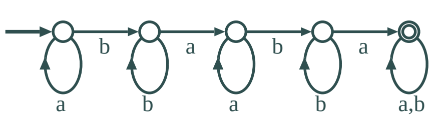
- 3 -（種々の有限オートマトン）ここでは決定性有限オートマトンの具体例をいくらか構成してみよう．

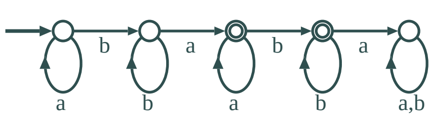
(A)


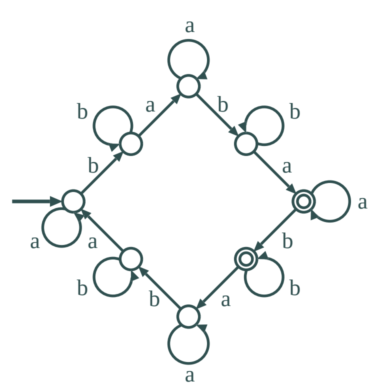
(B)


(C)


(D)


(E)


(F)


(G)


(A) は, a, b の個数の和が 3 の倍数になるような記号列のみを受理するオートマトンで, 3 角形で構成されている.

(B) も同様だが, b が入ったときの弧の向きが逆になっており, a, b の個数の差が 4 の倍数になるような記号列のみ受理する.

(C) は a が入る度に右周りに回転し, b が入る度に外側と内側の円を行き来するので, a が 4 の倍数 $+1$ 回, b が奇数回現れる記号列のみ受理する.

(D) は $abaa$ が部分列として含まれる記号列のみ受理するようなオートマトンである.

(E)–(G) については, ba が部分列としてどのように含まれるかを判定する機能を持つ. (E) は ba を部分列として 2 つ以上含む記号列のみ受理する. (F) は ba を部分列として 1 つだけ含む記号列のみ受理する. (G) は ba を部分列として 4 の倍数+2 個含む記号列のみ受理する.

9章 組合せ論

☆9☆

キーワード: 順列, 組合せ, 重複順列, 順序分割, 分割, スターリング数, ベル数,
ピザ順列, 多面体順列, 多項定理, 最短道の数, トーナメント表の数

- 1 -（順列）n 個の異なる対象から, 重複しないで r 個取り出して, これを 1 列に並べたものを（異なる n 個のものの）r 順列という. その総数は $\boxed{n(n-1)\dots(n-r+1)}$ である.

- 2 -（組合せ）n 個の異なる対象から, 重複しないで r 個取り出して作った集合を（異なる n 個のものの）r 組合せという. r 組合せは r 順列を集合にすることで得られる. このとき, 単に順序が異なるだけの r 順列は同じ r 組合せに対応し, 組合せと見たときは同一視される. 組合せとして同一視される r 順列は $r!$ 個ずつあるので, r 組合せの数は次のように計算される.

$$\begin{aligned}（r\text{ 組合せの総数}） &= \frac{（r\text{ 順列の総数}）}{（\text{組合せとして互いに同一視される }r\text{ 順列の数}）} \\ &= \tfrac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} = \tfrac{n!}{r!(n-r)!}.\end{aligned} \tag{1}$$

この数を $\binom{n}{r}$ で表す.（$\binom{n}{r}$ は 2 項係数と呼ばれる.）

- 3 -（重複順列）n 個の対象があり, これらの中には同一のものが幾らかずつ含まれているとする. すなわち, 第 1 種のもの（これらは同一とみなす. 以下同様）が n_1 個, 第 2 種のものが n_2 個, ..., 第 s 種のものが n_s 個, 合計 n 個の対象があるとする. これらをすべて取り出し 1 列に並べたものを重複順列という. 重複順列の総数 p は, n 個の対象をすべて区別したときの順列の総数 $n!$ を, 実際には $\boxed{\text{互いに同一視される順列の数 } g}$ で割ることで得られる. たとえば, $aaabbbbcc$ を用いた重複順列を考える. 同じ記号に添字をつけてすべて区別して $a_1a_2a_3b_1b_2b_3b_4c_1c_2$ を考え, これを並べ替えて $b_2a_1b_3c_2a_3b_1b_4a_2c_1$ を作ったとき, 添字を消すことで重複順列 $babcabbac$ が得られる. ここで a, b, c の添字のみ付け変えた並べ方は同じ重複順列に対応する. よってこの場合 $g = 3!4!2!$ であり, 重複順列の数は $p = \frac{9!}{3!4!2!}$ となる. 同様にして, 一般には次のようになる.

$$p = \frac{n!}{g} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_s!}. \tag{2}$$

(ex1) 次の文字列を並べ替えて得られる文字列は何通りあるか.（もとのままも含む）
(1) mississippi (2) tennessee (3) connecticut

- 4 -（順序分割と分割）n 個の元からなる集合 A を分割したのちに, その細胞 A_i たち $(i = 1, \dots, s)$ を 1 列に並べたものを A の順序分割という. すなわち順序分割 Γ は,

$$\Gamma = (A_1, A_2, \dots, A_s) \tag{3}$$

の形になる. ここで $|A_i| = n_i$ とするとき, 順序分割の数 p は, A から順に $A_1, A_2, \dots, A_s$ を取り出していく場合の数だから,

$$\begin{aligned} p &= \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{s-1}}{n_s} \\ &= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\cdots\frac{(n-n_1-\cdots-n_{s-1})!}{n_s!(n-n_1-\cdots-n_{s-1}-n_s)!} \\ &= \frac{n!}{n_1!n_2!...n_s!}. \end{aligned} \tag{4}$$

この数は - 3 - の重複順列の数と同じであることに注意する. 3 章で見たように, B を s 元集合とするとき, A を s 個の細胞に分ける順序分割の総数は, A から B への全射の数に等しい.

A の分割 $\{A_1, A_2, \ldots, A_s\}$ の数を求めるには, まず順序分割 $(A_1, A_2, \ldots, A_s)$ の数を考え, 次に分割としては互いに同一視されるものの数を考える. すなわち, これまで見てきたように分割の数 p は,

$$p = \frac{（順序分割の数）}{（分割として互いに同一視される順序分割の数）} \tag{5}$$

で計算される. そこで互いに同一視される順序分割とはなにかというと, 同じ大きさの細胞同士の入れ替えを行った順序分割であり, 大きさが違う細胞を入れ替えることは, 順序分割の設定 $|A_i| = n_i$ が変わってしまうので禁止される. つまり, $n_1, n_2, \ldots, n_s$ の中で同じ数の重複回数が $m_1, m_2, \ldots, m_t$ ならば,

$$p = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_s! \cdot m_1!m_2!\ldots m_t!}. \tag{6}$$

たとえば, 17 元からなる集合を 3 元集合 2 つ, 2 元集合 4 つ, 1 元集合 3 つに分割する方法の数は, $\frac{17!}{3!3!2!2!2!2!1!1!1!\cdot 2!4!3!}$ となる.

(ex2) (1) 10 個の異なる玩具があり, これを 5 人の子供に, 年齢順に 3,2,2,2,1 個ずつに分けて与える. 何通りの方法があるか. (2) 10 個の異なる玩具を 3,2,2,2,1 個ずつに分けて 5 つの袋に詰めるとき, 何通りの方法があるか. ただし袋はすべて同一とする. (3) 10 個の異なる玩具を 5 人の子供に 3,2,2,2,1 個ずつに分けて与える. 何通りの方法があるか.

n 元集合 A を k 個の細胞に分ける分割の総数を第 2 種スターリング数といい, $S(n,k)$ で表す. 単に A の分割の総数をベル数といい B_n で表す. 便宜上, $S(0,0) = 1$, $S(n,0) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $B_0 = 1$ とおく. 定義より,

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) \tag{7}$$

がなりたつ. $A' = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ として, 0 を含む細胞と, A' からそれを除いた部分集合の分割との組合せを考えると,

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \tag{8}$$

を得る.

(note) ちなみに第 1 種スターリング数とは

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k \tag{9}$$

で定義される $s(n,k)$ である. これには符号がつくが, 符号を消したもの $(-1)^{n-k}s(n,k)$ を $c(n,k)$ とかき, 符号なし第 1 種スターリング数という. したがって,

$$x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} c(n,k)x^k \tag{10}$$

である．$c(n,k)$ は，n 文字の置換のうちで，k 個の巡回置換に分解されるものの数である．それゆえ，（あるいは (10) より） $\sum_{k=0}^{n} c(n,k) = n!$ がなりたつ．

- 5 -（ピザ順列）ピザ順列は重複円順列の俗称である．重複を含む対象を一定の大きさの円周上に等間隔に並べたものをピザ順列という．ここで，ピザ順列では回転して互いに移り合う配列は同一視することにする．今までの例に習えば，ピザ順列の総数 p は，

$$p = \frac{\text{（回転による同一視をしないときの並べ方の総数）}}{\text{（回転により互いに同一視される並べ方の数）}} \tag{11}$$

で表されそうであるが，実際には "回転により互いに同一視される並べ方の数" が考えている配列の対称性によって変わってくるので，一般にはこのような簡単な式では表せない．また，ピザ順列は円順列と重複順列の組合せだということで，$p = \frac{(n-1)!}{n_1!n_2!\ldots n_s!}$ と考える人がいるが，これも早合点である．たとえば，6 片からなるピザに対して A, B 2 種の具材が 3 片分ずつあるときに，可能なピザの数を考えてみよう．円順列を利用すると，

$$p = \frac{(6-1)!}{3!\,3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10}{3} \tag{12}$$

のように分数になってしまうので，一般にはこの考え方が間違いであることがわかる．

ここで，6 片のピザに具材 A, B, C が 2 片分ずつある場合を考えよう．回転による同一視をしないとき，単なる重複順列なので配置の数は $\frac{6!}{2!2!2!}$ となる．（ここで具材が 2 つずつなので）この中に π 回転対称性のある配置が存在し，その個数は 3! である．なぜならば，A, B, C を右半分に並べる方法が 3! 通りあって，残りは π 回転対称性により決定するからである．それ以外の配置は回転対称性を持たない．したがって回転対称性を持たない配置は $\left(\frac{6!}{2!2!2!} - 3!\right)$ 通りある．回転対称性がない場合，回転により互いに同一視される配置が 6 ずつあり，π 回転対称性がある場合，回転により互いに同一視される配置が 3 ずつある．したがって同一視をしたときのピザの数 p は，

$$p = \frac{1}{6}\left(\frac{6!}{2!2!2!} - 3!\right) + \frac{1}{3} \cdot 3! = 16. \tag{13}$$

一般に，n 片からなるピザに，具材 $A_1, \ldots, A_s$ が各々 $n_1, \ldots, n_s$ 片分ずつあるとき，可能なピザの数 p を考えよう．ただし，$n_1 + \cdots + n_s = n$ とする．回転対称性を求めるには，$d = \gcd(n_1, \ldots, n_s)$（$n_1, \ldots, n_s$ の最大公約数）に注目する．$d = 1$ ならば回転対称性のある配置はなく，

$$p = \frac{(n-1)!}{n_1!n_2!\ldots n_s!} \tag{14}$$

となる．すなわち重複順列と円順列の組合せで求まる．

d が素数ならば，$2\pi/d$ 回転対称性のある配置と回転対称性のない配置のみが存在する．この場合は上で見た例と同様にして，

$$p = \frac{1}{n}\left(\frac{n!}{n_1!\ldots n_s!} - \frac{(n/d)!}{(n_1/d)!\ldots(n_s/d)!}\right) + \frac{d}{n}\frac{(n/d)!}{(n_1/d)!\ldots(n_s/d)!} \tag{15}$$

が得られる．

d が合成数のときは，話が非常に複雑になる．この場合 d の約数 u に対して，$2\pi/u$ 回転対称性を持つ配置が存在する．その数は

$$k(u) = \frac{(n/u)!}{(n_1/u)!\ldots(n_s/u)!} \tag{16}$$

で求められるが, 実はその中には, u の倍数かつ d の約数である u' に対して, $2\pi/u'$ 回転対称性を持つ配置が含まれていて, これを除かなくてはならない. この種々の回転対称性を持つ配置たちの包含関係は, d の正の約数たちが整除で順序づけられた集合 D_d（⇒ 11–12 章）で表される. その図式によって, 丁度 $2\pi/u$ 回転対称性を持つ配置の数 $g(u)$ が求められる. このとき,

$$p = \sum_{u|d} \frac{u}{n}\, g(u) \tag{17}$$

を得る. ここに, 和は d の正の約数 u 全体を亘る.（$u \mid d$ は u は d の約数の意味.）

(ex3) (1) 6 片からなるピザに, A, B 2 種の具材が 3 片分ずつあるとき, 可能なピザの数を求めよ. (2) 10 片からなるピザに, A, B, C 3 種の具材がそれぞれ 2,4,4 片分ずつあるとき, 可能なピザの数を求めよ. (3) 12 片からなるピザに, A, B, C 3 種の具材が 4 片分ずつあるとき, 可能なピザの数を求めよ. (4) 12 片からなるピザに, A, B 2 種の具材が 6 片分ずつあるとき, 可能なピザの数を求めよ.

- 6 -（多面体順列）多面体の面に適当な条件で色をつけたものを便宜上多面体順列と呼ぶことにする. ただし, 多面体順列では空間内で回転して互いに移り合う順列は同一視する. ここでは簡単のため, 正多面体に対して面の数だけ用意された色を重複なしに塗ることを考えよう. 正 n 面体が固定されたとき, その面の塗り方の数は $n!$ 通りである. ここで, 正多面体が回転することで, 互いに同一視される塗り方が得られる. その数 g は正多面体によって異なるが,

$$g = n \times v \tag{18}$$

で表される.（なぜか?） ただし, v は各面の頂点数である. こうして正多面体順列の数 p は次で与えられる.

$$p = \frac{n!}{nv} = \frac{(n-1)!}{v} \tag{19}$$

一般に多面体の色づけや色が重複する場合には, 個々の場合で十分考察する必要があるが, 今まで述べた考え方が有用になる.

(ex4) 正多面体 P とその面の数だけの色が与えられている. 次の各場合において, 面を与えられた色すべてを使って塗り分ける方法は何通りあるか. ただし, 回転によって互いに移り合うような塗り方は同一視する.

(1) $P =$ 正 4 面体 (2) 立方体 (3) 正 8 面体 (4) 正 12 面体 (5) 正 20 面体

- 7 -（多項定理）$(x_1 + x_2 + \cdots + x_s)^n$ の展開公式:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_s)^n = \sum_{\substack{n_1 + \cdots + n_s = n \\ n_1, \ldots, n_s \geq 0}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_s} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_s^{n_s}. \tag{20}$$

を多項定理という. ここで,

$$\tbinom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_s} = \tfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_s!} \tag{21}$$

を多項係数という. これは重複順列や順序分割の個数を表す式と一致する.

(∵) $(x_1 + x_2 + \cdots + x_s)^n$ を展開するとき, ベキ乗でまとめずにかくと,

$$x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n} \qquad (1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq s) \tag{22}$$

の形の項が 1 つずつ出てくることがわかる. このような項のうちで, 整理して

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_s^{n_s} \tag{23}$$

の形になるものは, x_1 が n_1 個, x_2 が n_2 個, ..., x_s が n_s 個あるような重複順列に対応していることがわかる．その総数を考えれば, (23) の項の係数は $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_s!}$ となる． (q.e.d.)

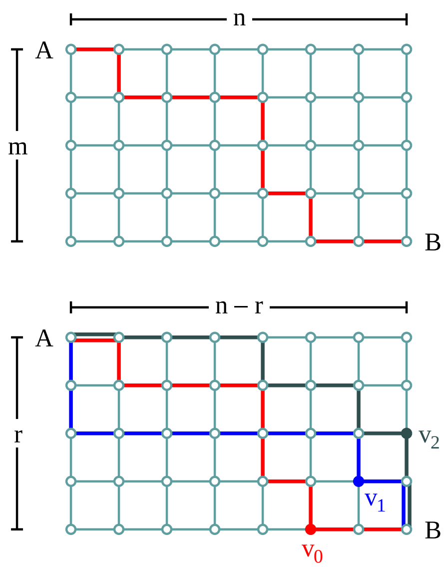
多項定理, 多項係数は, 特別な場合 $(s = 2)$ として 2 項定理, 2 項係数を含んでいる．ただし, $\binom{n}{r,n-r} = \binom{n}{r}$ とかく．

(ex5) $\displaystyle\sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} = 3^n$ を示せ.

- 8 - （2 項係数と最短道の数）長方形を縦横に区切り, $m \times n$ 個の小正方形からなるグラフを作る．このグラフの左上の頂点 A から右下の頂点 B への最短道の数を考えよう．最短道は, 右か下へ進んでいくことで得られるので,

$$\text{右下右右右下下右下右右} \tag{24}$$

のように右と下の列で表される．このような列は, $(m+n)$ 個の文字の列のどこに n 個の右を入れるかで決まってくるので, その総数は, $\binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m}$ で表される．この考えを応用すると, 2 項係数のいろいろな等式を証明できる．一例を次にあげる．

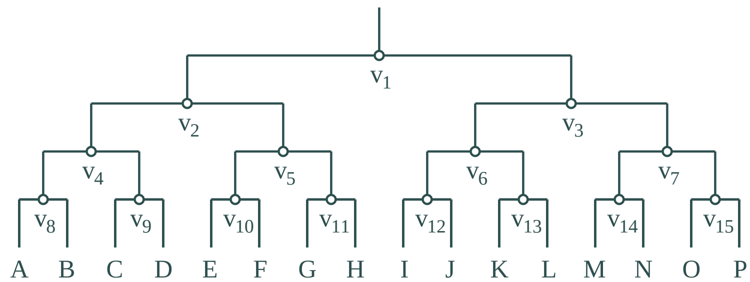


上の図において, A から B への最短道は, v_0, v_1, v_2 のうちのどれを通るかで分類できる．それらの数を計算すると,

$$\begin{aligned}
&v_0 \text{ を通る最短道の数} = \binom{n-2}{r} && v_1 \text{ を通る最短道の数} = \binom{n-2}{r-1} \cdot 2 \\
&v_2 \text{ を通る最短道の数} = \binom{n-2}{r-2} && \text{すべての最短道の数} = \binom{n}{r}. \\
&\therefore \ \binom{n}{r} = \binom{n-2}{r} + 2\binom{n-2}{r-1} + \binom{n-2}{r-2}.
\end{aligned} \tag{25}$$

(ex6) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$ を示せ.

- 9 -（トーナメント表の数）トーナメント試合における, 可能な組合せの数を考えよう. 簡単のため, まずシードがない場合を扱う. 16 人のトーナメント試合を行うとき, 単純に考えれば, 16 人の並べ方だけの可能性があるので, 16! の表がある. ところが, このうちいくつかは組合せとしては同一のものになっている. すなわち, 各ブロックを左右逆にした表は, 組合せとしては同じである. たとえば, 以下のトーナメント表において, v_1 を中心として左右を入れ替えた表は, もとの表と同じである. ここで, ブロックを入れ替えるときは, ブロック内の順序については, 何も変えないこととする. 次に, さらに小さいブロックを入れ替えることもできる. すなわち, v_2, v_3 を中心とした入れ替えである. 以下続けていくと, $16-1=15$ の点を中心とした入れ替えをすることができる. これらの操作は独立に行えるので, 2^{15} 個の表が互いに同一視される. 逆に, 組合せとして同じ表は, 各ブロックに同じ人の組合せが属しているはずなので, 上記の操作で必ず移り合える. こうして, 求める組合せの数は $\boxed{16!/2^{15}}$ となる. 同様にして, 2^n 人の場合ならば組合せの数は $2^n!/2^{2^n-1}$ となる.



n 人で自由にシードを入れてよい場合は, まずトーナメントの型を決め, それぞれの型に対して組合せの数を計算していく. 型については, たとえば 5 人の場合, $(4,1)$, $(3,2)$ のブロック分けができ,

$$\begin{aligned} &(4,1) \longrightarrow \begin{cases} ((3,1),1) \longrightarrow (((2,1),1),1) \\ ((2,2),1) \end{cases} \\ &(3,2) \longrightarrow ((2,1),2) \end{aligned} \tag{26}$$

とさらに細かく分けられるので, 3 つの型がある. 一般に, 各型に対して組合せの数を考える場合, 上のように順にブロックへ分解しながら組合せ数を計算する方法と, シード無しの場合で述べたような, 重複分を割って除く方法がある. 後者については, 表を書くときに, 2 つ並んだブロックについてつねに大きいものを左に書くようにする.（つねに右にしてもよい）こう書くことで, ブロックの型が同一の場合にすぐに見分けられる. そして左右のブロックの型が同一の場合のみ, それらのブロックの入れ替えを可能とし, 入れ替えを行ったものを組合せとして同一視する. この入れ替えのできる場所が e 個あれば, 組合せの数は $n!/2^e$ となる.

(ex7) (1) 8 人でチェスの試合をする. トーナメント方式でシードはなしとするとき, 組合せは何通りか. (2) $3 \leq n \leq 6$ とする. n 人でチェスの試合をする. トーナメント方式で自由にシードしてよいとするとき, 組合せは何通りか.

10 章　代数系の基礎

☆☆☆

- 1 -　群:　応用代数ハンドアウト 1 章 を参照のこと

- 2 -　環:　応用代数ハンドアウト 2 章 を参照のこと

- 3 -　体:　応用代数ハンドアウト 3 章 を参照のこと

11章 順序集合

☆9☆

キーワード: 順序集合, 双対, 最大元, 最小元, 極大元, 極小元, ハッセ図, 同型,
部分順序集合, 包含関係, 整除, 細分, 直和, 直積, 次数つき順序集合, 母関数

- 1 -（順序集合）反射的 かつ 反対称的 かつ 推移的な関係を, 順序関係あるいは順序という. 順序は通常 $\le$ で表す. 集合 P 上に 1 つの順序 $\le$ が与えられたとき, P をこの順序に関する順序集合または半順序集合という. P に応じて, 順序には様々なものが考えられる. P にある方法で順序を与える（入れる）とき, P はその方法で順序づけられると言い表す. 整数や実数間の普通の大小関係 $\le$ も順序であるが, この場合はすべての 2 元 a, b に対して,

$$a \le b \quad \text{または} \quad b \le a \tag{1}$$

がなりたつという性質があり, 特殊な順序である. このような順序を全順序と呼び, 全順序を持つ集合を, 全順序集合または鎖 (chain) と呼ぶ. 一般に鎖でない順序集合は, 2 元 a, b に対して, 必ずしも (1) がなりたつわけではない. (1) がなりたつ 2 元を 比較可能といい, なりたたなければ比較不能という. 任意の異なる 2 元が比較不能な順序集合を反鎖 (anti-chain) という. 順序集合が有限個の元からなるときは有限順序集合, そうでないとき無限順序集合という. なお, 空集合も順序集合とみなすことにする.

順序集合 P において, $a \le b$ かつ $a \ne b$ のとき $a < b$ とかき, a は b の前にある（a は b より小さい）または, b は a の後にある（b は a より大きい）という. 特に, $a < b$ かつ, $a < x < b$ をみたす x が存在しないとき, $a \ll b$ とかき, a は b の直前にある, または, b は a の直後にあるという.

順序集合 P に対して, 新たな順序 $\le'$ を

$$x \le' y \iff y \le x \tag{2}$$

で定義するとき, $\le'$ を $\le$ の双対順序という. P が $\le'$ に関してなす順序集合を P^* とかき, P の双対 (順序集合) という. 一般に, 順序集合に関するある概念があったとき, その中での順序を逆にして得られる概念をもとの概念の双対 (的) 概念という.

順序集合 P において, ある元 a が存在して, すべての $x \in P$ に対して $x \le a$ がなりたつとき, a を P の最大元といい, $\hat{1}$ で表す. 双対的に, すべての $x \in P$ に対して $a \le x$ がなりたつとき, a を P の最小元といい, $\hat{0}$ で表す. 最大元, 最小元は, それぞれ存在すればただ 1 つである. 最大元と最小元を持つとき, P を有界という. ある元 $a \in P$ に対して, $a < x$ をみたす x が存在しないとき, a を極大元という. 双対的に, ある元 $a \in P$ に対して, $x < a$ をみたす x が存在しないとき, a を極小元という. 定義より, 最大元は極大元であり, 最小元は極小元である.

順序集合 P の閉区間 $[a, b]$, および開区間 (a, b) は次で定義される.

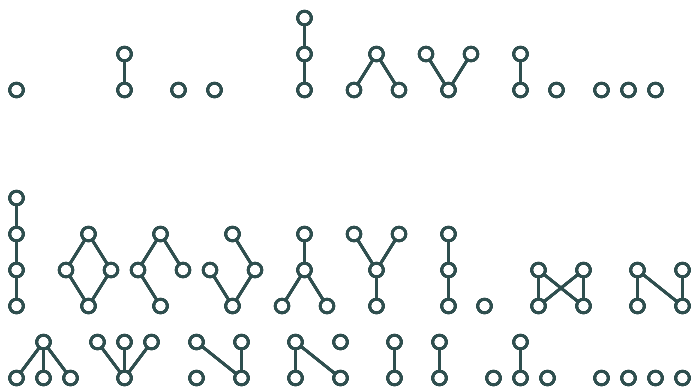
$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in P \mid a \le x \le b\} \\ (a, b) &= \{x \in P \mid a < x < b\} \end{aligned} \tag{3}$$

半開区間 $[a, b)$, $(a, b]$ も同様に定義される.

(ex1) 順序集合 P の最大元および最小元は存在すればただ 1 つであることを示せ.

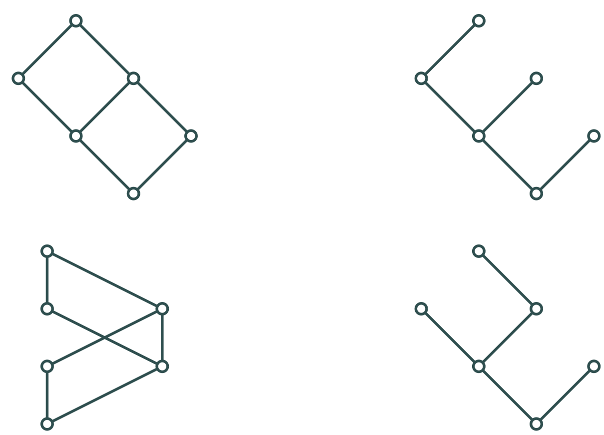
- 2 -（ハッセ図）順序集合 P は, 順序という関係が定義された集合なので, ダイグラフによって表現できる. $a \leq b$ ならば, $a \longrightarrow b$ というように弧を描いていけばよい. しかしこのようにして得られた図は必ずしもわかりやすくはない. そこで, 次のように図を簡略化することを考える.

まず, 順序が反射的であることからループは必ず描かれるので, これは省略することにする. ここで頂点を, 弧が必ず上向きになるように配置（すなわち, 大きいものを上になるように配置）してやれば, 弧を矢印のない辺で代用できる. また順序は推移的なので, その性質により当然描かれるべき弧は省略することにより, さらに簡明でかつ十分な図を得る. これを順序集合のハッセ図 (Hasse diagram) または図式という. 簡単に言うと, ハッセ図において a と b が結ばれるのは, $a \ll b$ または $b \ll a$ がなりたつときに限られ, このとき必ず大きいものを上にして結べばよい. 順序集合 P の双対 P^* のハッセ図は, P のハッセ図をさかさまにしたものである. 以下に 4 つ以下の元を持つ順序集合のハッセ図を示す.



(ex2) (1) 上の順序集合のうち, 有界な（最大元と最小元を両方持つ）ものはどれか.

(2) 上の各順序集合に対して, 極大元と極小元を求めよ. (3) 5–6 元からなる順序集合のハッセ図をいくらか求めよ.



- 3 -（同型）P, Q を順序集合とする. P から Q への 1 対 1 対応 φ であって,

$$x \leq y \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(x) \leq \varphi(y) \tag{4}$$

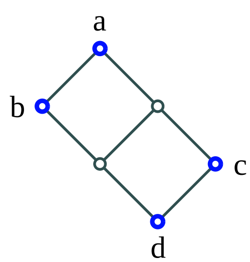
をみたすものが存在するとき, P と Q は (順序) 同型であるといい, $P \simeq Q$ とかく. このとき, φ を P から Q への (順序) 同型写像という. 簡単に言うと, ハッセ図を変形して同じにできれば, 同型である. 上に示した 4 つのうち, 縦に並んだ順序集合はそれぞれ同型である.

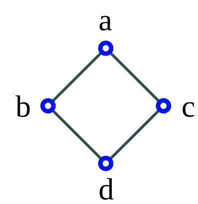
順序集合の同型については, 次がなりたつ.

$$\begin{array}{l} P \simeq P; \qquad P \simeq Q \iff Q \simeq P \\ P \simeq Q,\, Q \simeq R \Rightarrow P \simeq R \end{array} \tag{5}$$

順序集合 P が $P \simeq P^*$ をみたすとき, P を自己双対的 (self-dual) であるという. これは, ハッセ図をさかさまにしても同型であることに他ならない.

- 4 -（部分順序集合）P を順序集合とする. P の部分集合 Q に, P の順序をそのまま入れるとき, Q を P の部分順序集合という. P 自身や $\emptyset$ も P の部分順序集合である. 部分順序集合 Q のハッセ図を描くときは, P のハッセ図において省略されていた線が復活することがあるので, 注意する. 以下左の順序集合 P の部分順序集合 $Q = \{a, b, c, d\}$ は右のようになる.

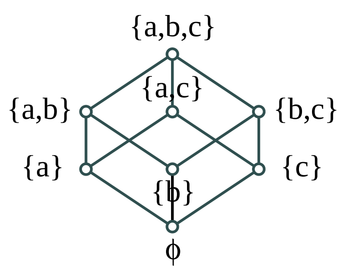




- 5 -（包含関係）集合 A のベキ集合 2^A（A の部分集合全体からなる集合）に,

$$X \leq Y \iff X \subset Y \tag{6}$$

で順序を入れることができる. このような順序を包含関係による順序といい, このとき 2^A は包含関係で順序づけられたという. $A = \{a, b, c\}$ のとき, そのハッセ図は次のようになる.

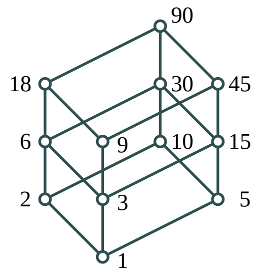


一般に 2^A は自己双対的である. これは 12–13 章で述べるブール代数の構造を持つ.

- 6 -（整除）正整数 n に対して, D_n を n の正の約数全体の集合とする. D_n 上の順序を,

$$x \leq y \iff x \mid y \tag{7}$$

で定義する. ここに, $x \mid y$ とは, y が x で割りきれる（x が y の約数, すなわち y が x の倍数）という意味である. このような順序を整除による順序といい, D_n は整除で順序づけられたという. この種の順序集合のハッセ図は, 少し工夫するときれいに描くことができる. たとえば D_{90} のハッセ図は,



これで見ると, 図の中で同じ方向に進むとき, 同じ数を掛けていることがわかる. きれいに描くことは, 順序集合の構造を把握するためにも大切なことである. D_n は自己双対的である. また 12 章で述べる束（分配束）の構造を持っている.

D_n に限らず, $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ の任意の部分集合 P に対して, これを整除で（すなわち (7) で）順序づけることができる. ただし, これは自己双対的とは限らない.

(ex3) (1) $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ とおく. $n = 1, \ldots, 4$ のとき, 2^A のハッセ図を描け.

(2) いろいろな n に対して D_n のハッセ図を描いてみよ.

(3) 2^A および D_n が自己双対的であることを示せ.

($\because$) (3)（2^A が自己双対的であること）$P = 2^A$ に対して, $P \simeq P^*$ を示す. P の順序 $\leq$ の双対順序（すなわち P^* の順序）を $\leq'$ とおく. P から P^* への写像 φ を

$$\varphi(X) = X^c \qquad (X \in P) \tag{8}$$

で定める. P^* から P への写像 ψ を

$$\psi(Y) = Y^c \qquad (Y \in P^*) \tag{9}$$

とすれば明らかに $\psi = \varphi^{-1}$ なので, φ は 1 対 1 対応である. また,

$$\begin{aligned} X \leq Y \quad &\Longleftrightarrow \ X \subset Y \ \Longleftrightarrow \ Y^c \subset X^c \ \Longleftrightarrow \ Y^c \leq X^c \\ &\Longleftrightarrow \ \varphi(Y) \leq \varphi(X) \ \Longleftrightarrow \ \varphi(X) \leq' \varphi(Y). \end{aligned} \tag{10}$$

ゆえに $P \simeq P^*$ である. (q.e.d.)

($\because$) (3)（D_n が自己双対的であること）$P = D_n$ とおき, $\varphi : P \longrightarrow P^*$ および $\psi : P^* \longrightarrow P$ を

$$\varphi(x) = \frac{n}{x} \quad (x \in P); \qquad \psi(y) = \frac{n}{y} \quad (y \in P^*) \tag{11}$$

とすれば明らかに $\psi = \varphi^{-1}$ である. ゆえに φ は 1 対 1 対応であり,

$$\begin{aligned} x \leq y \quad &\Longleftrightarrow \ x \mid y \ \Longleftrightarrow \ \tfrac{n}{y} \mid \tfrac{n}{x} \ \Longleftrightarrow \ \tfrac{n}{y} \leq \tfrac{n}{x} \\ &\Longleftrightarrow \ \varphi(y) \leq \varphi(x) \ \Longleftrightarrow \ \varphi(x) \leq' \varphi(y). \end{aligned} \tag{12}$$

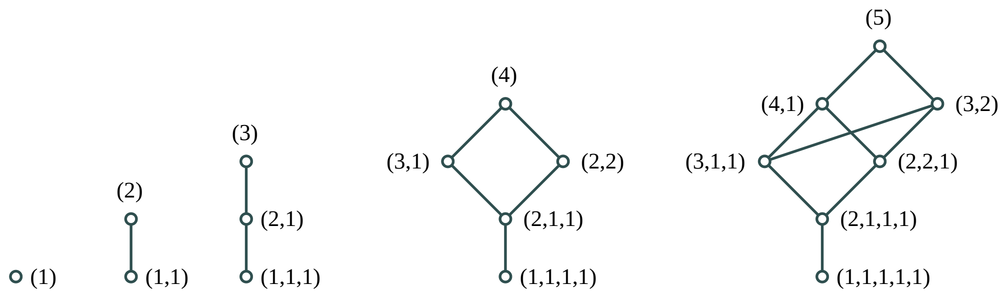
ゆえに $P \simeq P^*$ である. (q.e.d.)

- 7 -（細分）正整数 n を幾らかの正整数の和に分けることを n の分割という. ここで, 和の順序の違いは区別しないことにする. n の分割

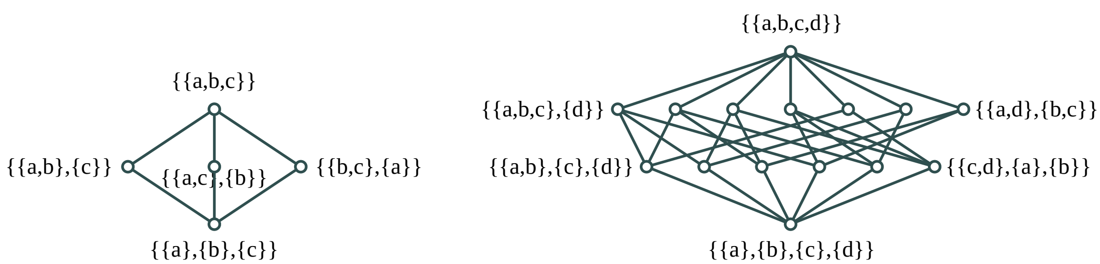
$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r \tag{13}$$

を $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ の形で表す. ただし, 順序の違いは考えないため, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r$ をみたすように並べることにする. また, r を λ の長さといい, $l(\lambda)$ で表す.

n の分割全体の集合を $\mathscr{P}(n)$ とかく. 分割 $\lambda \in \mathscr{P}(n)$ に対して, λ に等しいかまたは λ をさらに細かく分割したものを λ の細分という. 2 つの n の分割 λ, μ に対して, $\lambda \leq \mu$ を, λ は μ の細分であると定義する. このとき, $\leq$ は $\mathscr{P}(n)$ 上の順序になる. このような順序を細分による順序といい, $\mathscr{P}(n)$ は細分で順序づけられたという. なお, n の分割の総数を n の分割数といい, $p(n)$ で表す. $n \leq 5$ のときの $\mathscr{P}(n)$ のハッセ図は次のようになる.



同様にして, 適当な集合 A の分割全体 $\mathscr{P}(A)$ に対して, これを細分で順序づけることができる. $A = \{a, b, c\}$ および $A = \{a, b, c, d\}$ のときの $\mathscr{P}(A)$ のハッセ図を次に示す. ただし, 後者については一部の頂点に対応する元を省略した. $\mathscr{P}(A)$ の元の数はベル数 B_n $(n = |A|)$ である.



(ex4) 右のハッセ図を完成させよ.

- 8 -（直和と直積）2 つの順序集合 P, Q に対して, その直和 $P + Q$ とは, P, Q の結び $P \cup Q$ に P, Q の順序をそのまま入れて, P の元と Q の元は比較不能にしたものである. $P + Q$ のハッセ図は, P, Q のハッセ図を横に並べたものである.

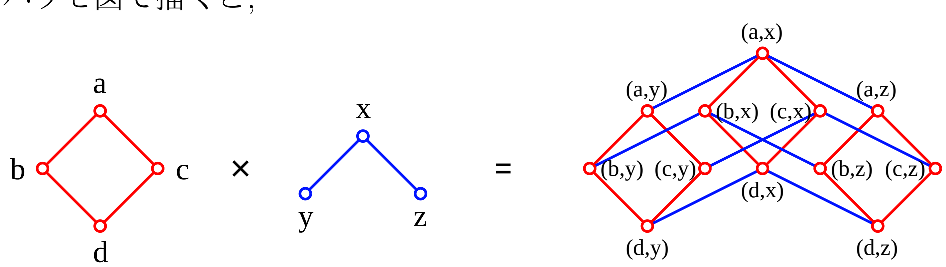
2 つの順序集合 P, Q に対して, その直積 $P \times Q$ とは, 集合としての直積:

$$P \times Q = \{(x, y) \mid x \in P \quad \text{かつ} \quad y \in Q\} \tag{14}$$

に次のように順序を入れたものである.

$$(x, y) \leq (x', y') \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq x' \quad \text{かつ} \quad y \leq y' \tag{15}$$

一例をハッセ図で描くと,



(ex5) D_{90} と同型な順序集合を順序集合の直積の形に表せ．

一般に次がなりたつ．

(T1) 順序集合 P, Q, R に対して，

$$\begin{array}{ll} P+Q \simeq Q+P & (P+Q)+R \simeq P+(Q+R) \\ P\times Q \simeq Q\times P & (P\times Q)\times R \simeq P\times(Q\times R) \\ P\times(Q+R) \simeq P\times Q + P\times R & \end{array} \tag{16}$$

($\because$) $P\times Q \simeq Q\times P$ を示す．$\varphi(x,y)=(y,x)$ で定められる写像 $\varphi : P\times Q \longrightarrow Q\times P$ が同型写像であることを示す．まず，明らかに ϕ は 1 対 1 対応である．次に $x, x' \in P$, $y, y' \in Q$ に対して，

$$\begin{array}{rcl} (x,y) \leq (x',y') & \Longleftrightarrow & x \leq x' \ \text{かつ}\ y \leq y' \\ & \Longleftrightarrow & (y,x) \leq (y',x') \\ & \Longleftrightarrow & \varphi(x,y) \leq \varphi(x',y') \end{array} \tag{17}$$

となるので，ϕ は同型写像である．(q.e.d.)

- 9 -（次数つき順序集合と母関数）P を最小元 $\hat{0}$ を持つ順序集合とする．P から非負整数への関数 ρ が存在して，

$$\rho(\hat{0}) = 0; \qquad x \ll y \Rightarrow \rho(y) = \rho(x) + 1 \tag{18}$$

をみたすとき，P を次数つき順序集合 (graded poset) という．また ρ を階数関数 (rank function) という．この場合，ρ は存在するとしてもただ 1 つである．P が最小元を持たないときでも次数つきの定義は (18) と同じである．ただし，この場合は $\rho(\hat{0}) = 0$ の条件は無視される．また，ρ が一意的に決まるとは限らない．

一般に，P がいくらかの次数つき順序集合（$\hat{0}$ を含まなくてもよい）の直和:

$$P = P_1 + P_2 + \cdots + P_s \tag{19}$$

で表されるときは，通常各 P_i の階数関数をそのまま用いることで P は次数つきと考える．直和に分解されず，最小元を持たない次数つき順序集合も数多く存在する．

P を次数つき順序集合とする．P の各元 x に対して，$\rho(x)$ を x の階数という．P に含まれる鎖の長さ（元の数 -1）の最大値 M が存在するとき，これを P の階数といい $r(P)$ で表す．M が存在しなければ，階数は無限であるという．次数つき順序集合が有限かつ有界のとき，P の階数は $\rho(\hat{1})$ に等しい．

次数つきでない順序集合もたくさんあるが，重要な順序集合は次数つきであることが多い．- 5 - - 6 - - 7 - で述べた順序集合 2^A, D_n, $\mathscr{P}(n)$, $\mathscr{P}(A)$ はすべて次数つきである．- 7 - において，$\mathscr{P}(n)$ の階数 k の元は，長さ $n-k$ の n の分割である．n 元集合 A に対して，$\mathscr{P}(A)$ の階数 k の元の数は，第 2 種スターリング数 $S(n, n-k)$ である．

ここで，次数つき順序集合 P に対して，ρ を最小値が 0 になるように取り，階数 i の元の数を $m_i(P)$ とおくとき，

$$F(P,q) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i(P) q^i \tag{20}$$

を P の母関数 (rank-generating function) という．

(T2) 次数つき順序集合 P, Q の直和と直積は次数つきであり，

$$\begin{array}{l} F(P+Q,q) = F(P,q) + F(Q,q) \\ F(P\times Q,q) = F(P,q)F(Q,q) \end{array} \tag{21}$$

がなりたつ. 特に, P, Q の階数が有限のとき,

$$r(P \times Q) = r(P) + r(Q). \tag{22}$$

(∵) (21) 第 2 式を示す. $P \times Q$ の元 (x, y) の階数を考える. $P \times Q$ の定義より,

$$\rho(x, y) = \rho(x) + \rho(y) \tag{23}$$

が得られる. ゆえに $P \times Q$ の階数 i の元の数を計算すると,

$$m_i(P \times Q) = m_0(P)m_i(Q) + m_1(P)m_{i-1}(Q) + \cdots + m_i(P)m_0(Q). \tag{24}$$

これは

$$F(P \times Q, q) = F(P, q)F(Q, q) \tag{25}$$

がなりたつことを示している. (q.e.d.)

(ex6) (1) - 2 - で示した順序集合のうちどれが次数つきか. また次数つきの場合にその母関数を求めよ. (2) - 5 - - 6 - - 7 - で例示した順序集合の母関数をいくらか求めてみよ.

12章 順序集合と束

☆ 15 ☆

キーワード: 束の公理, 双対原理, 誘導順序, 上限, 下限, D_n, 2^A, 同型, 部分束,
有界束, 分配束, 有限分配束の基本定理, 相補束, ブール代数, 母関数

- 1 -（束の公理）空でない集合 L が, 2 つの演算 $\vee$（結び）, $\wedge$（交わり）について閉じていて（演算の結果がつねに L に属する）, 以下の公理をみたすとき, L を束という.

$[L1]$	（交換律）	$a \vee b = b \vee a \qquad a \wedge b = b \wedge a$
$[L2]$	（結合律）	$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
$[L3]$	（吸収律）	$a \vee (a \wedge b) = a \quad a \wedge (a \vee b) = a$

(note) 結合律より, $a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n,\ \ a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n$ の計算は括弧のつけ方によらない. ゆえにこれらは括弧なしで表記できる.

(ex1) 束において, ベキ等律 $a \vee a = a,\ a \wedge a = a$ がなりたつことを公理から導け.

(ans) 吸収律より, $a \vee a = a \vee (a \wedge (a \vee a)) = a.\ \ a \wedge a = a$ も同様.

(ex2) 束において, $a \vee b = b \iff a \wedge b = a$ がなりたつことを示せ.

- 2 -（双対原理）束において, 命題 A の中の $\vee$ と $\wedge$ を入れ替えてできる命題 A^* を, もとの命題の双対という. 束の公理の双対がまた公理になっているため, もし, A が公理から導かれた定理ならば, A^* もまた双対の公理を使って導かれることになる. すなわち, 定理の双対はまた定理である. これを双対原理という.

(ex3) 次の命題の双対を求めよ. (1) $(a \vee b) \vee (a \wedge b) = a \vee b$. (2) $a \vee b = b \Rightarrow a \wedge b = a$.

- 3 -（誘導順序）(Def & T-1) L を束とする. L に

$$a \vee b = b \iff a \leq b \qquad (a \wedge b = a \iff a \leq b \text{ でも同値}) \tag{1}$$

で導入した $\leq$ は順序の条件をみたす. これを L の誘導順序という. こうして L を順序集合とみたものを, ここでは $\tilde{L}$ とかくことにする.

($\because$) （$\leq$ が順序の条件をみたすこと）（反射的）$a \vee a = a$ より, $a \leq a$.

（反対称的）$a \leq b$ かつ $b \leq a$ ならば, $a \vee b = b$ かつ $b \vee a = a$. $\therefore\ a = b$.

（推移的）$a \leq b$ かつ $b \leq c$ ならば, $a \vee b = b$ かつ $b \vee c = c$. $\therefore\ a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = b \vee c = c$. $\therefore\ a \leq c$. (q.e.d.)

- 4 - ($\sup, \inf$ による $\vee, \wedge$) P を順序集合とする. $x \geq a, b$ であるような P の元 x を a, b の上界という. a, b の上界の中の最小元が存在するとき, これを a, b の上限と呼び, $\sup(a, b)$ で表す. 同様に, $x \leq a, b$ であるような P の元 x を a, b の下界という. a, b の下界の中の最大元が存在するとき, これを a, b の下限と呼び, $\inf(a, b)$ で表す. $\sup(a_1, \ldots, a_n)$, $\inf(a_1, \ldots, a_n)$ についても同様に定義する.

(Def & T-2) P の任意の 2 元 a,b に対して, $\sup(a,b)$, $\inf(a,b)$ が必ず存在すると仮定する. ここで, $a\vee b$, $a\wedge b$ を

$$a\vee b=\sup(a,b),\qquad a\wedge b=\inf(a,b) \tag{2}$$

で定義すると, これらは束の公理をみたす. こうして P を束とみたものを, ここでは $\tilde{P}$ とかくことにする.

($\because$) ((2) の $\vee$, $\wedge$ が束の公理をみたすこと)

(i) $a\vee b=\sup(a,b)=\sup(b,a)=b\vee a.\quad a\wedge b=\inf(a,b)=\inf(b,a)=b\wedge a.$

(ii) $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$ すなわち $\sup(\sup(a,b),c)=\sup(a,\sup(b,c))$ を示す. 明らかに, $\sup(\sup(a,b),c)\geq a,b,c.\ \therefore\ \sup(\sup(a,b),c)\geq a,\sup(b,c).\ \therefore\ \sup(\sup(a,b),c)\geq\sup(a,\sup(b,c))$. 同様にして $\sup(\sup(a,b),c)\leq\sup(a,\sup(b,c))$ も示される.
$\therefore\ \sup(\sup(a,b),c)=\sup(a,\sup(b,c))$.

(iii) $a\vee(a\wedge b)=a$ については, $\sup(a,\inf(a,b))=a$ より明らか.

他の公理についても同様. (q.e.d.)

(T3) P をつねに $\sup(a,b)$, $\inf(a,b)$ が存在する順序集合とするとき, 任意の n 元 $a_1,\ldots,a_n$ に対して $\sup(a_1,\ldots,a_n)$, $\inf(a_1,\ldots,a_n)$ が存在し, $\tilde{P}$ において次がなりたつ.

$$\begin{aligned}a_1\vee\cdots\vee a_n&=\sup(a_1,\ldots,a_n)\\ a_1\wedge\cdots\wedge a_n&=\inf(a_1,\ldots,a_n)\end{aligned} \tag{3}$$

($\because$) 上の式を n に関する帰納法で示す. $n=1$ では明らかになりたつ. $n-1$ でなりたつと仮定する. $x\geq a_1,\ldots,a_n$ をみたす任意の x を取る. $x\geq a_1,\ldots,a_{n-1}$ より $x\geq\sup(a_1,\ldots,a_{n-1})$. $\therefore\ x\geq\sup(a_1,\ldots,a_{n-1}),a_n$. $\therefore\ x\geq\sup(\sup(a_1,\ldots,a_{n-1}),a_n)$. また, 明らかに $\sup(\sup(a_1,\ldots,a_{n-1}),a_n)\geq a_1,\ldots,a_n$. ゆえに $\sup(a_1,\ldots,a_n)$ が存在し, $\sup(a_1,\ldots,a_n)=\sup(\sup(a_1,\ldots,a_{n-1}),a_n)$. したがって,

$$\begin{aligned}a_1\vee\cdots\vee a_n=(a_1\vee\cdots\vee a_{n-1})\vee a_n&=\sup(\sup(a_1,\ldots,a_{n-1}),a_n)\\&=\sup(a_1,\ldots,a_n).\end{aligned} \tag{4}$$

これで帰納法が完成した. (q.e.d.)

下の式についても同様.

(ex4) 順序集合 P において,

$$\sup(a,b)=b\iff a\leq b\iff\inf(a,b)=a \tag{5}$$

がなりたつことを示せ.

- 5 -(束 および 上限下限のある順序集合)

(T4) L を束, P を つねに $\sup(a,b)$, $\inf(a,b)$ が存在する順序集合とする. このとき,

$$\tilde{\tilde{L}}=L,\qquad\tilde{\tilde{P}}=P. \tag{6}$$

($\because$) ($\tilde{\tilde{L}}=L$) $\tilde{L}$ における $\sup(a,b)$ が, L における $a\vee b$ に等しいことを示す.

$a\vee(a\vee b)=(a\vee a)\vee b=a\vee b$ より, $a\leq a\vee b$ である. 同様に, $b\leq a\vee b$ を得る. また, $a,b\leq x$ なる $x\in\tilde{L}$ を取ると, $a\vee x=b\vee x=x$ なので,

$$(a\vee b)\vee x=a\vee(b\vee x)=a\vee x=x.\qquad\therefore\ a\vee b\leq x. \tag{7}$$

したがって, $a\vee b=\sup(a,b)$. 同様にして, $a\wedge b=\inf(a,b)$ も示される. これより, $\tilde{\tilde{L}}=L$.

$(\tilde{\tilde{P}} = P)$ $\tilde{P}$ の誘導順序 $\leq_1$ が, P の順序 $\leq$ に等しいことを示す.

$$a \leq_1 b \iff a \vee b = b \iff \sup(a,b) = b \iff a \leq b \tag{8}$$

ゆえに, $\tilde{\tilde{P}} = P$. (q.e.d.)

(T4) は, 束 L を考えることと, 任意の 2 元の sup, inf が存在する順序集合 P を考えることが同値であることを示している. 束は, 束の公理をもとに考えるよりは, 順序集合として考えるほうがわかりやすいし, ハッセ図で表せるので都合がよい. このとき, 結びと交わりを (2) のように考えるわけである. またすべての束の集合はすべての順序集合の集合に含まれていることになる.

- 6 - (D_n と 2^A) D_n すなわち n の正の約数全体からなる集合に, 整除で順序を入れた順序集合 ($x \leq y \iff x \mid y$) は, 単に順序集合であるだけではなく, 束としての性質を持つ. なぜならば, 任意の $a, b \in D_n$ に対して,

$$\begin{array}{c} a \vee b = \sup(a,b) = \mathrm{lcm}\,(a,b) \\ a \wedge b = \inf(a,b) = \gcd(a,b) \end{array} \tag{9}$$

が存在するからである.

2^A すなわち A の部分集合全体からなる集合に, 包含関係で順序を入れた順序集合 ($X \leq Y \iff X \subset Y$) は, やはり束である. それは, 任意の $X, Y \in 2^A$ に対して,

$$\begin{array}{c} X \vee Y = \sup(X,Y) = X \cup Y \\ X \wedge Y = \inf(X,Y) = X \cap Y \end{array} \tag{10}$$

が存在するからである.

(ex5) (1) D_{90} において, $5 \vee 6$, $5 \wedge 6$ を求めよ. $18 \vee 15$, $18 \wedge 15$ を求めよ.

(2) $A = \{a, b, c\}$ とする. 2^A において, $\{a, c\} \vee \{b, c\}$, $\{a, c\} \wedge \{b, c\}$ を求めよ. $\{b\} \vee \emptyset$, $\{b\} \wedge A$ を求めよ.

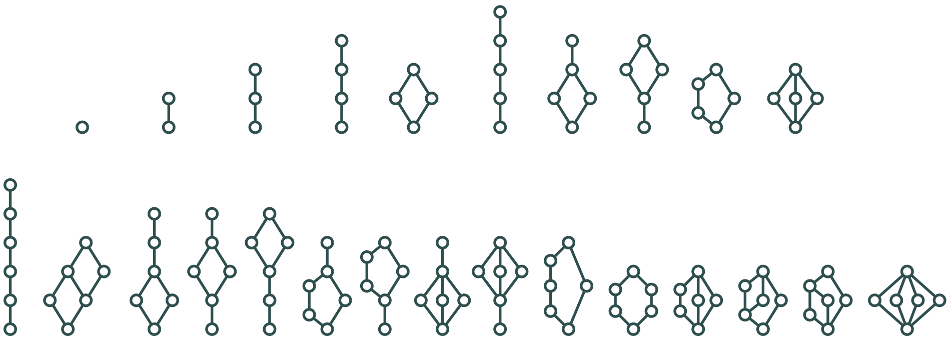
- 7 - (束の同型) L, M を束とする. L から M への 1 対 1 対応 φ であって

$$\begin{array}{c} \varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y) \\ \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y) \end{array} \qquad (x, y \in L) \tag{11}$$

をみたすものが存在するとき, L と M は同型であるといい, $L \simeq M$ とかく. このとき, φ を L から M への同型写像という. 束を順序集合とみているときは, 順序集合として同型, すなわちハッセ図が同型であるときに同型だと考えてよい.

(ex6) 6 元以下からなる束をすべて求めよ. (同型なものは除く)

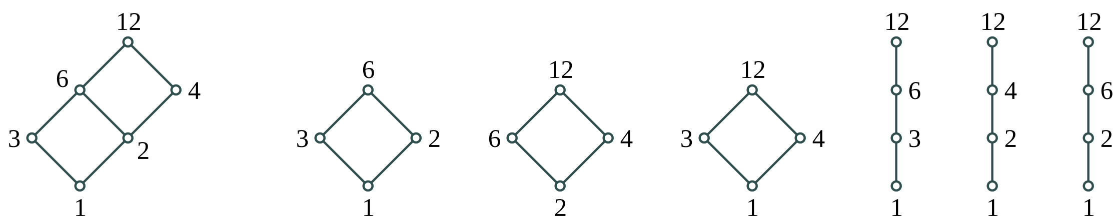
(ans) 以下の通り.



- 8 -（部分束）束 L の空でない部分集合 M が, L の演算 $\vee, \wedge$ について閉じているとき, M を L の部分束という. L が束の公理をみたすので, M も束の公理をみたす. ゆえに部分束は束である. L 自身も L の部分束である.

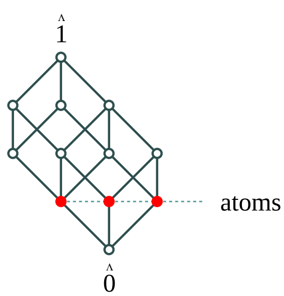
(ex7) D_{12} の部分束をいくらか求めよ.

(ans) 4 元からなる部分束を考えてみる. それは, D_6 と同型な部分束と, 4 元からなる鎖の 2 つの場合があり, 以下のようになる.



D_{12}　　Sublattices of D_{12} with 4 elements

- 9 -（有界束）最大元 $\hat{1}$ と最小元 $\hat{0}$ を持つ束を有界束という. $\hat{0}$ の直後の元のことを, 原子という.



(ex8) 有限束（有限個の元からなる束）は有界束であることを示せ.

(ans) L を有限束として, そのすべての元を $a_1, a_2, \ldots, a_n$ とおくとき,

$$\begin{aligned} x &= a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n = \hat{1} \\ y &= a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n = \hat{0} \end{aligned} \tag{12}$$

となる. なぜならば, $a_i \vee x = a_1 \vee \cdots \vee (a_i \vee a_i) \vee \cdots \vee a_n = x$. $\therefore\ a_i \leq x$. $\therefore\ x = \hat{1}$. $a_i \wedge y = a_1 \wedge \cdots \wedge (a_i \wedge a_i) \wedge \cdots \wedge a_n = y$. $\therefore\ y \leq a_i$. $\therefore\ y = \hat{0}$.

- 10 -（分配束）束 L が分配律:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \tag{13}$$

をみたすとき, L を分配束, または分配的であるという.

(note) (13) がなりたてば, 次がなりたつことは容易に示せる.

$$a \wedge (b_1 \vee \cdots \vee b_n) = (a \wedge b_1) \vee \cdots \vee (a \wedge b_n)$$
$$a \vee (b_1 \wedge \cdots \wedge b_n) = (a \vee b_1) \wedge \cdots \wedge (a \vee b_n) \tag{14}$$

(T5) (i) D_n は分配束である. (ii) 2^A は分配束である.

(∵) (i) D_n が (13) をみたすことをいう. n の任意の素因数 p_1 を取る. a, b, c が p_1 を素因数として, 各々 a_1, b_1, c_1 個含むとする. (13) の両辺が, p_1 を素因数としていくつ含むか（$l(\cdot)$ で表す）を考え, これが同じであれば証明は終了する. (13) の上の式については,

$$l(a \wedge (b \vee c)) = l(\gcd(a, \mathrm{lcm}\,(b, c))) = \min(a_1, \max(b_1, c_1)),$$
$$l((a \wedge b) \vee (a \wedge c)) = l(\mathrm{lcm}\,(\gcd(a, b), \gcd(a, c))) = \max(\min(a_1, b_1), \min(a_1, c_1)). \tag{15}$$

これらが等しいことは容易に示される. (13) の下の式も同様. (q.e.d.)

(∵) (ii) 2^A が (13) をみたすことをいう. ここで, $X \vee Y = X \cup Y$, $X \wedge Y = X \cap Y$ なので, 集合代数の分配律より, (13) をみたすことがいえる. (q.e.d.)

- 11 -（分配束の判定法）D_n や 2^A 以外にも多くの分配束が存在するが, 一般に束が分配束かどうかを判定する定理として次のものがある.

(T6) 束 L が分配束であるための必要十分条件は, L が部分束として次の束をどちらも含まないことである.

(a) (b)

- 12 -（有限分配束の基本定理）束 L の元 a が結び既約とは, $a \neq \hat{0}$, かつ $a = b \vee c$ とかけるような, a と異なる元 b, c が存在しないことである. a が交わり既約とは, $a \neq \hat{1}$, かつ $a = b \wedge c$ とかけるような, a と異なる元 b, c が存在しないことである.

(note) より直感的には, L のハッセ図において, a から下に [上に] 辺が丁度 1 本出ているときには a は結び [交わり] 既約になる.

(ex9) a が結び [交わり] 既約ならば, $s \geq 2$ および a と異なる b_j たちに対して, $a = b_1 \vee \cdots \vee b_s$ [$a = b_1 \wedge \cdots \wedge b_s$] はなりたたないことを示せ.

(T7) L を有限分配束とする. L の任意の元 x は, 余分のない結び既約な元の結びで,

$$x = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_s \tag{16}$$

の形に（順序を除いて）一意的に表せる.（ただし, $\hat{0}$ の場合のみ $\hat{0} = \hat{0}$ という表示になる.）ここに, 余分のないとは, $i \neq j$ ならば, a_i と a_j は比較不能であることを意味する.

(∵) まず, $x=\hat{0}$ のときは $\hat{0}=\hat{0}$ とかけるので, $x\neq\hat{0}$ とする. x 自身が結び既約ならば, $x=x$ が (16) に他ならない. x が結び既約でなければ, 適当な $x_1, x_2 \neq x$ ($x_1, x_2 \neq \hat{0}$) による $x = x_1 \vee x_2$ から始めて, 元を繰り返し結びで表していけば, L の有限性から, いつか (16) の形に到達する.（余分な元, すなわち他の元と同じかより小さい元があればそれを除外する.）ここで, もう 1 つの表現

$$x = b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_t \tag{17}$$

があったとする. ここに, $t \leq s$ として差し支えない. (16) より,

$$a_1 \wedge x = a_1 \wedge (a_1 \vee (a_2 \vee \cdots \vee a_s)) \overset{\text{吸収律}}{=} a_1. \tag{18}$$

一方, L が分配束だから (17) より,

$$\begin{aligned} a_1 \wedge x &= a_1 \wedge (b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_t) \\ &= (a_1 \wedge b_1) \vee (a_1 \wedge b_2) \vee \cdots \vee (a_1 \wedge b_t). \end{aligned} \tag{19}$$

(18), (19) より,

$$a_1 = (a_1 \wedge b_1) \vee (a_1 \wedge b_2) \vee \cdots \vee (a_1 \wedge b_t). \tag{20}$$

ここで, a_1 が結び既約なので, ある j が存在して, $a_1 = a_1 \wedge b_j$ でなければならない. これは, $a_1 \leq b_j$ を意味する. 次に, $b_j \wedge x$ を計算すれば, 同様にして, ある i が存在して, $b_j \leq a_i$ を得る. こうして, $a_1 \leq a_i$ を得る. ところが, 余分のないという条件から, $i=1$ となる. こうして, $a_1 \leq b_j \leq a_1$. $\therefore\ a_1 = b_j$. 以下これを繰り返して, すべての a_i を b_{j_i} に等置でき, 余分がないということから, (16) は, (17) の順序を変えただけのものになることがわかる. (q.e.d.)

ここで, 順序集合 P のオーダーイデアル I とは, P の部分集合 I であって,

$$x \in I \ \text{かつ}\ y \leq x \ \Rightarrow\ y \in I \tag{21}$$

をみたすもののことと定義する. P のオーダーイデアル全体の集合は, 集合の結びと交わりに関して分配束をなす. これを $J(P)$ とかく. これらの用語を用いて, 次の系が述べられる.

(T7')（有限分配束の基本定理, バーコフの表現定理）有限分配束 L に対して, 順序集合 P が同型を除いてただ 1 つ存在して,

$$L \simeq J(P). \tag{22}$$

(∵) L の結び既約な元全体からなる L の部分順序集合を P とおく. L の元 x の（余分のない結び既約な元の）結びによる表現 (16) が得られたとき,

$$\varphi(x) = \varphi(a_1 \vee \cdots \vee a_s) = \overline{a_1} \cup \cdots \cup \overline{a_s} \tag{23}$$

で定義される関数 φ を考える. ここで, $\overline{a}$ は P において a および a より小さい元たちからなる集合を表す. (23) 右辺はオーダーイデアルの条件をみたすので,

$$\varphi : L \longrightarrow J(P) \tag{24}$$

が定義された. 今度は $I \in J(P)$ に対して, そのすべての極大元の集合を $\{a_1, \ldots, a_s\}$ とすれば, それは L の余分のない結び既約な元からなる. そこで, I に (16) で定まる x を対応させる関数:

$$\begin{array}{rccc} \psi : & J(P) & \longrightarrow & L \\ & I & \longmapsto & a_1 \vee \cdots \vee a_s \end{array} \tag{25}$$

を考えると,

$$\psi = \varphi^{-1} \tag{26}$$

である. 実際,

$$\begin{aligned} &\psi \circ \varphi(a_1 \vee \cdots \vee a_s) = \psi(\overline{a_1} \cup \cdots \cup \overline{a_s}) = a_1 \vee \cdots \vee a_s \\ &\varphi \circ \psi(I) = \varphi(a_1 \vee \cdots \vee a_s) = \overline{a_1} \cup \cdots \cup \overline{a_s} = I. \end{aligned} \tag{27}$$

逆関数を持つので, φ は 1 対 1 対応である.

さて, (23) を再度見てみると, $a_1, \ldots, a_s$ のいくらかが比較可能であっても, 形式的に (23) がなりたつことがわかる. さらに, $a \in L - P$ のときに, $\overline{a}$ で, L において a より小さい結び既約な元たちからなる集合を表すことにすると, (23) は $a_1, \ldots, a_s$ が必ずしも結び既約でなくてもなりたつことが示される. そこで, (16) および,

$$y = b_1 \vee \cdots \vee b_t \tag{28}$$

が任意に与えられたとき,

$$\begin{aligned} &\varphi(x \vee y) = \varphi(a_1 \vee \cdots \vee a_s \vee b_1 \vee \cdots \vee b_t) = \overline{a_1} \cup \cdots \cup \overline{a_s} \cup \overline{b_1} \cup \cdots \cup \overline{b_t} \\ &= \varphi(x) \cup \varphi(y), \\ &\varphi(x \wedge y) = \varphi((a_1 \vee \cdots \vee a_s) \wedge (b_1 \vee \cdots \vee b_t)) = \varphi(\textstyle\bigvee_{1 \le i \le s, 1 \le j \le t}(a_i \wedge b_j)) \\ &= \textstyle\bigcup_{1 \le i \le s, 1 \le j \le t} \overline{a_i \wedge b_j} = \bigcup_{1 \le i \le s, 1 \le j \le t} \left(\overline{a_i} \cap \overline{b_j}\right) \\ &= (\overline{a_1} \cup \cdots \cup \overline{a_s}) \cap \left(\overline{b_1} \cup \cdots \cup \overline{b_t}\right) = \varphi(x) \cap \varphi(y). \end{aligned} \tag{29}$$

最後に P の一意性を示す. $J(P) \simeq J(Q)$ とする. $J(P)$ の結び既約な元は $\overline{a}$ $(a \in P)$ の形に限るので, $J(P)$ の結び既約な元全体は P と順序同型になる. よって, $P \simeq Q$. (q.e.d.)

- 13 -（相補束）L を有界束とする. L の元 a, a' が次をみたすとき, a' は a の補元という.

$$a \vee a' = \hat{1}, \qquad a \wedge a' = \hat{0}. \tag{30}$$

このとき a が a' の補元でもある.

(note) 補元があるとしても, 一意的に決まるとは限らない.

(note) $\hat{0}$ は $\hat{1}$ の補元であり, $\hat{1}$ は $\hat{0}$ の補元である.

有界束 L の各元に必ず補元が存在するとき, L を相補束あるいは相補的であるという.

(T8) 有界な分配束は, 補元を持つとすれば一意的である.

($\because$) a の補元 x, y があったとする. $a \vee x = a \vee y = \hat{1}$, $a \wedge x = a \wedge y = \hat{0}$ なので,

$$\begin{aligned} x = x \vee \hat{0} = x \vee (a \wedge y) = (x \vee a) \wedge (x \vee y) = \hat{1} \wedge (x \vee y) = x \vee y, \\ y = y \vee \hat{0} = y \vee (a \wedge x) = (y \vee a) \wedge (y \vee x) = \hat{1} \wedge (y \vee x) = y \vee x. \end{aligned} \tag{31}$$

ゆえに, $x = y$. (q.e.d.)

さらに, 次がなりたつことが示される.

(T9) L を一意的な補元を持つ相補束とするとき, L の結び既約な元は原子のみである.

($\because$) 背理法による. L を一意的な補元を持つ相補束とし, 原子以外の結び既約な元 a があるとする. ここで $b \ll a$ なる b を取る. 仮定より $b \neq \hat{0}$ である. b の補元 b' を取ると, $b \vee b' = \hat{1}$, $b \wedge b' = \hat{0}$. $b \ll a$ なので, $a \vee b' \geq \hat{1}$. $\therefore$ $a \vee b' = \hat{1}$.

次に $a \wedge b' = \hat{0}$ をいう. $a \wedge b' = c$ とおく. もし $c = a$ とすれば $b \leq a \leq b'$ となり, $b \wedge b' = b = \hat{0}$ となって仮定に反する. ゆえに $c \neq a$. ここで次のように場合分けをする.

(i) $c \not\leq b$ とする．$a \geq b, c$ なので, $a \geq b \vee c$. ここで $a > a_1 = b \vee c$ ならば, $c \not\leq b$ すなわち $b \vee c \neq b$ であることから, $a > a_1 > b$ となって $b \ll a$ に矛盾する．ゆえに $a = b \vee c$ となる．これは a が結び既約であることに反する．

(ii) $c \leq b$ とする．$a \wedge b' \leq b$ より,

$$a \wedge b' = (a \wedge b') \wedge b = a \wedge (b' \wedge b) = a \wedge \hat{0} = \hat{0}. \tag{32}$$

こうして a は b' の補元になる．ゆえに b' の補元は a, b 2 つあるので補元の一意性に反する．(q.e.d.)

- 14 -（ブール代数）(T7),(T8),(T9) より, 次の定理を得る．

(T10) L を有限な分配的かつ相補的な束とすると, L の任意の元は, いくらかの異なる原子の結びで一意的に表される．（ただし, $\hat{0}$ の場合のみ $\hat{0} = \hat{0}$ という表示になる.）

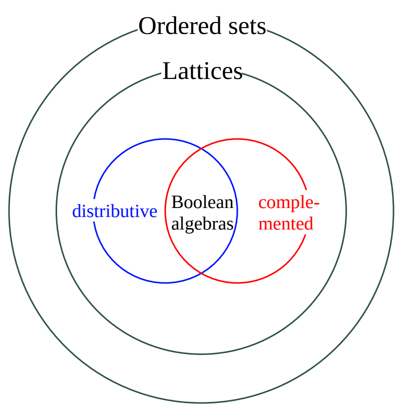
ここで, ブール代数を次のように定義する．

(Def 3) 分配的かつ相補的な束をブール代数と呼ぶ.

(T10) を言い換えると,

(T10') 有限ブール代数の任意の元は, いくらかの異なる原子の結びとして一意的に表される．

順序集合, 束, 分配束, 相補束, ブール代数の間の包含関係を図示すると次のようになる．



(ex10) D_{30} の各元の補元を求めよ．また, D_{30} はブール代数といえるか？

以下, ブール代数, D_n, 2^A に関する定理を述べておく．

(T11) D_n がブール代数 $\iff$ n が異なる素数の積（$n = 1$ を含む）

($\because$) ($\Rightarrow$) 背理法による．D_n がブール代数で n がある素数 p の 2 乗で割りきれるとする．D_n がブール代数なので, それは相補束でなければならない．ゆえに, p の補元 x が存在する．$p \vee x = \mathrm{lcm}\,(p, x) = n$ かつ $p^2 \mid n$ より, $x = n$. ゆえに, $p \wedge x = p \wedge n = \gcd(p, n) = p \neq 1$ となり矛盾する．(q.e.d.)

($\Leftarrow$) $n = p_1 p_2 \ldots p_r$（$p_1, \ldots, p_r$ は相異なる素数）とする．D_n の任意の元 $a = p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_s}$ を取る．$b = \frac{n}{a}$ は $p_{i_1}, \ldots, p_{i_s}$ 以外の素数で $b = p_{j_1} \ldots p_{j_{r-s}}$ とかける．このとき,

$$\begin{aligned} a \vee b &= \mathrm{lcm}\,(a, b) = n = \hat{1} \\ a \wedge b &= \gcd(a, b) = 1 = \hat{0} \end{aligned} \tag{33}$$

は明らかである．よって, 補元 $a' = b$ が存在し D_n は相補束になる．また (T5)(i) より D_n は分配束になる．ゆえに D_n はブール代数になる．(q.e.d.)

(note) この証明でわかるように, D_n がブール代数ならば, $a' = \frac{n}{a}$ である．一般の D_n に対しては, $n = q_1 q_2 \dots q_r$（$q_1, \dots, q_r$ はそれぞれ異なる素数のベキ）とするとき, 補元を持つ元は $a = q_{i_1} \dots q_{i_s}$ の形の元に限られ, $a' = \frac{n}{a}$ となる．

(T12) A を集合とするとき, 2^A はブール代数である．

(∵) (T5)(ii) より, 2^A は分配束である．よって 2^A が相補束であることをいえばよい．2^A の各元 X に対して, 明らかにその補元 $X' = X^c$ が存在する．実際,

$$\begin{aligned} X \vee X^c = X \cup X^c = A \\ X \wedge X^c = X \cap X^c = \emptyset. \end{aligned} \tag{34}$$

ゆえに, 2^A は相補束である．(q.e.d.)

(T13) $n = p_1 p_2 \dots p_r$（$p_1, \dots, p_r$ は相異なる素数）とする．

$$A = \{p_1, p_2, \dots, p_r\} \tag{35}$$

とおくと, $D_n \simeq 2^A$ となる．

(∵) D_n から 2^A への写像として,

$$\varphi(p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_s}) = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_s}\} \tag{36}$$

を取ると，これは同型写像になる．なぜならば, $a = p_{i_i} p_{i_2} \dots p_{i_s}$, $b = p_{j_i} p_{j_2} \dots p_{j_t}$ とすると,

$$\begin{aligned} \varphi(a \vee b) = \varphi(\mathrm{lcm}\,(a,b)) = \{p_{i_1}, \dots, p_{i_s}\} \cup \{p_{j_1}, \dots, p_{j_t}\} = \varphi(a) \vee \varphi(b), \\ \varphi(a \wedge b) = \varphi(\gcd(a,b)) = \{p_{i_1}, \dots, p_{i_s}\} \cap \{p_{j_1}, \dots, p_{j_t}\} = \varphi(a) \wedge \varphi(b). \end{aligned} \tag{37}$$

(q.e.d.)

- 15 -（母関数）D_n, 2^A などは次数つき順序集合の構造を持つので, 母関数を考えることができる．$n = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$ を素因数分解とすると,

$$D_n \simeq D_{p_1^{a_1}} \times \cdots \times D_{p_r^{a_r}} \tag{38}$$

のように直積で表される．ここで, 素数 p に対して D_{p^a} は鎖の構造を持つので,

$$F(D_{p^a}, q) = 1 + q + \cdots + q^a. \tag{39}$$

そこで 11 章 (T2) より次を得る．

(T14) $n = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$ を素因数分解とするとき,

$$F(D_n, q) = \prod_{i=1}^{r} (1 + q + \cdots + q^{a_i}). \tag{40}$$

2^A については $2^A \simeq D_{p_1 \dots p_r}$ $(|A| = r)$ なので,

$$F(2^A, q) = (1+q)^r. \tag{41}$$

P を順序集合とするとき, $J(P)$ は次数つき順序集合の構造を持つ．階数 i の元は大きさ i のオーダーイデアルからなる．ゆえに $J(P)$ の母関数は次で与えられる．

$$F(J(P), q) = \sum_{I \in J(P)} q^{|I|} \tag{42}$$

ここで, $P+Q$ のオーダーイデアルは, P, Q それぞれのオーダーイデアルの組として表される. すなわち,

$$\begin{aligned} &J(P+Q) = \{(I,J) \mid I \in J(P), J \in J(Q)\} \\ &(I,J) \leq (I',J') \quad \iff \quad I \leq I' \text{ かつ } J \leq J' \end{aligned} \tag{43}$$

これは $J(P) \times J(Q)$ の定義と一致するので, 次を得る.

(T15) 順序集合 P, Q に対して,

$$\begin{gathered} J(P+Q) \simeq J(P) \times J(Q) \\ F(J(P+Q),q) = F(J(P),q)F(J(Q),q). \end{gathered} \tag{44}$$

13章　ブール代数の基礎

☆14☆

キーワード: ブール代数の公理, 定理, 双対原理, 束, 同型, 表現定理, 集合代数, ハッセ図, 部分代数, ブール式, 加法標準形, 乗法標準形, 主項, 合意法, カルノー図, 最簡形, ブール式からなるブール代数, 自由ブール代数, 母関数

- 1 -（ブール代数の公理）我々はすでに12章 - 14 - においてブール代数を導入した．それは分配的かつ相補的な束であった．ここでは, 公理によるブール代数の定義を述べる．(T9) で示すように, この定義は12章の定義と同値である．

0, 1 を含む集合[1] B が, 2つの2項演算 $+$（加法, 和）, $*$（乗法, 積）, および単項演算 $'$ について閉じていて, 以下の公理をみたすとき, B をブール代数という．

$[B1]$	（交換律）	$a+b=b+a \qquad a*b=b*a$
$[B2]$	（分配律）	$a*(b+c)=(a*b)+(a*c)$ $a+(b*c)=(a+b)*(a+c)$
$[B3]$	（同一律）	$a+0=a \qquad a*1=a$
$[B4]$	（補元律）	$a+a'=1 \qquad a*a'=0$

(note1) a' は a の補元と呼ばれる．

(note2) この公理の中に, 結合律が含まれていないことに注意しよう．それは, 結合律がこれらの公理から定理として導かれるからである．

(note3) 分配律, 同一律, 補元律は, 交換律と組合せて演算の順序を逆にしたものも便宜上公理に準じるものと考えて, 定理の証明に使っても構わないことにする．

- 2 -（ブール代数の定理）ブール代数には公理より導ける基本的な定理が数多くある．以下それを列挙してみる．

$(T1)$	（ベキ等律）	$a+a=a$	$a*a=a$
$(T2)$	（有界律）	$a+1=1$	$a*0=0$
$(T3)$	（吸収律）	$a+(a*b)=a$	$a*(a+b)=a$
$(T4)$	（結合律）	$(a+b)+c=a+(b+c)$ $(a*b)*c=a*(b*c)$	
$(T5)$	（補元の一意性）	$a+x=1$ かつ $a*x=0$ ならば $x=a'$	
$(T6)$	（対合律）	$(a')'=a$	
$(T7)$	（0と1）	$0'=1$	$1'=0$
$(T8)$	（ド・モルガンの法則）	$(a+b)'=a'*b'$	$(a*b)'=a'+b'$

(ex1) (1) ベキ等律, 有界律を公理から証明せよ．　(2) 公理と有界律を用いて, 吸収律を示せ．

(ans) (1) $a+a=(a+a)*1=(a+a)*(a+a')=a+(a*a')=a+0=a$．　$a*a=a$ も同様．　$a+1=(a+1)*1=(a+1)*(a+a')=a+(1*a')=a+a'=1$．　$a*0=0$ も同様．　(2) $a+(a*b)=(a*1)+(a*b)=a*(1+b)=a*1=a$．　$a*(a+b)=a$ も同様．

[1] 特別な場合として, $0=1$ となることもありうる．このとき, B はただ1つの元 $0=1$ からなる．このような B を自明なブール代数という．

(ex2) 公理とベキ等律, 吸収律を用いて結合律を示せ.

(ans) $(a+b)+c = a+(b+c)$ を示してみる. まず, 左辺を L, 右辺を R とおく.

$$\begin{aligned} & a*L \overset{B2}{=} [a*(a+b)]+(a*c) \overset{T3}{=} a+(a*c) \overset{T3}{=} a. \\ & a*R \overset{B2}{=} (a*a)+[a*(b+c)] \overset{T1}{=} a+[a*(b+c)] \overset{T3}{=} a. \\ & \therefore \quad a*L = a*R. \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} & a'*L \overset{B2}{=} [a'*(a+b)]+(a'*c) \overset{B2}{=} [(a'*a)+(a'*b)]+(a'*c) \\ & \overset{B4}{=} [0+(a'*b)]+(a'*c) \overset{B3}{=} (a'*b)+(a'*c) \overset{B2}{=} a'*(b+c). \\ & a'*R \overset{B2}{=} (a'*a)+[a'*(b+c)] \overset{B4}{=} 0+[a'*(b+c)] \overset{B3}{=} a'*(b+c). \\ & \therefore \quad a'*L = a'*R. \end{aligned} \tag{2}$$

(1), (2) より,

$$\begin{aligned} L \quad &= 1*L = (a+a')*L = (a*L)+(a'*L) = (a*R)+(a'*R) \\ &= (a+a')*R = 1*R = R. \qquad \text{(q.e.d.)} \end{aligned} \tag{3}$$

(ex3) ド・モルガンの法則を示せ. (公理および (T1) — (T7) は使ってよい.)

(hint) $(a+b)' = a'*b'$ を示すには, $(a+b)+(a'*b') = 1$, $(a+b)*(a'*b') = 0$ を示せばよい. $(a*b)' = a'+b'$ も同様.

(note4) 結合律を認めた上では, $a_1+a_2+\cdots+a_n$, $a_1*a_2*\cdots*a_n$ の計算は括弧のつけ方にはよらないため, 括弧を省略した記法が認められる. また, 分配律あるいはド・モルガンの法則により, 次がなりたつことは容易に示せる.

$$\begin{aligned} a*(b_1+\cdots+b_n) &= (a*b_1)+\cdots+(a*b_n) \\ a+(b_1*\cdots*b_n) &= (a+b_1)*\cdots*(a+b_n) \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} (a_1+\cdots+a_n)' &= a_1'*\cdots*a_n' \\ (a_1*\cdots*a_n)' &= a_1'+\cdots+a_n' \end{aligned} \tag{5}$$

このような括弧を省略した記法は, 公理から定理を証明する段階では認められない.

- 3 - (双対原理) ブール代数において, 命題 A の中の $+$ と $*$ および 0 と 1 を入れ替えてできる命題 A^* を, もとの命題の双対という. 公理の双対がまた公理になっているため, もし, A が公理から導かれた定理ならば, A^* もまた双対の公理を使って導かれることになる. すなわち, 定理の双対はまた定理である. これを双対原理という.

(ex4) 次の命題の双対を求めよ. (1) $(a+b)*(a'+b') = (a'*b)+(a*b')$. (2) $(a'*b')+a+b = 1$.

- 4 - (束としてのブール代数) ブール代数では, 交換律, 結合律, 吸収律がなりたつので, 束の公理をみたしていることがわかる. よって, $+$ を $\vee$, $*$ を $\wedge$ とみなすことで, ブール代数は束の一種であると考えられる. さらに, ブール代数は分配律, 同一律 (最大元 1 と最小元 0 の存在を保証), 補元律をみたしているので, 分配的かつ相補的な束であると言うことができる. ブール代数の公理には, 分配的かつ相補的な束であるという条件以外は含まれていないので, 以下の定理を得る.

(T9) ブール代数とは, 分配的かつ相補的な束に他ならない.

(ex5) ブール代数において, 以下の命題は同値であることを示せ.

$$(1)\ a+b=b \qquad (2)\ a*b=a \qquad (3)\ a'+b=1 \qquad (4)\ a*b'=0$$

束を sup, inf のある順序集合とみたときと同じように, ブール代数も上記 (ex5) の条件（の 1 つ）をみたすとき $a \leq b$ であると定義すると, 順序集合とみなせる．このとき, 12 章 (T4) より,

$$a + b = \sup(a, b), \qquad a * b = \inf(a, b) \tag{6}$$

がなりたつ．すなわち, ブール代数では和と積を sup, inf で計算できる．

- 5 -（ブール代数の同型）B, C をブール代数とする．B から C への 1 対 1 対応 φ であって

$$\begin{array}{c} \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \\ \varphi(x*y) = \varphi(x) * \varphi(y) \end{array} \qquad (x, y \in B) \tag{7}$$

をみたすものが存在するとき, B と C は同型であるといい, $B \simeq C$ とかく．このとき, φ を B から C への同型写像という．ブール代数を順序集合とみているときは, 順序集合として同型, すなわちハッセ図が同型であるときに同型だと考えてよい．同型写像 φ については,

$$\varphi(x') = (\varphi(x))', \qquad \varphi(1) = 1, \qquad \varphi(0) = 0 \tag{8}$$

がなりたつ．

(ex6) (8) を示せ．

- 6 -（有限ブール代数の表現定理）(T9) は 12 章 (Def 3) のブール代数の定義の妥当性を示す．そこで, 12 章 (T10') を再掲しておこう．

(T10) B を有限ブール代数とすると, B の任意の元は, いくらかの異なる原子の和で一意的に表される．

(T10) によると, 有限ブール代数 B の各元は極めて明快に表現することができる．すなわち, B の原子を $a_1, \ldots, a_n$ とすると, B の任意の元 x は,

$$x = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_s} \tag{9}$$

の形に一意的に表される．そして, もう 1 つの元

$$y = a_{j_1} + a_{j_2} + \cdots + a_{j_t} \tag{10}$$

を取ったとき,

$$\begin{array}{c} x + y = (a_{i_1} + \cdots + a_{i_s}) + (a_{j_1} + \cdots + a_{j_t}) = a_{k_1} + \cdots + a_{k_u} \\ x * y = (a_{i_1} + \cdots + a_{i_s}) * (a_{j_1} + \cdots + a_{j_t}) = a_{l_1} + \cdots + a_{l_v} \end{array} \tag{11}$$

とかける．ただし, ベキ等律, および, 異なる原子の積 $= 0$ であることに注意すると, これらは

$$\begin{array}{c} \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_s}\} \cup \{a_{j_1}, \ldots, a_{j_t}\} = \{a_{k_1}, \ldots, a_{k_u}\} \\ \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_s}\} \cap \{a_{j_1}, \ldots, a_{j_t}\} = \{a_{l_1}, \ldots, a_{l_v}\} \end{array} \tag{12}$$

をみたすことがわかる．こうしてみると, 有限ブール代数は, 原子たちのおりなす “集合代数”（原子たちが, 集合算に関してなす体系）と同型になっていることがわかる．すなわち, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ としたとき,

$$\begin{array}{rcc} \varphi : B & \longrightarrow & 2^A \\ x & \longmapsto & \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_s}\} \end{array} \tag{13}$$

はブール代数 B から 集合代数 2^A への同型写像を与える．

(T11)（有限ブール代数の表現定理）有限ブール代数 B の原子の集合を A とすると, B は集合代数 2^A と同型である.[2]

特に, $|B| = 2^{(B\text{ の原子の数})}$ がなりたつ. 原子の数が n のブール代数はすべて同型なので, これらを B_n で表すことにする.

- 7 -（ブール代数のハッセ図）ブール代数 B_n と同型な集合代数 2^A $(|A| = n)$ の誘導順序 $\leq$ は,

$$X \leq Y \overset{\text{def}}{\iff} X \cup Y = Y \iff X \subset Y \tag{14}$$

で定義される. すなわち, 2^A のハッセ図は包含関係 $\subset$ を $\leq$ とみることで描くことができる. これがもとのブール代数 B_n のハッセ図と同型になっている. 2^A の各元（すなわち A の部分集合）は, 各原子を含むかどうかのデータで記述でき, k 番目の原子を含む場合 $i_k = 1$, 含まない場合 $i_k = 0$ として, 0,1 の列

$$(i_1, i_2, \ldots, i_n) \tag{15}$$

を作れば, これが 2^A の元を表示している. ここで,

$$\begin{aligned} (i_1, \ldots, i_n) \leq (j_1, \ldots, j_n) &\iff i_t \leq j_t \quad (t = 1, \ldots, n). \\ \therefore\ (i_1, \ldots, i_n) \leq (j_1, \ldots, j_n) &\iff \begin{array}{l} (i_1, \ldots, i_{n-1}) \leq (j_1, \ldots, j_{n-1}) \\ \text{かつ } i_n \leq j_n. \end{array} \end{aligned} \tag{16}$$

第 2 式右辺は順序集合の直積の定義に一致するので,

$$B_n = B_{n-1} \times \begin{smallmatrix}\circ\\|\\\circ\end{smallmatrix}\ . \tag{17}$$

したがって,

$$B_n = \begin{smallmatrix}\circ\\|\\\circ\end{smallmatrix} \times \begin{smallmatrix}\circ\\|\\\circ\end{smallmatrix} \times \cdots \times \begin{smallmatrix}\circ\\|\\\circ\end{smallmatrix}\ . \qquad (n\text{ 個}) \tag{18}$$

n が小さいとき, B_n は以下のようになる.

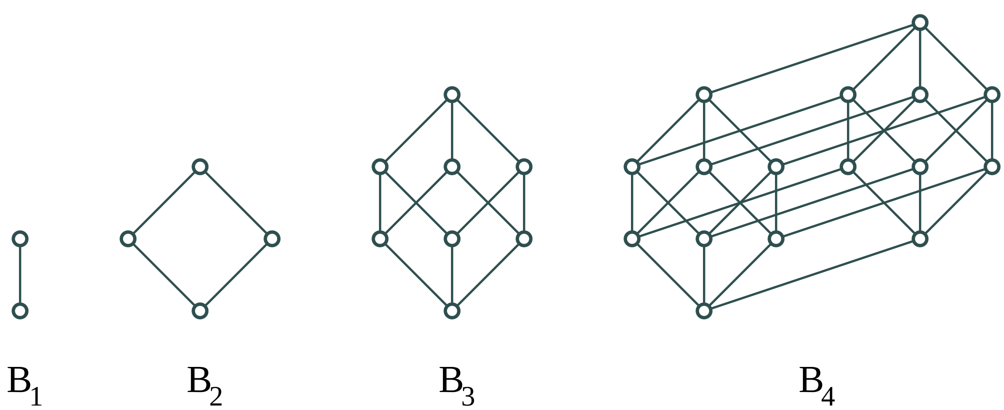


Figure 1:

(ex7) n が小さいとき, ブール代数 B_n の原子を $a, b, c, \ldots$ として, B_n のハッセ図の各元を原子の和で表せ.

[2] これは, 一般のブール代数に関するストーンの表現定理の特別な場合である.

- 8 -（部分代数）ブール代数 B の部分集合 $\tilde{B}$ が次の条件をみたすとき, B の部分代数という.

(i) $\tilde{B}$ は, B の 0,1 を含む.

(ii) $\tilde{B}$ は, B の 3 つの演算 $+, *, \ '$ について閉じている.

B がブール代数の公理をみたすので, $\tilde{B}$ もブール代数の公理をみたす. ゆえに部分代数はブール代数である. B 自身も B の部分代数である.

有限ブール代数の部分代数の求め方を考えよう. 有限ブール代数 B の部分代数 $\tilde{B}$ は有限ブール代数なので有限個の原子を持っており, $\tilde{B}$ の各元が異なる原子の和で一意的に表される. つまり, $\tilde{B}$ は, その原子を決めれば決定してしまうのである.

今, B の原子が a, b, c, d, e としよう. $\tilde{B}$ の原子は B の原子の和で表される. ここで, $\tilde{B}$ の原子として $a+c$, $a+e$, $b+e$ と取ってしまうとどうなるか. これでは, $(a+c)*(a+e) = (a*a)+(a*e)+(c*a)+(c*e) = a \neq 0$ となり, $(a+c)$, $(a+e)$ が原子であることに反する.（原子であれば積 $= 0$.） つまり, $\tilde{B}$ の異なる原子は, B の原子を和の中に共有してはならないことがわかる. 同時にまた, $1 \in \tilde{B}$ なので, $\tilde{B}$ の原子の総和は 1 にならなければならない. これは, $\tilde{B}$ の原子を作るとき, すべての B の原子をどこかで使わなければならないことを意味する.

こうしてみると, $\tilde{B}$ の原子は, B の原子の集合 A を分割することで得られることがわかる. たとえば, 分割 $\{\{a,c\},\{b,e\},\{d\}\}$ から $a+c$, $b+e$, d を作ると, これはある部分代数 $\tilde{B}$ の原子とすることができる.

(T12) B の部分代数 $\tilde{B}$ は, B の原子の集合 A を分割して $\tilde{B}$ の原子を決めることで得られる. したがって部分代数の数は, A の分割の総数に等しい.

(ex8) D_{30} はブール代数である. D_{30} の部分代数をすべて求めよ.（ハッセ図で表示せよ）（全部で 5 個）

- 9 -（ブール式）独立な変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が与えられていて, これらのあいだにブール代数の演算 $+, *, '$ が定義され, ブール代数の公理を（したがって定理も）みたすとする. このとき, 変数とブール代数の演算で構成された式をブール式という. 変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ は独立なので, これらはブール代数において一般的になりたつ等式以外はみたさないこととする. $(x+(x*y')+y)*(z*y')'$, $y+(x*z')+(y*z')$ などは, 変数 x, y, z のブール式である. ブール式においては, 括弧がないときは $*$ を $+$ より先に計算し, $*$ を省略して簡潔に表記することが多い. したがって上記 2 例は, それぞれ $(x+xy'+y)(zy')'$, $y+xz'+yz'$ と表される.

(ex9) 上の 2 つのブール式が等しいことを示せ.

(note5) (T11) より, 有限ブール代数は集合代数とみなせるので, ブール式の変数は各々適当な集合を表していて, 演算 $+, *, '$ が各々 $\cup, \cap, {}^c$ に対応していると考えてよい. こうすれば, ブール式を直感的に理解できる. このとき, 包含関係によりブール式たちの間の順序が決まる. したがって, ブール式では掛ければ掛けるほど小さくなり, 足せば足すほど大きくなることになる. （ただし, 同じものを掛けたり足したりしたときなど, 変わらないこともある.）そして最大のブール式は 1 で普遍集合に対応し, 最小のブール式は 0 で空集合に対応する.

(note6) 変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ のブール式全体からなる集合は, ブール代数をなす. これについては - 14 - で述べる.

- 10 -（基本積と加法標準形）ブール式の変数を $x_1, \ldots, x_n$ とするとき, $x_1', \ldots, x_n'$ を補変数といい, 変数と補変数をあわせてリテラルという. いくらかの異なるリテラルたちの積を基本積という. ここで, 1 は特殊な基本積と考えるが, 0 は基本積とは考えないことにする. したがって, $xyx'z$ などのように, 変数とそれに対応する補変数が同時に出てくる積は基本積ではない. これは

$$xyx'z = (xx')yz = 0yz = 0 \tag{19}$$

となってしまうからである. 以後, $\boxed{\text{式に変数が入っている}}$ という表現では, 補変数が入っている場合も含めることにする. たとえば, xyz' には変数 x, y, z が入っているとみなす.

2 つの基本積 P, Q に対して, P に含まれるすべてのリテラルを Q が含むとき, かつそのときに限り

$$P + Q = P \tag{20}$$

がなりたつ. たとえば, $xy' + xy'z = (xy') + (xy')z = xy'$ である. (20) は誘導順序で $Q \leq P$ を意味する. このように, P より小さいか等しい基本積を P に足しても変わらないので, いくらかの基本積の和を考えるときは, 小さいか等しい基本積は除くことができる. そうしてできた式を加法標準形という. すなわち, 比較不能ないくらかの基本積の和を加法標準形という. $x' + xyz' + yz + xz$ などは加法標準形である.

加法標準形, あるいは単に基本積の和で表されたブール式 E において, E に含まれる基本積を E の項ということにする.

加法標準形において, 各基本積にすべての変数が入っているとき, これを完全加法標準形という. たとえば x, y, z のブール式 $xy'z + x'yz' + x'yz$ は完全加法標準形である. 完全加法標準形は, 和の順序を除いて一意的に定まる.

- 11 -（基本和と乗法標準形）乗法標準形は加法標準形と双対的な概念である. まず基本積と双対的に, いくらかの異なるリテラルたちの和を基本和という. ただし, 0 は特殊な基本和と考えるが, 1 は基本和とは考えないことにする. たとえば $x + y + x' + z$ などのように, 変数とそれに対応する補変数が出てくる和は 1 に等しいため基本和ではない.

2 つの基本和 P, Q に対して, P に含まれるすべてのリテラルを Q が含むとき, かつそのときに限り

$$PQ = P \tag{21}$$

がなりたつ. たとえば, $(x + y')(x + y' + z) = x + y'$ である. (21) は誘導順序で $P \leq Q$ を意味する. このように, P より大きいか等しい基本和を P に掛けても変わらないので, いくらかの基本和の積を考えるときは, 大きいか等しい基本和は除くことができる. そうしてできた式を乗法標準形という. すなわち, 比較不能ないくらかの基本和の積を乗法標準形という. $x(x' + y' + z)(y' + z')(x' + z')$ などは乗法標準形である.

乗法標準形において, 各基本和にすべての変数が入っているとき, これを完全乗法標準形という. たとえば x, y, z のブール式 $(x' + y + z')(x + y' + z)(x + y' + z')$ は完全乗法標準形である. 完全乗法標準形は, 積の順序を除いて一意的に定まる.

(ex10) (1) x, y, z のブール式 $xy + yz'$ を完全加法標準形に直せ. また $(x + y)(y + z')$ を完全乗法標準形に直せ.

(2) 完全乗法標準形 $(x + y' + z + t')(x' + y + z' + t)$ を加法標準形に直せ. また完全加法標準形に直せ.

(ans) (1)

$$\begin{aligned}
xy + yz' &= xy(z+z') + (x+x')yz' = xyz + xyz' + xyz' + x'yz' \\
&= xyz + xyz' + x'yz'. \\
(x+y)(y+z') &= (x+y+zz')(xx'+y+z') \\
&= (x+y+z)(x+y+z')(x+y+z')(x'+y+z') \\
&= (x+y+z)(x+y+z')(x'+y+z').
\end{aligned} \tag{22}$$

- 12 -（主項と合意法）E をブール式とする. 次の 2 条件をみたす基本積 P を E の主項という.

(p1) $E+P=E$.

(p2) P より大きいいかなる基本積 Q も, $E+Q=E$ をみたさない.

(p1) は $P \leq E$ を意味する. また, (p2) は Q が P より大きいとき, $Q \not\leq E$ を意味する. したがって, $\boxed{P \leq E \text{ をみたすような極大な基本積 } P \text{ が主項になる}}$. なお, (p1) は $EP=P$ と同値である.（(ex5) 参照）

ブール式 E の主項をすべて求めるアルゴリズムに合意法というものがある. 基本積 P, Q に対して, ちょうど 1 つの変数 x_i が存在して, P が x_i を含み, Q が x_i' を含むとき, P と Q の合意を x_i と x_i' を除いた P と Q に含まれるリテラルたちの積と定義する.

（合意法のアルゴリズム）

(0) 与えられたブール式 E を加法標準形にする.

(1) E の各項の合意をできるだけ作り, それを E に加える.

(2) 他のある項より小さいか等しい項があれば, それを除く. (1) にもどる.

この操作で E が不変になったとき, すなわち, E に (1), (2) を順に行った結果同じ式にもどるとき, E はすべての主項の和で表現されている.

（合意法の妥当性）E をブール式とする. 合意 S を E に加えてもよい, すなわち $E+S=E$ であることを示す. $E = xP + x'Q + R$（P, Q は基本積, R はブール式）とする. xP と $x'Q$ の合意は PQ であり,

$$\begin{aligned}
E + PQ &= xP + x'Q + R + PQ = xP + x'Q + (x+x')PQ + R \\
&= xP + xPQ + x'Q + x'PQ + R = xP + x'Q + R \\
&= E.
\end{aligned} \tag{23}$$

次に, 合意法で E のすべての主項が出てくることを示す.

(i) 主項 T にすべての変数が入っているとき, T は E に項としてはじめから存在する. そうでないとすれば,

$$E = P_1 + P_2 + \cdots + P_s \tag{24}$$

と基本積の和でかくとき, T が主項なので,

$$T \not\leq P_i \qquad (i = 1, \ldots, s) \tag{25}$$

がなりたつ. これは, 各 P_i に T と異なるリテラルが含まれていることを意味する. ゆえに,

$$T = ET = P_1T + \cdots + P_sT = 0. \qquad \text{（矛盾）} \tag{26}$$

(ii) ある変数, たとえば x を取り, x, x' を含まない主項 T がすべて出てくることを言う. E の項を

$$E = xP + x'Q + R \tag{27}$$

(P, Q, R は x, x' を含まないブール式) の形に展開する. ここで, 両辺に xT または $x'T$ をかけて, $ET = T$ に注意すれば,

$$xT = x(P+R)T, \quad x'T = x'(Q+R)T. \tag{28}$$

T, P, Q, R は x, x' を含まないので,

$$T = (P+R)T = (Q+R)T. \qquad \therefore\ T \le P+R,\, Q+R. \tag{29}$$

$$\therefore\ T \le (P+R)(Q+R) = PQ + PR + QR + R = PQ + R = E_1. \tag{30}$$

ここで, E_1 は合意法の結果として E に含まれる式なので, $E_1 \le E$. これと (30) より, T が x, x' を含まない式 E_1 の主項であることがわかる. そこで, E_1 の中でさらに合意法を続ければ, T に入っていない他の変数もおとせる. これを繰り返せば, (i) より, 最終的には T そのものが項として現れることがわかる. (q.e.d.)

(ex11) 合意法により, $E = xy + x'z' + yz + xy'z$ をすべての主項の和で表せ.

(ans)

$$\begin{aligned} E &= xy + x'z' + yz + xy'z + yz' + xz + x'y \qquad (xy \text{ と } x'z' \text{ の合意など}) \\ &= xy + x'z' + yz + yz' + xz + x'y \qquad (\text{小さい項を除く}) \\ &= xy + x'z' + yz + yz' + xz + x'y + y \qquad (xy \text{ と } x'y \text{ の合意}) \\ &= y + xz + x'z'. \qquad (\text{小さい項を除く}) \end{aligned} \tag{31}$$

- 13 - (カルノー図と最簡形) カルノー図 (Karnaugh map) はブール式の最簡形などを求めるための "四角いベン図" である. ここで, 最簡形とは, 主項のみの和であらわされた表現のうち, 項数が最小のもののことである. 最簡形は一般に 1 つとは限らない. ここでは, カルノー図で最簡形をすべて求める方法を考える.

まず 4 変数以下のカルノー図を扱う. カルノー図では, Figure 2 のように図の各行 (横) または各列 (縦) に適当な基本積を対応させており, それによってすべての基本積が, 大きさ 2^n ($n \ge 0$) の長方形で表示されるように工夫されている. この長方形を基礎矩形という. ただし, カルノー図では上下の境界, または左右の境界が繋っているものとみなしており, したがって, 基礎矩形の中には境界で分裂しているものもあるので注意する. ブール式 E は集合とみなせるので, ベン図であるカルノー図の中に "チェック" をかくことで表示できる. そのチェックされた部分に含まれる基礎矩形のうち, 極大のものが主項である. これを極大基礎矩形という. なるべく少ない極大基礎矩形で E を覆えれば, それで最簡形を作れたことになる.

最簡形をすべて求めるには, まずカルノー図において一意に確定する極大基礎矩形を探すことから始める. それには, カルノー図の中でなるべく隣接するチェックが少ないチェックを選んで, それを含む極大基礎矩形を考えるとうまくいくことが多い. 一意に確定する極大基礎矩形がすべて見つかったら, まだ覆われていないチェックたちをなるべく少ない極大基礎矩形で覆う方法を考えていく. (ただし, 一意に確定する極大基礎矩形が存在しないこともある.)

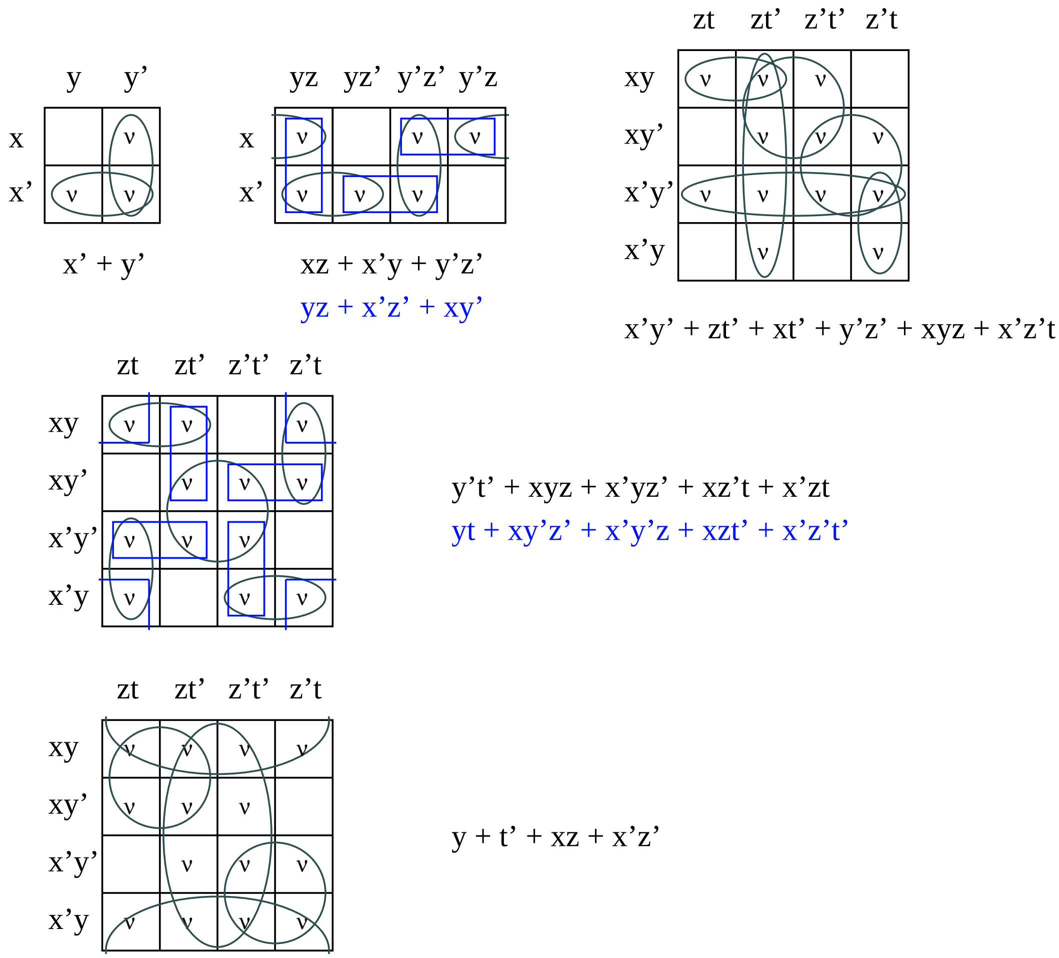


Figure 2:

5 変数以上のカルノー図を構成するには, 上述の 4 変数のカルノー図 K を利用する. 5 変数では, K を横または縦に 2 つ並べる. 6 変数では, K を正方形に 4 つ並べて L とする. 7 変数では L を横または縦に 2 つ並べる. 8 変数では, L を正方形に 4 つ並べて M とする. 以下同様である. その上で, 構成要素 K を次のように変形する. 5 変数の場合, 並べた K を K, K' とかくと, これらが中心軸について対称（あるいは鏡像）の関係になるように基本積を配置する. そして新たに追加する変数を x_i とするとき, K, K' をそれぞれ x_iK, $x_i'K'$ におきかえる. ここで x_iK $(x_i'K')$ とは, K (K') の各基礎矩形に対応する基本積 P を x_iP $(x_i'P)$ におきかえたものである. 6 変数でも同様で, K を正方形に 4 つ並べて $\boxed{\begin{matrix} K & K' \\ K'' & K''' \end{matrix}}$ とし, 縦横の中心軸について対称になるように基本積を配置する. そして 2 つの変数 x_i, x_j を追加して, K, K', K'', K''' をそれぞれ x_ix_jK, $x_ix_j'K'$, $x_i'x_jK''$, $x_i'x_j'K'''$ におきかえる. 7 変数以上でも同様に構成していく. なお, 変数の順序は何でもかまわないので, 必要に応じて変更できる.[3] Figure 3 に 6 変数のカルノー図の例を示しておく.

[3]たとえば Figure 3 のカルノー図では, 変数の順序を x, y, z, t, u, v として構成しているが, この順序は変えてもかまわないということ.

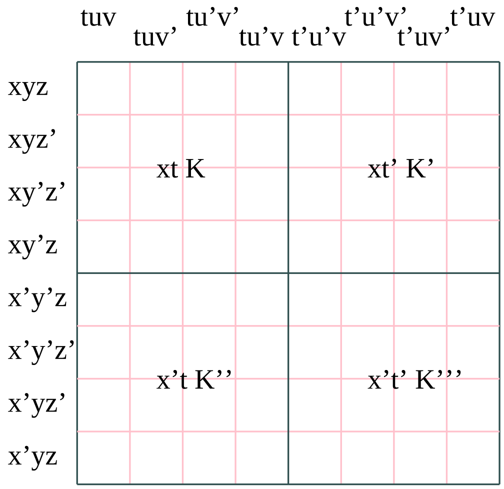


Figure 3:

　このように構成された多変数のカルノー図でも, 最簡形を求める原理は上述と同様であるが, 基礎矩形がどうなるかということだけは注意しなければならない. $2n$ 変数の場合, カルノー図内の図形 S が基礎矩形であるのは, 次の場合である.

(i) S が 2 つの中心軸について対称であり, 四半分（左上, 右上, 左下, 右下）のカルノー図に含まれる部分はそこにおける基礎矩形である.

(ii) S は (i) をみたす S の上半分か下半分, あるいは左半分か右半分である.

(iii) S は (i) をみたす S の四半分のどれかである.

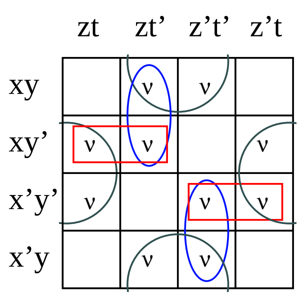
こうして帰納的に $2n$ 変数の場合の基礎矩形が定義される. $(2n-1)$ 変数の場合は $2n$ 変数の場合の基礎矩形のうちで, 半分のカルノー図に収まっているものである.

(ex12) (1) $yt' + y't + xy'zt' + x'y'z't'$ の最簡形をすべて求めよ.

(2) $(x+y+z'+t')(x+y'+z+t')(x'+y+z'+t)(x'+y'+z+t)$ の最簡形をすべて求めよ.

(3) $v'(xyzt'uv')' + xz' + yu'v + x'zv$ の最簡形をすべて求めよ.

(ans) (1) カルノー図は以下左のようになる. これより最簡形は以下の右のとおり.



yt’ + y’t + xy’z + x’y’z’
yt’ + y’t + xy’z + x’z’t’
yt’ + y’t + xzt’ + x’y’z’
yt’ + y’t + xzt’ + x’z’t’

Figure 4:

(2) 与式を E とおくと, $E' = x'y'zt + x'yz't + xy'zt' + xyz't'$ となる. したがって E のカルノー図は Figure 5 左のようになる. これより最簡形は右のとおり.

	zt	zt'	z't'	z't
xy	v	v		v
xy'	v		v	v
x'y'		v	v	v
x'y	v	v	v	

xt + yz + x't' + y'z'

Figure 5:

(3) カルノー図は以下左のようになる．これより最簡形は以下右のとおり．

	tuv	tuv'	tu'v'	tu'v	t'u'v	t'u'v'	t'uv'	t'uv
xyz		v	v	v	v	v		
xyz'	v	v	v	v	v	v	v	v
xy'z'	v	v	v	v	v	v	v	v
xy'z		v	v			v	v	
x'y'z	v	v	v	v	v	v	v	v
x'y'z'		v	v			v	v	
x'yz'		v	v	v	v	v	v	
x'yz	v	v	v	v	v	v	v	v

xz' + x'z + tv' + yu' + y'v' + x'v'

xz' + x'z + tv' + yu' + y'v' + z'v'

Figure 6:

- 14 -（自由ブール代数, 母関数）ブール代数 B の部分集合 S があって, 次をみたすとする.

(i) B が S で生成される. すなわち, B の各元がブール演算 $(+, *, ')$ による S の元達の有限回の結合で表される.（このとき, S の元全体を B の生成元という.）

(ii) S の元は可能な限り独立である. すなわち, S の元達はブール代数において一般になりたつ等式以外はみたさない.

このとき, B を S で生成された自由ブール代数という. S が有限集合ならば, B を有限生成自由ブール代数という.

今 $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ とすると, B は変数 $x_1, \ldots, x_n$ のブール式全体からなる有限生成自由ブール代数であり, 変数 $x_1, \ldots, x_n$ がその生成元である. B の原子は, $x_1 \ldots x_n$, $x_1' \ldots x_n'$, などすべての変数が入っている基本積である. B の任意の元は原子の和で一意的に表される. これがブール式の完全加法標準形に他ならない. これと双対的に, B の任意の元は 1 の直前の元たちの積で一意的に表される. これはブール式の完全乗法標準形に他ならない. B の原子の数は 2^n なので, $|B| = 2^{2^n}$ である. これは異なるブール式の個数を表している.（変形して移り合えるブール式は同じとみなす.）

一般にブール代数 B_n（n 個の原子を持つブール代数）は次数つき順序集合である. 階数 i の元は i 個の（異なる）原子の和で表される元であり, その数は $\binom{n}{i}$ である. B_n の階数は n であり, その母関数は,

$$\begin{aligned} F(B_n, q) &= 1 + \binom{n}{1}q + \binom{n}{2}q^2 + \cdots + \binom{n}{n}q^n \\ &= (1+q)^n \end{aligned} \tag{32}$$

である.（これは (18) と 11 章 (T2) からも導かれる.）したがって, 上記の B については,

$$F(B, q) = (1+q)^{2^n} \tag{33}$$

である.