複素関数論演習　By K. Asai　1 (§1)

1. 次の複素数を $a+bi$ の形で表せ.

(1) $\dfrac{25-25i}{7+24i}$　(2) $\dfrac{3}{-i}-\dfrac{i}{1+i}$　(3) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^{26}$　(4) $(-2+2i)^{101}$

(5) $\left[1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)i\right]^{10}$

ヒント: (5) 角括弧内に $\frac{1+i}{1+i}$ を掛けよ.

2. 次の複素数を極形式で表せ.

(1) 3　(2) $\sqrt{5}/i$　(3) $\sqrt{3}i-1$　(4) $-i-1$　(5) $\sqrt[3]{2i}$

3. 次の方程式を解き, その解を図示せよ.

(1) $z^2=5i$　(2) $z^6=-1$　(3) $z^5=-32i$

4. 次の条件をみたす複素数 z の範囲を図示せよ.

(1) $|\mathrm{Arg}\, z|<\dfrac{4\pi}{5}$　(2) $1\leq |z-i+1|<2$　(3) $|\mathrm{Re}\,(z^2)|\leq 2$

(4)* $\left|\left|\dfrac{1}{z}\right|+i\right|\leq 2$　(5) $z=-i\overline{z}$　(6) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{2z+1}{z+2}\right)=0$

(7)* $3|z|\leq 1-2\mathrm{Im}\,(z)$

5. (1) α,β が, $|\alpha|,|\beta|<1$ をみたす複素数のとき, 不等式: $\left|\frac{\alpha+\beta}{1+\overline{\alpha}\beta}\right|<1$ がなりたつことを示せ. (2) $\omega=e^{\frac{2}{5}\pi i}$ とおくとき, 次を示せ.

$$0<\frac{\omega-1}{\omega^2-\omega^4}=\frac{\omega^2-\omega}{\omega^3-1}=\frac{\omega^3-\omega^2}{\omega^4-\omega}=\frac{\omega^4-\omega^3}{1-\omega^2}=\frac{1-\omega^4}{\omega-\omega^3}<1$$

ヒント：(1) 分母を払って両辺を 2 乗した式を証明する. (2) 図を描け.

6. 次の極限を計算せよ.

$$(1)\ \lim_{z\to\infty}\frac{3}{1-2z^2} \qquad (2)\ \lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{z} \qquad (3)\ \lim_{z\to i}\frac{z\overline{z}-5z-\overline{z}i+5i}{z(1+z^2)}$$

7.* 複素数 z と $\overline{z}$ と $1/z$ は, リーマン球面上でどのような位置関係にあるか. 図示せよ. ここで, z がリーマン球面上の点 (ξ,η,ζ) に対応するとき, 次がなりたつ.

$$\xi=\frac{1}{2}\,\frac{z+\overline{z}}{z\overline{z}+1},\quad \eta=\frac{1}{2i}\,\frac{z-\overline{z}}{z\overline{z}+1},\quad \zeta=\frac{z\overline{z}}{z\overline{z}+1}.$$

8. 次の関数 $f(z)$ により, 与えられた集合 D はどこに移るか. 図示せよ.

(1) $f(z) = (2-2i)z, \quad D: 1 < \mathrm{Re}\,(z) \leq 2.$
(2) $f(z) = z^2, \quad D: 1 \leq |z| \leq 2,\ -\pi/3 < \mathrm{Arg}\, z \leq \pi/2.$
(3) $f(z) = 2iz, \quad D: |z-1| \leq 1.$

9. 以下の各関数の与えられた点における連続性を調べよ.

$$(1)\ f = \frac{z}{1+|z|^2} \quad (z=i) \qquad (2)\ f = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases} \quad (z=0)$$

10. 次の関数 $f(z)$ は全平面で正則か. また正則ならば, その導関数を求めよ. ただし, (2) は実数 a の値で場合わけせよ.

(1) $f(z) = (-x^3+3xy^2) + i(y^3-3x^2y)$
(2) $f(z) = e^{-2ay}(\cos 2x + ai \sin 2x)$

11. 次の関数 $f(z)$ が微分可能となる点をすべて求めよ.

(1) $f(z) = \overline{z}^2$ (2) $|z|^2$ (3) $\overline{z}$
(4) $x^2 - y^2 + i(x^2+y^2)$ (5) $\frac{1}{3}x^3 + xy^2 + i(x+y)$

12. 以下の関数は調和関数であることを確かめ, それに対応する正則関数 $f(z) = u + iv$ を求めよ.

(1) $u = -x^2 + 2xy + y^2$ (2) $v = (2x+1)(3y+2)$ (3) $u = \cos x \cosh y$

13. $f(z) = e^{cz} = u(x,y) + iv(x,y)$ $(z = x+yi)$ とおく. u, v が Cauchy–Riemann の関係式をみたすことを示せ. ただし, $c = a+bi$ は複素数の定数.

14. 次の関数を微分せよ. ((1)–(3) は e^z を使って表してから微分する.)

$$(1)\ \sin z \quad (2)\ \cos iz \quad (3)\ \tanh z \quad (4)\ \frac{i}{iz^2+5} \quad (5)\ (z^3-5z)^3$$

15. (1) 関数が “ある点で微分可能” と “ある点で正則” の違いを述べよ.
(2) $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ が領域 D で正則とする. このとき u, v は D で調和関数となることを示せ. ただし, u, v が D で C^2 級であることは認めてよい.

16. 関数 $f(z) = e^z$ に対して, (1) $e^{z+c} = e^z e^c$, (2) $(e^z)' = e^z$ を示せ.

17. 任意の $z \in \mathbf{C}$ に対して, $e^z \neq 0$ となることを示せ.

18. 次の値を計算せよ.（多価になる場合もある.）（値がない場合もある.）

(1) $\mathrm{Log}\,(-e)$ (2) $\log(i - \sqrt{3})$ (3) $\arccos 2i$ (4) $\arcsin \pi$
(5) $\arctan i$ (6) $(1-i)^i$ (7) i^{1-i} (8)* $\log(-i)^{2i}$

19. 次の方程式を解き, その解を図示せよ.

(1) $e^z = \sqrt{3}i - 1$ (2) $\cosh z = \cos i$ (3) $\sin z = 8$

20. 次の方程式を解け. (1) $e^z = 1 + i$. (2) $e^{z^2} + 1 = 0$.

21. (1) $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$ を示せ.
(2) $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$ を示せ.

22. (1) $\cosh(z + w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w$ を示せ.
(2) $\sinh(z + w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w$ を示せ.

23. (1) $\sin(z + 2\pi) = \sin z$ を示せ. (2) $\tanh(z + i\pi) = \tanh z$ を示せ.

24. (1) $\arcsin z = -i \log(iz + \sqrt{1 - z^2})$ を示せ.
(2) $\arctan z$ を $\log$ で表せ.

25. (1) $\log \frac{1}{z} = -\log z$ を示せ. (2) $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$ を示せ.

26. m を整数, z, w を複素数とするとき, $z^{m+w} = z^m z^w$ がなりたつことを示せ.

27. $f(z)$ が正則のとき, $\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = |f'(z)|^2$ を示せ.

28.* $f(z)$ が z の正則関数であるとき, $\overline{f(\overline{z})}$ もまた z の正則関数であることを示せ.

29. 次の複素積分を計算せよ．ただし単位円周を C とし, C の向きは正とする．

$$(1) \int_C 3dz \qquad (2) \int_C 2z^2 dz \qquad (3) \int_C \frac{dz}{z}$$

30. 単位円周を C, その上半分に沿って -1 から 1 へ向かう曲線を C^+, 下半分に沿って, -1 から 1 へ向かう曲線を C^- とする．$f(z) = \mathrm{Im}\,(z)$ に対し, (1) $\displaystyle\int_{C^+} f(z)dz$, (2) $\displaystyle\int_{C^-} f(z)dz$ を求めよ．

31. 4 点 ± 1, $\pm i$ を頂点とする正方形の周を C とし, その向きを正とする．次の積分を求めよ．

$$(1) \int_C z dz \qquad (2) \int_C \overline{z} dz \qquad (3) \int_C |z|^2 |dz|$$

32. 0 から $1+i$ へ向かう曲線 C を, 次のように定める．
(1) C : 線分．
(2) C : 実軸に沿ってから, 虚軸に平行にいく．
(3) C : 虚軸に沿ってから, 実軸に平行にいく．
(4)* $C : y = \sin \frac{\pi x}{2}$ に沿っていく．
$z = x + iy$ のとき, 次の積分の値を求めよ．

$$\int_C (x + y - x^2) dz$$

33. C を $|z| = 2$（正の向き）とし C' を i から $-i$ までの単位円周の右半分とするとき, 次の不等式を示せ．

$$(1) \left| \int_{C'} (x^2 + iy^2) dz \right| \le \pi \qquad (2) \left| \int_C \frac{|e^z|}{z(z+i)} dz \right| \le 2\pi e^2$$

$$(3) \int_C \frac{|dz|}{|z + z^{-1}|} \le \frac{8\pi}{3}$$

34. 次の積分を求めよ. ただし, $C : |z+1| = 2$ とし, 向きは正とする.

$$(1)\ \int_C \frac{dz}{z} \qquad (2)\ \int_C \frac{z+1}{z(z+2)}dz$$

35. 関数 $\frac{3z+2}{z^2(z^2-1)}$ を, 次の各点を中心とする半径 $1/2$ の円周（正の向き）に沿って積分せよ. (1) 1 (2) -1 (3) 0

36. 次の各曲線に対して, $\displaystyle\int_{C_k} \frac{z}{z^4-1}dz$ を求めよ. ただし, 曲線の向きは正とする.

(1) $C_1 : |z| = \frac{2}{3}$ (2) $C_2 : |z-i| = 1$ (3) $C_3 : |z+1| = \frac{3}{2}$

37. 次の積分を計算せよ. ただし, C の向きは正とし, $k = 1, 2$ とする.

(1) $\displaystyle\int_C \frac{z^3-i}{z^3+z}dz$ $C : |z-i/2| = 1$

(2) $\displaystyle\int_C \frac{3z-2}{z^2+z-2}dz$ $C : 2 \pm i, -3 \pm i$ を頂点とする矩形

(3) $\displaystyle\int_C \frac{z^2+z+2}{z^{k+1}-2z^k}dz$ $C : 3 \pm i, -1 \pm i$ を頂点とする矩形

38. C を $y = \cos\frac{\pi x}{2}$ に沿って i から 3 へ向かう曲線とするとき, 次の積分を求めよ.

$$(1)\ \int_C (z^5 - 2z)dz \qquad (2)\ \int_C e^{\pi z}dz \qquad (3)^*\ \int_C \frac{z-1}{z(z-2)}dz$$

39. c を定数, C を c を通らない正の向きの単一閉曲線とする. このとき次を求めよ.

$$\int_C \frac{z^2\cos(z-c)}{(z-c)^3}dz$$

40. 領域 $|z| < 2$ を D とおく. C を 0 から z へ向かう D 内の単一曲線とするとき, 次を求めよ.

$$(1)\ \int_C \frac{\zeta}{\zeta+2}d\zeta \qquad (2)\ \int_C \frac{\zeta}{(\zeta^2+4)^2}d\zeta$$

41. $\mathbf{C}$ から 0 以下の実数を除いた領域を D とする. C を 1 から z へ向かう D 内の単一曲線とするとき, 次を示せ.

$$(1)\ \int_C \frac{d\zeta}{\zeta} = \mathrm{Log}\, z \qquad (2)\ \int_C \mathrm{Log}\,\zeta d\zeta = z\mathrm{Log}\, z - z + 1$$

42. C^+ を -1 から 1 までの単位円周の上半分, C^- を -1 から 1 までの単位円周の下半分とするとき, 次の等式を示せ.

$$(1)\ \int_{C^+} \frac{e^z}{1+2z^2}dz = \int_{-1}^{1} \frac{e^t}{1+2t^2}dt - \frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{\frac{i}{\sqrt{2}}}$$
$$(2)\ \int_{C^-} \frac{e^z}{1+2z^2}dz = \int_{-1}^{1} \frac{e^t}{1+2t^2}dt - \frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}$$

43. $C_1 : |z| = 2$, $C_2 : |z+1| = 1$, $C_3 : z = it + \sin t$ $(0 \le t \le 3\pi)$ とするとき, 以下の積分を求めよ. ただし C_1, C_2 の向きは正とし, $n = 1, 2, \ldots$ とする.

$$(1)\ \int_{C_1} \frac{e^{3z}}{z^{n+1}}dz \qquad (2)\ \int_{C_2} \frac{z^2e^z}{(z+1)^{n+1}}dz \qquad (3)\ \int_{C_3} ze^{z^2}dz$$

44. 極座標表示された曲線 $r = \theta$ $(0 \le \theta \le \tau)$ を C_τ で表す. このとき, 以下の積分を求めよ.

$$(1)\ \int_{C_\pi} \frac{dz}{z+1} \qquad (2)\ \int_{C_{2\pi}} \frac{dz}{z+1} \qquad (3)\ \int_{C_{4\pi}} \frac{dz}{z+1}$$

46.* $f(z)$ が全平面（すなわち $|z| < \infty$）で正則で, (1) $\mathrm{Re}\,(f(z)) \le M$ をみたす実数 M が存在すれば, $f(z)$ は定数であることを示せ. ($e^{f(z)}$ に対して Liouville の定理を使う)
(2) $\mathrm{Im}\,(f(z)) \le M$ をみたすときはどうか.

47. $f(z)$ を整関数（全平面で正則）とする. $C_r : |z| = r$ とし, Γ_r を $\pm r$, $\pm ri$ を 4 頂点とする正方形とする. $|f(z)|$ の C_r における最大値を $M(r)$ とし, Γ_r における最大値を $N(r)$ とする. このとき以下を示せ.
(1) $M(r)$, $N(r)$ はともに増加関数である.
(2) $N(r) \le M(r) \le N(\sqrt{2}r)$.

48. $f(z) = z^4 - 14z^2 + 24z + 118$ とする. このとき
(1) $f(z)$ は実軸上で根を持たないことを示せ.
(2) $f(z)$ は複素数の根を少なくとも 1 つ持つことを示せ. （背理法による. $1/f(z)$ に Liouville の定理を用いる）

51. (1) 複素数列 $\{a_n\}$ が収束するとは何か. 定義を述べよ.
(2) また, 数列 $1, i, 1, 1, i, 1, 1, 1, i,\ 1, 1, 1, 1, i, 1, 1, 1, 1, 1, i, \ldots$ は収束するか. 理由をつけて答えよ.
(3) ある 2 つの実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について, それらの和と差 $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$ を調べたところ, それぞれ s, t に収束した. 複素数列 $\{a_n + ib_n\}$ は収束するか. するならば, その値はいくらか.

53. (1) 級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ の収束 および 絶対収束とはどういうことか.
(2) 級数 $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - \cdots$ は収束するか. また絶対収束するか. 理由もいえ. $1 + i/2 + 1/3 + i/4 + 1/5 + \cdots$ の場合はどうか.
(3) 数列 $\{a_n\}$ が収束するならば, Cauchy の収束条件を満足することを示せ. （実際には逆もなりたつ）

55. (1) 関数列 $\{f_n(z)\}$ が D において $f(z)$ に一様収束するとはどういうことか.
(2) 関数列 $\{2^n(z-1)^n\}$ は $|z-1| < \frac{1}{2}$ で 0 に収束することを示せ.
(3) 関数列 $\{2^n(z-1)^n\}$ は $|z-1| \le \frac{1}{3}$ で 0 に一様収束することを示せ.

57. 次に示す関数列 $\{f_n(z)\}$ に対して, その極限関数 $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ を求め, それが正則ならば導関数を求めよ.

$$(1)\ f_n(z) = \frac{n+2}{n+1}z - z^3 \qquad (2)\ e^{z/n}$$
$$(3)\ \frac{3n}{2n+1}z^2 + z^n \qquad (|z|<1)$$
$$(4)^*\ \frac{nz+5n}{nz^2+1} + \frac{z^n}{(2z-2)^n} \qquad (1<|z-1|<5)$$

58. 次の関数列 $\{f_n(z)\}$ の極限関数 $f(z)$ を求めよ. またそれは連続か. ただし, (2) は $|z| \neq 1$ とする.

$$(1)\ f_n(z) = z + z^2/n + (1+i|z|)^{-n} \qquad (2)\ \frac{2z^{n+1}+1}{z^{n+2}+z^n+3}$$

59. 次の巾級数の収束半径 R を求めよ. ただし, c は定数であり, p は正の整数とする.

$$(1)\ \sum_{k=0}^{\infty} k(z-2)^k \qquad (2)\ \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)z^k \qquad (3)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^p}$$
$$(4)\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-c)^k}{(3i)^k} \qquad (5)\ \sum_{k=0}^{\infty} k!(z-c)^k$$
$$(6)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(3i-4)^k}{k(k+1)}z^k \qquad (7)^*\ \sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} \qquad (8)^*\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{2k}}{(k!)^2}(z-c)^k$$

60. (1) 級数 $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}(\cos kz)/k^2$ は, 実軸上で一様収束することを示せ. (Weierstrass の判定法と, $\sum 1/k^2$ が収束することをつかえ.)
(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)dx$ を級数で表せ.

61. 級数 $f(z) = 1 + z + z^2 + \ldots$ について, (1) $0 < r < 1$ に対して, $f(z)$ は閉円板 $K_r : |z| \leq r$ で一様収束することを示せ. また K_r において, $f(z)$ を有理式で表せ.
(一様収束は, 直接示すか Weierstrass の判定法を用いる)
(2)* $f(z)$ は, 領域 $D : |z| < 1$ で広義一様収束することを示せ. ((1) を利用せよ)

63. 次の関数を, 与えられた点を中心として Taylor 展開せよ. （ただし c は複素数の定数, n は自然数とし, (11) では $\tan^{-1} 0 = 0$, (13) では $\frac{1}{\sqrt{1}} = 1$ とせよ.）

(1) $\dfrac{i}{1-z}$; $(z=0)$ (2) $\dfrac{1}{z}$; (1) (3) $\dfrac{1}{z}$; (i) (4) e^{2z} ; (0)

(5) $(z+c)^n$; (0) (6) $\cos^2 z$; (π) (7) $\dfrac{2}{1-z^2}$; (0)

(8) e^{iz} ; $(\pi/2)$ (9) $\dfrac{1}{z^2+z-6}$; (-1) (10) $e^{2z}+e^{3z}$; (πi)

(11)* $\tan^{-1} z$; (0) (12)* $\dfrac{z^2}{(1-z^2)^2}$; (0) (13)* $\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$; (0)

ヒント : (7) は, $\frac{2}{1-t}$ を展開した後, $t = z^2$ を代入するか, または $\frac{2}{1-z^2}$ を部分分数分解する. (11) は, $\frac{1}{1+z^2}$ を展開しておいて項別積分せよ. (12) は, たとえば $\frac{1}{1-z^2}$ を展開しておいて, 項別微分せよ. (13) は, $\frac{1}{\sqrt{1-t}}$ を展開しておいて $t = z^2$ を代入する.

メモ : 部分分数分解とは, たとえば, $\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)} = \frac{a}{z-\alpha} + \frac{b}{z-\beta} + \frac{c}{z-\gamma}$ と変形すること. 係数の求め方は, 分母を払って考えよ.

64. 次の関数の Maclaurin 展開のはじめの 4 項までを求めよ.

(1)* $\arcsin z \quad (\arcsin 0 = 0)$ (2) $e^{e^z - 1}$

65. 領域 $|z| < R$ で正則で, 実軸上で常に実数値をとる関数の Maclaurin 展開の係数はすべて実数となることを示せ.

[64.(1)] のヒント: まず $w = \arcsin z$ として微分すると, $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{dz/dw} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ である. これは単位円 C 内で正則であり, かつ C の内部は単連結領域だから, $w(z) - w(0) = \displaystyle\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ が得られる. ただし, 積分路 Γ は C 内にあれば任意であり, $\sqrt{1-z^2}$ は主値, すなわち偏角が 0 に近いものを取るとする. （それにより $\arcsin z$ の主値を取ることができる） ゆえに $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ を展開して, 項別積分 $\displaystyle\int_0^z$ すればよい. 63(13) 参照.

66. 次の各関数 $f(z)$ を, 与えられた点を中心として Taylor 展開し, その収束半径 R を求めよ.

$$(1)\ \frac{z+z^2}{1-z}\quad (z=0)\quad (2)\ \sin iz\quad (z=\pi i)\quad (3)\ \mathrm{Log}\, z\quad (z=1)$$

$$(4)^*\ \frac{z}{(2+z)^2}\quad (z=-i)\qquad (5)\ \frac{z}{z^2-2z-15}\quad (z=1)$$

67. 次の関数の有限の 0 点, 極および真性特異点をすべて求めよ. 0 点, 極の場合は位数も求めよ.

$$(1)\ \frac{z-1}{z^2(z^3-1)}\qquad (2)\ \sin\frac{1+z^2}{1-z^2}\qquad (3)\ \frac{1}{\sin z-\cos z}$$

$$(4)\ z^{-3}e^{1/(z-i)}\qquad (5)\ \tanh(z+i)$$

68. 次の関数 $f(z)$ を, 与えられた点を中心として Taylor 展開せよ.

$$(1)\ \frac{i}{z-i}\quad (z=0)\qquad (2)\ e^{\pi z}\quad (z=i)$$

$$(3)\ \frac{z^2-4z}{(z-2)^2}\quad (z=3)\qquad (4)\ \sin z\quad (z=-i)$$

69. (1) 級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が収束するならば, 数列 $\{a_n\}$ は有界であることを示せ. （逆はなりたたない）
(2) 巾級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ は $z=z_0$ で絶対収束するならば, 閉円板 $|z|\le|z_0|$ で一様収束することを示せ.

70. (1) 級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が絶対収束するならば収束することを示せ. ヒント：Cauchy の収束条件を用いる.
(2)* $\{f_n(z)\}$ を D で定義された関数列とする. 級数 $\sum_{k=0}^{\infty}|f_k(z)|$ が D で一様収束するならば, $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ もまた D で一様収束することを示せ.

71. $f(z)=\frac{1}{z^k}$ について, (1) $k=1$ のとき $z=i$ を中心とする $f(z)$ の Taylor 級数および Laurent 級数を求め, その収束域を図示せよ.
(2) 項別微分をすることにより, $k=2$ に対して (1) と同様の問いを解け.

72. 次の関数 $f(z)$ を, $z=0$ を中心として (a) Taylor 展開せよ．また (b) Laurent 展開せよ．ただし $0<|\alpha|<|\beta|$ とする．また, 各々の収束域も図示せよ．ヒント: (1) の Laurent 展開は, 考える領域によって 2 通りある．

$$(1)\ \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} \qquad (2)\ \frac{1}{(z-\alpha)^2}$$

73. 次の各関数 $f(z)$ のすべての極を求め, 各々の極のまわりでの Laurent 級数の主部 E を求めよ．

$$(1)\ \tan z \qquad (2)\ \cot z$$

74. 以下の関数 $f(z)$ の, 与えられた点を中心とする Laurent 級数を求めよ．（(2)(4) についてはTaylor 級数およびLaurent 級数を求めよ） また各級数の収束域を図示せよ．

$$(1)\ \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2}\quad (z=i) \qquad (2)\ \frac{z}{z^2-6z+5}\quad (z=3)$$

$$(3)\ \frac{5(z+1)}{z^2+z-6}\quad (z=2),\ (z=-3) \qquad (4)\ \frac{4z+2}{(z+2)(z-4)}\quad (z=1)$$

75. 次の関数 $f(z)$ の特異点をすべて求め, それらの点における留数を求めよ．ただし, $a>0$ とする．

$$(1)\ \frac{i+iz}{z^2} \qquad (2)\ \frac{z^2-1}{z^3(z^2+1)} \qquad (3)\ \frac{e^{z^4}}{z^4-a^4} \qquad (4)^*\ \frac{i\tan z}{1-e^z}$$

76. C_1 を単位円周, C_2 を $|z-\frac{i}{2}|=1$, C_3 を 4 点 $\pm 2\pi \pm i$ を頂点とする矩形（向きはすべて正）とする．次の積分を求めよ．(2) はロピタルの定理を利用せよ．

$$(1)\ \int_{C_1}\frac{2z+3}{\sin z}dz \qquad (2)\ \int_{C_1}\frac{2z+3}{\sin^2 z}dz \qquad (3)\ \int_{C_2}\frac{z^2-1}{z^3(z^2+1)}dz$$

$$(4)\ \int_{C_3}\frac{z^2+z}{1+e^{iz}}dz$$

77. 次の定積分の値を求めよ．ただし $a, b > 0$ とする．

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{2+\cos\theta}d\theta$　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4+x^2}$　(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^6}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$　(5) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin bx}{x^2+a^2}dx$　(6) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{(x^2+a^2)^2}dx$

78. (a) 以下の微分方程式をみたすような, 与えられた点を中心とする巾級数 $f(z)$ を求めよ．(b) またその収束半径 R を求めよ．ただし, c は 0 でない定数とする．(1),(3),(4): 中心 0. (2): 中心 c.

(1) $f'(z) + cf(z) = 0.$　(2) $f'(z) - (z-c)^2 f(z) = 0.$
(3) $z(z-c)f''(z) = 2f(z).$
(4) $zf''(z) + zf'(z) + f(z) = 0.$

79. $f(x)$ が偶関数のとき, その Fourier 変換 $\hat{f}(t)$ も偶関数となり, $f(x)$ が奇関数のとき, $\hat{f}(t)$ も奇関数となることを示せ． なお, $\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}f(x)dx$ で与えられる．

80. 留数を利用して, 以下の関数 $f(x)$ の Fourier 変換 $\hat{f}(t)$ を求めよ．ただし $a > 0$ とする．

(1) $\dfrac{1}{a^2+x^2}$　(2) $\dfrac{x}{1+x^4}$　(3) $\dfrac{x}{a^2+x^2}$

81.* 留数を利用して, $z = 0$ を中心とする $g(z) = \frac{e^z}{(z-\alpha)(z-\beta)}$ の Laurent 級数の主部 E を求めよ．ただし, $\alpha \neq \beta$ かつ $|\alpha| = |\beta| = K > 0$ とする．

82.* (1) 関数 $f(z) = \frac{e^{ibz}}{z^4+a^4}$ の上半平面にある極と, その点における留数を求めよ．ただし $a, b > 0$ とする．

(2) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ を計算せよ．

83. C を 4 点 $\pm 1+5\pi i$, $\pm 1-\pi i$ を頂点とする正の向きの矩形とし, $a>1$, $b>0$, $b\neq 1$ とする. 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a-\cos\theta}$ (2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{a-\sin\theta}{a+\sin\theta}d\theta$

(3) $\displaystyle\int_C\frac{1+e^{z/6}}{1-e^z}dz$ (4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos bx}{(1+x^2)(b+x^2)}dx$

84.* 以下の微分方程式をみたすような, 与えられた点を中心とする巾級数 $f(z)$ を求めよ. ただし, c は定数とする. (1),(3): 中心 0. (2): 中心 c.

(1) $zf'''(z)+1=f(z)$. (2) $(z-c)^2f''(z)+f'(z)=2f(z)$.
(3) $f''(z)+zf(z)=0$.

85. 次の定積分を計算せよ. ただし $0<a<1$ とする. (2),(3) については sin の式で表せ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^a}{(x+1)(x+2)}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{(1+x)^2}dx$

86. $a>1$, $g(z)=z^n-e^{z-a}$ とする. m 位の 0 点を m 個として数えるとき, 次の問いに答えよ.
(1) $g(z)$ は $|z|<1$ において n 個の 0 点を 持つことを示せ.
(2) $n\geq 3$ のとき, $g(z)$ は $1\leq|z|\leq 2$ において 0 点を持たないことを示せ.

87. m 位の 0 点を m 個として数えるとき, 次の問いに答えよ.
(1) $g(z)=z^6+6z^3-15$ は $|z|<2$ においていくつの 0 点を持つか.
(2) $g(z)=z^3+\frac{48}{z^3}+1$ は $|z|<2$ においていくつの 0 点を持つか.
(3) $g(z)=z^5+4iz^2+\frac{1}{3-2z}$ は $|z|<1/2$ においていくつの 0 点を持つか.

88.* $g(z)=\frac{z^2}{z^2-3}+e^z$ は $|\mathrm{Im}\,z|<2n\pi$ において, $(2n+2)$ 個の 0 点を持つことを示せ. ただし, $n=1,2,3,\ldots$ とし, m 位の 0 点は m 個として数える.