– 複素関数論ハンドアウト –

by K. Asai

1章　複素数と複素平面

キーワード: 複素数, 複素平面, 極形式, de Moivre の定理,
$z^n = c$, Riemann 球面

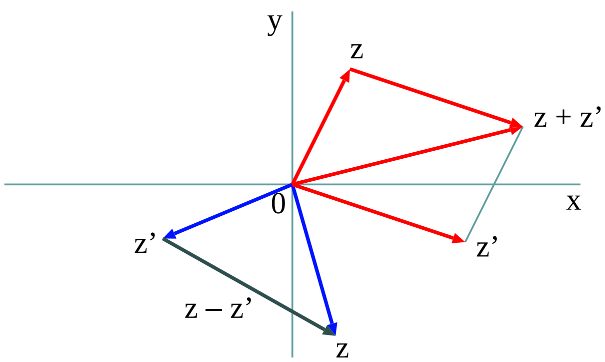
- 1 -（複素数と複素平面）複素数とは, 実数 x, y を用いて $z = x + yi$ と表せる数である. ここに, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位を表し, $i^2 = -1$ をみたすものとする. $y = 0$ のときは z は実数となるので, 実数は複素数の一種とみなせる. 実数でない複素数を虚数という. yi $(y \neq 0)$ の形の数は純虚数という. 複素数 $z = x + yi$ に対して, x を z の実部といい, $\mathrm{Re}\, z$ で表す. また y を z の虚部といい, $\mathrm{Im}\, z$ で表す.

2 つの複素数 $z = x + yi$, $z' = x' + y'i$ に対して,

$$z = z' \iff x = x' \text{ かつ } y = y' \tag{1}$$

がなりたつ. このため, 複素数は実部と虚部を座標の成分として持つ座標平面上の点で表示される. つまり, $x + yi$ は (x, y) という点で表示することができる. このように複素数を表示する平面を複素平面と呼ぶ. 複素平面内の実部を表す座標軸を実軸といい, 虚部を表す座標軸を虚軸という. 原点は 0 を表す. 複素平面全体は全平面と呼ばれ, 複素数全体の集合 $\mathbf{C}$ と同一視される. また実軸は実数全体の集合 $\mathbf{R}$ と同一視される.

$z = x + yi$ に対して, $x - yi$ を $\overline{z}$ で表し, z の共役複素数という. 複素平面上では, $\overline{z}$ は実軸に関して z と対称の位置にある点である.



- 2 -（複素数の和, 差, 実数倍）複素平面上の点 z はその位置ベクトルで表すことができる. これにより, 複素数 z は原点から点 z に至るベクトルで表すことができる. このベクトルは, 当然平行移動しても同じ複素数を表していると考える.

2 つの複素数 $z = x + yi$, $z' = x' + y'i$ に対してそれらの和 $z + z'$ を,

$$z + z' = (x + x') + (y + y')i \tag{2}$$

で定義する．これを複素平面上で（ベクトルに直して）表示すれば,

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \tag{3}$$

となる．すなわち, 複素数の和は複素平面上ではベクトルの和を求めていることになる．明らかに, $z + z' = z' + z$, $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$ がなりたつ．

複素数 z に対して $-z$ は, $z + (-z) = (-z) + z = 0$ をみたす数として定義される．これは z をベクトルとみたときの逆ベクトルであり, 複素平面上の点としては, z と $-z$ は原点に関して対称の位置にあって, $-z' = -(x' + y'i) = -x' - y'i$ である．したがって, z と z' の差 $z - z' = z + (-z')$ は,

$$z - z' = (x - x') + (y - y')i \tag{4}$$

で与えられる．複素平面上では,

$$(x, y) - (x', y') = (x - x', y - y') \tag{5}$$

であり, これは上図のようなベクトルで表せる．この図は, $z' + (z - z') = z$ であることからも明らかである．

また, 複素数 z の実数 x' 倍は,

$$x'z = x'x + x'yi \tag{6}$$

と定義する．この演算は複素平面上では $x'(x, y) = (x'x, x'y)$ とかけるので, ベクトルのスカラー倍に対応していることがわかる．$x' > 0$ に対しては, $x'z$ はベクトル z の向きを変えずに, 長さを x' 倍にしたものであり, $-x'z$ はベクトル z を逆向きにして, 長さを x' 倍にしたものである．

- 3 -（複素数の積, 商と極形式）複素数の積については通常の分配律がなりたつと考えて,

$$zz' = (x + yi)(x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i \tag{7}$$

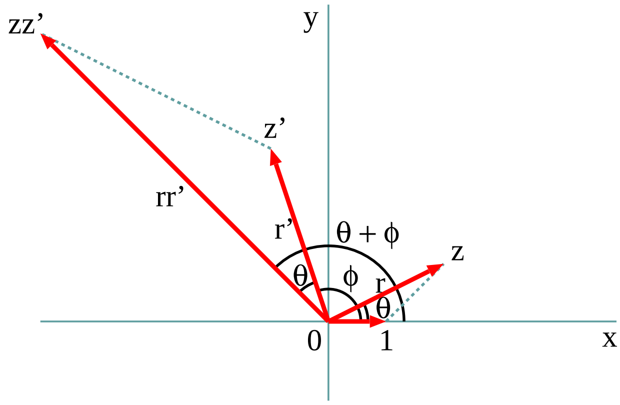
と定義する．以下の計算法則がなりたつ: $zz' = z'z$, $(zz')z'' = z(z'z'')$, $z(z' + z'') = zz' + zz''$, $(z + z')z'' = zz'' + z'z''$.

ここで, 積を複素平面上で理解するために極形式を導入する．複素数 $z = x + yi$ に対して, 複素平面上での原点と点 z の距離 r を z の絶対値といい, $|z|$ で表す．これは z をベクトルとみなしたときのベクトルの長さともいえる．3 平方の定理より, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ がなりたつ．また, $z \neq 0$ をベクトルとみなしたときの, 実軸の正の向きとなす一般角 θ を z の偏角といい, $\arg z$ で表す．($z = 0$ の偏角は定義されない.) このとき,

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{8}$$

と表せることがわかる．これを z の極形式という．極形式では z を絶対値と偏角を用いて表示している．この形で 2 つの複素数の積を計算してみる．

$$\begin{aligned} zz' &= r(\cos\theta + i\sin\theta)\, r'(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= rr'\left[(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi)\right] \\ &= rr'\left[\cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi)\right] \end{aligned} \tag{9}$$



この結果より, 複素数の積の絶対値は各々の絶対値の積になり, 積の偏角は各々の偏角の和になっていることがわかる. すなわち,

$$|zz'| = |z||z'|, \qquad \arg(zz') = \arg z + \arg z'. \tag{10}$$

3 つ以上の積についても同様の式がなりたつ. ここで, 特に z^n について考えてみると,

$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \tag{11}$$

が得られる. これを de Moivre の定理という.

複素数の商については, 分母を実数にすることにより, その結果がまた複素数になることがわかる. 実際

$$\frac{x'+y'i}{x+yi} = \frac{(x'+y'i)(x-yi)}{(x+yi)(x-yi)} = \frac{xx'+yy'+(xy'-x'y)i}{x^2+y^2} = \frac{xx'+yy'}{x^2+y^2} + \frac{xy'-x'y}{x^2+y^2}i. \tag{12}$$

また (9) において $rr' = s$, $\theta + \varphi = \rho$ とおけば,

$$\begin{aligned} &\frac{s(\cos\rho + i\sin\rho)}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{s}{r}\left[\cos(\rho-\theta) + i\sin(\rho-\theta)\right], \\ &|z'/z| = |z'|/|z|, \quad \arg(z'/z) = \arg z' - \arg z \end{aligned} \tag{13}$$

がなりたつ. 特に $z' = 1$ とすれば,

$$|1/z| = 1/|z|, \qquad \arg(1/z) = -\arg z \tag{14}$$

となる. これと (11) より,

$$z^{-n} = 1/z^n = r^{-n}[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)] \tag{15}$$

を得る. すなわち, de Moivre の定理は負の整数ベキのときでもなりたつことがわかる.

極形式 (8) において, $\cos\theta + i\sin\theta$ の部分を簡単に $e^{i\theta}$ と表記することが多い. すなわち,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{16}$$

とおく[1]. このとき, z の極形式は

$$z = re^{i\theta} \tag{17}$$

とかける. 特に $e^{i\theta}$ は絶対値が 1 で偏角が θ の複素数なので, 単位円周上に存在する. この記法によると, de Moivre の定理は次のようにかける. 整数 n に対して,

$$\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}. \tag{18}$$

[1] (16) は Euler の公式と呼ばれる.

(ex1) 次を求めよ． (1) $(1+\sqrt{3}i)^{14}$． $(2^{14}e^{\frac{2\pi}{3}i})$ (2) $(-1-i)^{10}$． $(32i)$

(ex2) 次を示せ． (1) $z\overline{z}=|z|^2=x^2+y^2$． (2) $\overline{z\pm z'}=\overline{z}\pm\overline{z'}$． (3) $\overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z'}$．

(4) $\overline{z/z'}=\overline{z}/\overline{z'}$． (5) $||z|-|z'||\leq|z\pm z'|\leq|z|+|z'|$．

- 4 -（方程式 $z^n=c$）c を複素数の定数とするとき, $z^n=c$ をみたすすべての複素数 z, すなわち $z^n=c$ の解を求めたいことがよくある．これを de Moivre の定理を用いて解いてみる．$c=0$ のときは, 解は明らかに $z=0$ のみ（n 重根）なので, $c=se^{i\varphi}\neq 0$ とし, $z=re^{i\theta}$ とおく．

$$z^n=c \iff r^ne^{in\theta}=se^{i\varphi} \tag{19}$$

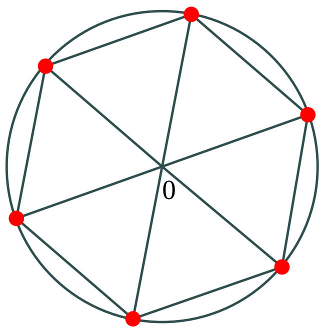
右の式の両辺の絶対値および偏角を比較して,

$$\begin{aligned} &r^n=s. && \therefore\ r=\sqrt[n]{s}. \\ &n\theta=\varphi+2m\pi \quad (m\in\mathbf{Z})^2. && \therefore\ \theta=\tfrac{\varphi+2m\pi}{n}. \end{aligned} \tag{20}$$

こうして, $z^n=c$ の解

$$z=\sqrt[n]{s}e^{i\frac{\varphi+2m\pi}{n}} \tag{21}$$

を得る．ここで m はすべての整数の値を取りうるのであるが, 実際には $m=0,1,\ldots,n-1$ まで動いたあと, $m=n$ で $m=0$ のときの z に戻ってしまい, 以下繰り返しになるので, $m=0,1,\ldots,n-1$ のみを考えればよい．これらの z の値は絶対値が等しく, 偏角は m が 1 増すごとに $\frac{2\pi}{n}$ ずつ増加する．これは, z が 0 を中心とする正 n 角形の頂点をなしていることを意味する．$z^n=c$ の解をまとめて c の n 乗根といい, それらを $\sqrt[n]{c}$ で表す．($\sqrt[2]{c}=\sqrt{c}$ とかく.) したがって $c\neq 0$ ならば $\sqrt[n]{c}$ は n 個の異なる値を持つ．しかし便宜上正数 a に対しては, $\sqrt[n]{a}$ は唯一つの正の n 乗根を表すことがある．

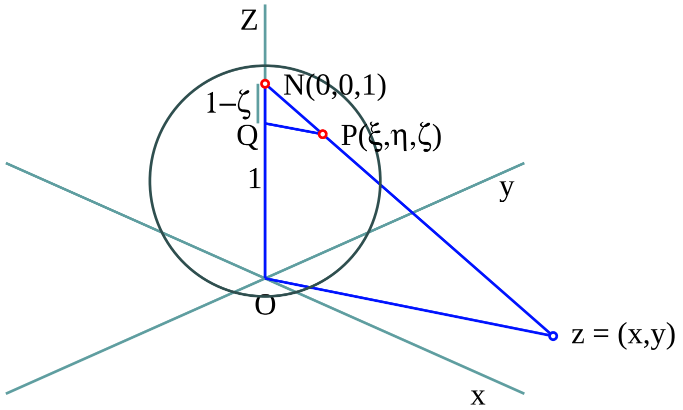


(ex3) $z^5=32$ を解け． $[z=2e^{\frac{2m}{5}\pi i}\ (m=0,1,2,3,4)]$

- 5 -（集合の表示）複素平面上の集合を方程式や不等式で表したいことがある．その簡単な例について見てみる．まず r を正の定数として, $|z|=r$ という方程式を考える．これは z の絶対値が r, すなわち z と原点の距離が r であることを意味し, このとき z は原点中心半径 r の円の周上を動くことになる．したがって, この方程式はそのような円周を表している．次に $|z-c|=r$ であれば, z と c との距離が r なので, これは c 中心半径 r の円周を表していることがわかる．同様に, $|z-c|\leq r$ はそのような円の周および内部を表している．より複雑な方程式については, $z=x+yi$ などとおいて x,y の関係を導いて考えるとよい．

(ex4) $z^2+\overline{z^2}\leq 4$ をみたす z の範囲を図示せよ．

[2] $\mathbf{Z}$ は整数全体の集合を表す．



- 6 -（Riemann 球面）複素平面上に直径 1 の球面 K が載っており, 原点で複素平面に接しているとする．次のようにして, すべての複素数は K 上の点として表される．複素平面に垂直に Z 軸を立てると, K との交点は原点と $N(0,0,1)$ である．N と複素平面上の点 (x,y) とを結ぶ直線と K との交点は N を除けばただ 1 つなのでこれを $P(\xi,\eta,\zeta)$ とおく．(x,y) が動けばかならず P も動き, またいかなる $P \neq N$ に対しても対応する (x,y) が存在するので, 複素平面と $K-N$ は 1 対 1 に対応する．この対応を立体射影という．これにより, 複素数 $x+yi$ を対応する K 上の点 $P(\xi,\eta,\zeta)$ で表すことができる．

また P が N に近づくとき, 対応する (x,y) は原点からいくらでも離れていくので, N を無限遠点 ∞ と同一視する．こうして, K は $\mathbf{C}\cup\{\infty\}=\overline{\mathbf{C}}$ を表示していると考えられる．このとき, K を Riemann 球面または複素球面という．

Riemann 球面を地球にみたてるとき, 立体射影の対応の様子を以下に例示する．

複素平面および ∞	Riemann 球面
∞	北極
$\lvert z\rvert > 1$	北半球
単位円	赤道
$\lvert z\rvert < 1$	南半球
0	南極

ここで x,y と ξ,η,ζ との関係を見てみる．P は球面 K 上にあるから,

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\zeta. \tag{22}$$

$\triangle ONz \sim \triangle QNP$ なので,

$$1:1-\zeta = x:\xi = y:\eta. \tag{23}$$

$$\therefore\ \xi=(1-\zeta)x,\quad \eta=(1-\zeta)y. \tag{24}$$

$$\therefore\ x=\tfrac{\xi}{1-\zeta},\quad y=\tfrac{\eta}{1-\zeta}. \tag{25}$$

次に (24) を (22) に代入して,

$$\begin{gathered}(1-\zeta)^2x^2+(1-\zeta)^2y^2+\zeta^2=\zeta.\\ \therefore\ (1-\zeta)(x^2+y^2)=\zeta.\qquad \therefore\ \zeta=\tfrac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}.\\ (24)\ \text{より},\ \xi=\tfrac{x}{1+x^2+y^2},\quad \eta=\tfrac{y}{1+x^2+y^2}.\end{gathered} \tag{26}$$

(note) 複素平面上の直線は, Riemann 球面上の ∞ を通る円に対応し, 複素平面上の円は, Riemann 球面上の ∞ を通らない円に対応する．この事実を円円対応という．以下これを示す．複素平面上の円を $x^2+y^2+ax+by+c=0$ で表すと, 対応する点 P の座標は (25) より次の式をみたす．

$$\left(\frac{\xi}{1-\zeta}\right)^2+\left(\frac{\eta}{1-\zeta}\right)^2+a\frac{\xi}{1-\zeta}+b\frac{\eta}{1-\zeta}+c=0. \tag{27}$$

ゆえに (22) より，$\zeta+a\xi+b\eta+c(1-\zeta)=0.$

これは P が平面上にあることを示す．それが球面上にもあるのだから, 当然円周上にある．この円が ∞ を通らないことは明らか. 複素平面上の直線の場合も同様である．

2章　複素関数の微分可能条件

☆8☆

キーワード: 複素関数, 2 変数実関数, 偏導関数, 全微分可能, 導関数,
Cauchy–Riemann の関係式, 領域, 正則, 調和関数

- 1 -（複素関数）複素関数とは複素数から複素数への対応であり, z を w に対応させる複素関数は $w = f(z)$ とかける．ここに, z は複素数の適当な範囲を自由に動くので複素独立変数, w は z に従って動くので複素従属変数と呼び, これらをまとめて複素変数または変数と呼ぶ．複素関数 $w = f(z)$ は簡単に $f(z)$（あるいは w）とも表記するが, これを実部と虚部に分けてかけば, $f(z) = u(z) + iv(z)$ となる．ここで, $z = x + yi$ であって, z は x と y の組 (x, y) と 1 対 1 に対応することに注意すれば,

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{1}$$

と表される．簡単に $f(z) = u + iv$ とかくことも多い．変数 z の値を表示する複素平面を z 平面, 変数 $w = f(z)$ の値を表示する複素平面を w 平面という．複素関数 $f(z)$ の変数 z の動く範囲を $f(z)$ の定義域という．これを D とするとき, $f(z)$ の値の集合 $\{f(z) \mid z \in D\}$ を $f(D)$ とかき, $f(z)$ による D の像または $f(z)$ の像という．

　複素関数を変数を明示せずに

$$f : D \longrightarrow E \tag{2}$$

と表記することもある．これは D の各点を E の点に移す複素関数 f を意味し, D を f の定義域, E を f の終域という．このとき一般には $f(D) \subset E$ であるが, $f(D) = E$ をみたすとき f を全射という．また $z \neq z' \ \Rightarrow\ f(z) \neq f(z')$ をみたすときは, f を単射という．f が全射かつ単射のとき, f を全単射または 1 対 1 対応という．

(ex1) $f(z) = z^2$ のとき, u, v を求めよ．

(ex2) 以下の複素関数 $f(z)$ による, 与えられた集合 D の像はなにか．w 平面上に図示せよ．（括弧内に像を方程式で示した）

(1) $f(z) = iz,\ D : |z - 2i| \leq 1.$　$(|w + 2| \leq 1)$　(2) $f(z) = z^2,\ D : 2 \leq |z| \leq 3.$　$(4 \leq |w| \leq 9)$　(3) $f(z) = z^2 - 6z,\ D : |z - 3| \leq 2.$　$(|w + 9| \leq 4)$

- 2 -（2 変数実関数）(1) で見たように, 複素関数は 2 つの 2 変数実関数で表されている．そこで, 2 変数実関数（以後 2 変数関数または単に関数とかく）の性質について少し触れておく．2 変数関数の連続性や微分可能性については, 1 変数関数のそれよりもやや複雑である．まず 2 変数関数 $u(x, y)$ を視覚化するためには, そのグラフを xyz-空間内の曲面として表すことになる．この際, $u(x, y)$ が連続であるとは, 直感的にはグラフが『やぶれ』ていないということだと考えられるが, より正確に言うと, $u(x, y)$ がある点 (x_0, y_0) で連続であるとは,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0) \tag{3}$$

をみたすことである．しかし, (x,y) が (x_0,y_0) に近づく方向は無数にある．どのように近づいても $u(x,y)\to u(x_0,y_0)$ となるというのが上式の意味である．考えている集合 D の各点で $u(x,y)$ が連続ならば, $u(x,y)$ は D で連続, または単に連続であるという.[1]

また, $u(x,y)$ が点 (x,y) で偏微分可能とは, 実数の極限値:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \equiv u_x(x,y) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \equiv u_y(x,y) &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

が共に存在することである．これらを上からそれぞれ $u(x,y)$ の, 点 (x,y) における x に関する偏微分係数, y に関する偏微分係数という．考えている集合 D の各点で $u(x,y)$ が偏微分可能なとき, D で (1 回) 偏微分可能, または単に偏微分可能という．このとき (4) は共に x,y の新たな関数とみなせるので, まとめて $u(x,y)$ の (1 階) 偏導関数という．より詳しく言うと, $u_x(x,y)$ $(u_y(x,y))$ を $u(x,y)$ の x に関する (y に関する) 偏導関数という．$u(x,y)$ から $u_x(x,y)$ $(u_y(x,y))$ を求めることを $u(x,y)$ を x で (y で) 偏微分するという．$u(x,y)$ の偏導関数 (4) がいずれもさらに (D で) 偏微分可能ならば, $u(x,y)$ を (D で)2 回偏微分可能という．$u(x,y)$ を 2 回偏微分して得られる関数をまとめて, $u(x,y)$ の 2 階偏導関数という．これらは,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y) = u_{xx}(x,y)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y) = u_{xy}(x,y)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y) = u_{yx}(x,y)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y) = u_{yy}(x,y)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

のように表記される．

同様にして, 一般に r 回偏微分可能, r 階偏導関数が定義される．関数が連続で, r 回偏微分可能であって, さらに r 階までの偏導関数がすべて連続ならば, $\boxed{C^r\ 級}$ という．C^0 級は単に連続を意味する．すべての自然数 r に対して C^r 級ならば, C^∞ 級という.[2] 多項式, 指数関数, 三角関数の $\sin,\cos$, およびそれらの合成などは（全平面で）C^∞ 級である．関数が C^2 級のとき, $u_{xy}=u_{yx}$ がなりたつ．これは, 2 階偏導関数の偏微分の順序を交換できることを意味する．一般に次がなりたつ．

(T1) 関数が C^r 級のとき, r 回までの偏微分の順序を交換できる．

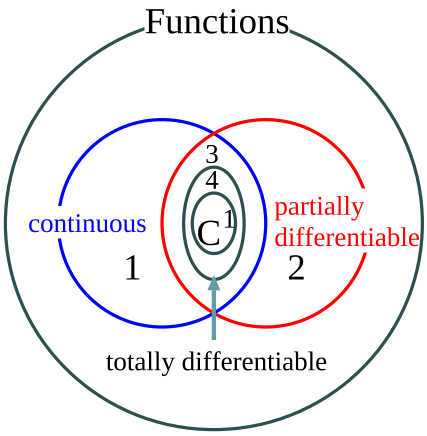
後に出てくる概念で, 関数 $u(x,y)$ が $\boxed{全微分可能}$ というものがある．これは数式で定義すれば, (14) の第 1 式において $\Delta x,\Delta y\to 0$ のとき $\frac{\epsilon_1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\to 0$ となることである．より直感的に言えば, 関数のグラフが十分小さい範囲では平面で近似できるということである．

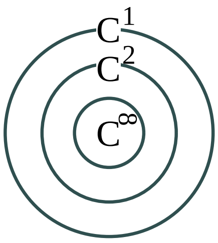
[1] D の境界点（⇒ - 6 -）での u の連続性を判定するときは, (3) の極限は D の中で近づけるものとする．

[2] C^1 級のことを連続微分可能, C^r 級のことを r 回連続微分可能, C^∞ 級のことを無限回連続微分可能ともいう．

以上, この節で現れた連続や微分に関する概念は, n 変数関数 $u(x_1,\dots,x_n)$ に対しても同様に定義される.[3] さて, それらの概念の間にはどのような関係があるのだろうか？それをベン図を用いて表示すると以下の図のようになる. このことについての証明は省略する. なお, 1 から 4 までの番号がふられた領域に属する関数の例をあげておく. ここに, $z = x + iy$ とする. 2–4 については, 原点における値は 0 とする.

1: $|z|$.　2: $\frac{xy}{x^2+y^2}$.　3: $\mathrm{sgn}(xy)\sqrt{|xy|}\sin\frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}$.　4: $|z|^2\cos\frac{1}{|z|}$.





- 3 -（導関数）複素関数 $f(z)$ が点 c で ($z = c$ で) 連続であるとは,

$$\lim_{z\to c} f(z) = f(c) \tag{6}$$

がなりたつことと定める. $f(z)$ が集合 D の各点で連続ならば, D で連続であるという. (6) 式は, $z \to c$ になる道筋がどうであっても $f(z)$ が $f(c)$ に収束するという強い意味を持つ. なお, $z = x + yi$, $c = a + bi$ とするとき, (6) は

$$\begin{aligned}&\lim_{(x,y)\to(a,b)}[u(x,y)+iv(x,y)] = u(a,b)+iv(a,b)\\ \iff &\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y) = u(a,b)\\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} v(x,y) = v(a,b)\end{array}\right.\end{aligned} \tag{7}$$

と書き換えられるので, $f(z)$ が点 c で連続なためには, u, v が点 (a,b) で連続であることが必要十分である. したがって, $f(z)$ が集合 D で連続なためには, u, v が D で連続であることが必要十分である.

[3] 特に, (T1) は一般に n 変数関数に対してなりたつ.

複素関数 $f(z)$ が点 z で $\boxed{\text{微分可能}}$ であるとは, 複素数の極限値:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z) \tag{8}$$

が存在することである. これを $f(z)$ の点 z における微分係数という. 集合 D の各点で $f(z)$ が微分可能なとき, D で微分可能という. このとき, D の各点 z に $f'(z)$ を対応させる複素関数 $f'(z)$ が得られる. これを $f(z)$ の導関数という. $f(z)$ の導関数を求めることを, $f(z)$ を微分するという. $f'(z)$ が D で微分可能なとき, $f(z)$ を D で 2 回微分可能といい, $f'(z)$ の導関数を $f''(z)=f^{(2)}(z)$ とかく. これを $f(z)$ の 2 次導関数という. 同様にして, n 回微分可能, n 次導関数 $f^{(n)}(z)$ が定義される.[4]

(8) 式は (6) 式と同様, $\Delta z\to 0$ になる道筋がどうであっても極限の中身が 1 つの極限値に収束するという強い意味を持つ. したがって実関数の微分の定義と形が同じ式であっても, その意味するところはより強い条件であることを理解する.

- 4 -（Cauchy–Riemann の関係式）ここで, 複素関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ がある点 z で微分可能, すなわち (8) の極限値を持つとしてみよう. $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ とおいて, (8) の極限の中身を u,v で表してみると,

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{\Delta x+i\Delta y}[u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)]\\ =\ &\tfrac{1}{\Delta x+i\Delta y}[u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)]+\tfrac{i}{\Delta x+i\Delta y}[v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)].\end{aligned} \tag{9}$$

仮定より $f(z)$ は微分可能なのだから, $\Delta z\to 0$ の方向が何であっても (9) の極限値は同じ値になり, それは $f'(z)$ に等しくなる. まず, x 軸方向に微分をしてみる. このときは, (9) において, $\Delta y=0$ と考えることになる. すると,

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\left[\tfrac{1}{\Delta x}[u(x+\Delta x,y)-u(x,y)]+\tfrac{i}{\Delta x}[v(x+\Delta x,y)-v(x,y)]\right]\\ &\qquad=u_x(x,y)+iv_x(x,y)=f'(z).\end{aligned} \tag{10}$$

同様にして, y 軸方向に微分をしてみよう. (9) 右辺において $\Delta x=0$ とおけば,

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta y\to 0}\left[\tfrac{1}{i\Delta y}[u(x,y+\Delta y)-u(x,y)]+\tfrac{i}{i\Delta y}[v(x,y+\Delta y)-v(x,y)]\right]\\ &\qquad=\tfrac{1}{i}u_y(x,y)+v_y(x,y)=f'(z).\end{aligned} \tag{11}$$

こうして,

$$u_x(x,y)+iv_x(x,y)=v_y(x,y)-iu_y(x,y)=f'(z) \tag{12}$$

が得られた. したがって,

$$\begin{cases}u_x(x,y)=v_y(x,y)\\ u_y(x,y)=-v_x(x,y).\end{cases} \tag{13}$$

この式を, $\boxed{\text{Cauchy–Riemann の関係式}}$ と呼び, $f(z)$ が微分可能であるための必要条件を与える.

[4] $w=f(z)$ とおくとき, $f'(z)=\frac{df}{dz}(z)=(f(z))'=w'=\frac{dw}{dz}$, $f^{(n)}(z)=\frac{d^nf}{dz^n}(z)=(f(z))^{(n)}=w^{(n)}=\frac{d^nw}{dz^n}$ のような表記が用いられる.

- 5 -（微分可能条件）次に $f(z)$ が点 z で微分可能なための必要十分条件を求めてみる. 微分可能なためには (13) は不可欠なのだから, 以後これを前提として話を進める. まず, u, v の変化を偏微分をつかって 1 次近似したときの誤差を ϵ_1, ϵ_2 とおくと,

$$\begin{aligned} u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) &= u_x(x,y)\Delta x + u_y(x,y)\Delta y + \epsilon_1 \\ v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y) &= v_x(x,y)\Delta x + v_y(x,y)\Delta y + \epsilon_2 \end{aligned} \tag{14}$$

を得る. これより,

$$\begin{aligned} f(z+\Delta z) - f(z) &= u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) + i[v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)] \\ &= u_x(x,y)\Delta x + u_y(x,y)\Delta y + \epsilon_1 + i[v_x(x,y)\Delta x + v_y(x,y)\Delta y + \epsilon_2]. \end{aligned}$$

ここで Cauchy–Riemann の関係式より,

$$\begin{aligned} &= u_x(x,y)\Delta x - v_x(x,y)\Delta y + \epsilon_1 + i[v_x(x,y)\Delta x + u_x(x,y)\Delta y + \epsilon_2] \\ &= [u_x(x,y) + iv_x(x,y)](\Delta x + i\Delta y) + \epsilon_1 + i\epsilon_2. \end{aligned}$$

ここで $\epsilon_1 + i\epsilon_2 = \epsilon$ とおき, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ に注意すると,

$$= [u_x(x,y) + iv_x(x,y)]\Delta z + \epsilon. \tag{15}$$

すなわち,

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = u_x(x,y) + iv_x(x,y) + \frac{\epsilon}{\Delta z} \tag{16}$$

が得られた.

ここで $f(z)$ が点 z で微分可能としてみよう. 先ほど見たように, このとき (12) がなりたつので, (16) は

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) + \frac{\epsilon}{\Delta z} \tag{17}$$

とかき換えられ, これより, 左辺が $f'(z)$ に収束するためには,

$$\frac{\epsilon}{\Delta z} \to 0 \tag{18}$$

が必要である.

逆に, (16) において (18) を仮定すると, 左辺が $u_x(x,y) + iv_x(x,y)$ に収束することになり, これは $f(z)$ が点 z で微分可能であることを示す.

こうして, $f(z)$ が点 z で微分可能なための必要十分条件は, (18) であることがわかった. しかしながら, 大前提として 必要条件 (13) を仮定してあったので, 結局必要十分条件は, (13) および (18) を共にみたすことだといえる.

ここで,

$$\frac{\epsilon}{\Delta z} = \frac{\epsilon_1}{\Delta z} + i\frac{\epsilon_2}{\Delta z} \tag{19}$$

なので,

$$\frac{\epsilon}{\Delta z} \to 0 \iff \frac{\epsilon_1}{\Delta z} \to 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\epsilon_2}{\Delta z} \to 0 \tag{20}$$

であり, あるいはまたそれは,

$$\frac{\epsilon_1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\epsilon_2}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0 \tag{21}$$

とも同値である. これは, u, v が点 (x,y) で全微分可能であることを意味する. この術語を用いれば, 微分可能なための条件を次のように述べられる.

(T2) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が点 $z = x + yi$ で微分可能なための必要十分条件は, u, v が (x, y) において全微分可能 かつ Cauchy–Riemann の関係式をみたすことである.

- 6 -（基礎的な用語と正則なための条件）以下, 位相と微分に関する基礎的な用語についてまとめておく. 半径が正の円の内部（すなわち境界は含まない）を $\boxed{\text{開円板}}$ という. 点 z を中心とする開円板を総称して z の近傍という. z の近傍は無数にある.

S を複素平面内の集合とする. 点 z の任意の近傍が S にも S の補集合 S^c にも含まれないとき, z を S の境界点という. S の境界点全体の集合を S の境界といい, ∂S で表す. このとき, S の内部 S^o, 閉包 $\overline{S}$, 外部 S^e を

$$\begin{aligned} &S^o = S - \partial S \qquad \overline{S} = S \cup \partial S \\ &S^e = (S^c)^o = \overline{S}^c \end{aligned} \tag{22}$$

で定義する. これより $\boxed{\text{全平面}}$, すなわち複素平面全体 $\mathbf{C}$ は,

$$\mathbf{C} = S^o \cup \partial S \cup S^e \tag{23}$$

と分解される. S^o に属する点を S の内点, S^e に属する点を S の外点という. これは, 点 z のある近傍が S に含まれるとき, z を S の内点と定義し, 点 z のある近傍が S^c に含まれるとき, z を S の外点と定義しても同じことである.

$$z \text{ が } S \text{ の外点} \iff z \text{ が } S^c \text{ の内点} \tag{24}$$

がなりたつ. $S = S^o$ をみたす集合を $\boxed{\text{開集合}}$, $S = \overline{S}$ をみたす集合を $\boxed{\text{閉集合}}$ という. すなわち, 自分自身の境界点を全く含まない集合を開集合といい, 自分自身の境界点をすべて含む集合を閉集合という.

$$S \text{ が開集合} \iff S^c \text{ が閉集合} \tag{25}$$

がなりたつ. 開集合の例として, 全平面や開円板などがある. 開集合にはいくらか穴が開いていてもよいが, それらの穴の境界も含んではならない. また, 幾らかの部分に分かれていることもある. 閉集合についてもやはり穴が開いていたり, 分裂していてもよい. 円周およびその内部を閉円板といい, これは閉集合の例である. 全平面や空集合は開集合でも閉集合でもある. 開集合の有限個の結びや交わりは開集合であり, 閉集合の有限個の結びや交わりは閉集合である.[5] 連結開集合を $\boxed{\text{領域}}$ という.

ここで, 微分に関する概念をまとめておく.

(i) $f(z)$ が集合 S の各点で微分可能なとき, S で微分可能という.

(ii) $f(z)$ が点 z のある近傍において微分可能なとき, z で正則という.

(iii) $f(z)$ が集合 S の各点で正則なとき, S で正則という.

(iv) $u(x, y)$ が集合 S の各点で全微分可能なとき, S で全微分可能という.

[5] 無限個の開集合の結びは開集合であるが, 無限個の開集合の交わりは開集合とは限らない. また無限個の閉集合の交わりは閉集合であるが, 無限個の閉集合の結びは閉集合とは限らない.

(v) $u(x,y)$ が領域 D で連続かつ D で偏微分可能で, u_x, u_y が D で連続なとき, D で C^1 級という. 同様に, u が D で連続かつ D で r 回偏微分可能で, r 階までの偏導関数がすべて D で連続ならば, D で C^r 級という. すべての自然数 r に対して D で C^r 級のとき, D で C^∞ 級という.[6]

(i)–(iii) をふまえると, $f(z)$ が開集合または領域 D で微分可能なことと, D で正則なこととは同値になる. また一般の集合 S に対しては, $f(z)$ が S で正則とは, S を含む適当な開集合で微分可能ということである.

(T2) より次がなりたつ.

(T3) $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ が領域 D で正則なための必要十分条件は, u,v が D で全微分可能 かつ D で Cauchy–Riemann の関係式をみたすことである.

ここで, 後に学ぶように, $f(z)$ が領域 D で正則ならば, $f'(z)$ もまた D で正則となる. そうなると $f''(z)$ もまた D で正則になり, 結局 $f(z)$ は D で何回でも微分可能で, その結果がつねに連続となる. したがって (12) より, u,v もまた D で何回でも偏微分可能であり, その結果がやはり連続となる. ゆえに, u,v は任意の r に対して D で C^r 級であり, それはすなわち D で C^∞ 級ということである.

このことから, (T3) において全微分可能の部分は, C^1 級におきかえてもよいことになる. C^1 級であることは判定しやすいので, その方が便利である.

(T3') $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ が領域 D で正則なための必要十分条件は, u,v が D で C^1 級 かつ D で Cauchy–Riemann の関係式をみたすことである.

- 7 -（調和関数）$u(x,y)$ が C^2 級であって, Laplace の微分方程式:

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \tag{26}$$

をみたすとき, u を調和関数という. 2 つの調和関数 u,v が Cauchy–Riemann の関係式をみたすとき, v は u に共役であるという. $f(z)$ が正則であるための条件は, 調和関数の言葉で表すことができる.

(T4) $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ が領域 D で正則なための必要十分条件は, u,v が D で調和関数であって, v が u に共役なことである.

(∵) $f(z)$ が D で正則とする. - 6 - で述べたことより, u,v は D で C^2 級である. また, D で Cauchy–Riemann の関係式: $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ をみたすので,

$$\begin{aligned} u_{xx}+u_{yy}=(v_y)_x+(-v_x)_y=v_{yx}-v_{xy}=0 \\ v_{xx}+v_{yy}=(-u_y)_x+(u_x)_y=-u_{yx}+u_{xy}=0 \end{aligned} \tag{27}$$

となって, u,v は D で調和関数となる. v が u に共役なのは明らか.

逆に, u,v が D で調和関数かつ v が u に共役であれば, $f(z)$ が D で正則なのは明らかである. (q.e.d.)

調和関数にはさまざまなものがあるが, 1 つの調和関数 u に対して, これに共役な調和関数が必ず存在し, 定数の違いを除けば 1 通りに決まる. 以下それを見てみよう.

[6] D が非連結な開集合のときも, 同様に C^r 級, C^∞ 級を定義する.

（共役な調和関数の存在）u を領域 D で調和関数であるとする. D 内の任意の矩形（各辺が x 軸か y 軸に平行なもの）の内部 K で

$$\tilde{v}(x,y)=\int_{y_0}^{y}u_x(x,y)dy \qquad (\text{ある } x_0 \text{ に対して } (x_0,y_0)\in K) \tag{28}$$

と定義すれば, $\tilde{v}_y=u_x$ であり,

$$\begin{aligned}\tilde{v}_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y}u_x(x,y)dy\\ &= \int_{y_0}^{y}\frac{\partial}{\partial x}u_x(x,y)dy \qquad (u_x \text{ が } C^1 \text{ 級なので})\\ &= \int_{y_0}^{y}u_{xx}(x,y)dy\\ &= \int_{y_0}^{y}-u_{yy}(x,y)dy \qquad (\text{Laplace})\\ &= -u_y(x,y)+u_y(x,y_0)\end{aligned} \tag{29}$$

ゆえに, $v=\tilde{v}-\int u_y(x,y_0)dx$ とおけば, v は $v_x=-u_y$, $v_y=u_x$ をみたす.

（一意性）$v,\tilde{v}$ が共に u に共役な調和関数とすると, $u_x=v_y=\tilde{v}_y$, $u_y=-v_x=-tv_x$ より, $(v-\tilde{v})_x=(v-\tilde{v})_y=0$ となって, $v=\tilde{v}+c$（c は定数）を得る. 以上より, K において, 共役な調和関数の存在と一意性がいえた. 矩形の内部で D を覆うことで, D における調和関数が構成される.

(ex3) 関数 $u=x^3+3x^2y-3xy^2-y^3$ は調和関数であることを示し, 正則な複素関数 $f(z)=u+iv$ を求めよ.

(ans)

$$\begin{aligned}u_{xx}+u_{yy} &= (3x^2+6xy-3y^2)_x+(3x^2-6xy-3y^2)_y\\ &= 6x+6y-6x-6y=0.\end{aligned} \tag{30}$$

ゆえに u は調和関数. 次に $f(z)$ が正則なので, Cauchy–Riemann の関係式より,

$$u_x=3x^2+6xy-3y^2=v_y, \tag{31}$$

$$u_y=3x^2-6xy-3y^2=-v_x. \tag{32}$$

(31) より,

$$v=\int(3x^2+6xy-3y^2)dy=3x^2y+3xy^2-y^3+g(x). \tag{33}$$

(32) に代入して,

$$\begin{aligned}&3x^2-6xy-3y^2=-(6xy+3y^2+g'(x)).\\ \therefore\quad &g'(x)=-3x^2. \qquad \therefore\ g(x)=-x^3+c \quad (c\in\mathbf{R}).\\ \therefore\quad &f(z)=x^3+3x^2y-3xy^2-y^3+i(-x^3+3x^2y+3xy^2-y^3+c)\\ &\qquad =(1-i)z^3+ic.\end{aligned} \tag{34}$$

- 8 -（関数値の極限）本章では比較的簡単な関数値の極限を扱ったが, 次章以降のために, 極限に関する公式をあげておく．複素関数 $f(z)$, $g(z)$ に対して, $\lim_{z\to c} f(z)$, $\lim_{z\to c} g(z)$ が存在するとき, 次がなりたつ．

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\to c}(f(z)\pm g(z)) = \lim_{z\to c} f(z) \pm \lim_{z\to c} g(z) && \lim_{z\to c} kf(z) = k\lim_{z\to c} f(z) \\
&\lim_{z\to c} f(z)g(z) = \lim_{z\to c} f(z)\cdot \lim_{z\to c} g(z) && \lim_{z\to c}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z\to c} f(z)}{\lim_{z\to c} g(z)} \\
&\lim_{z\to c}\tilde{g}(f(z)) = \tilde{g}\left(\lim_{z\to c} f(z)\right)
\end{aligned} \tag{35}$$

和や積は 3 つ以上でも同様である．ただし第 4 の式では $\lim_{z\to c} g(z) \neq 0$ とし, 最後の式では $\tilde{g}(w)$ は $w = \lim_{z\to c} f(z)$ で連続とする．

複素関数 $f(z)$ に対して, $\lim_{z\to\infty} f(z)$ とは z が Riemann 球面において無限遠点 ∞ に限りなく近づくときの $f(z)$ の極限値を意味する．言い換えると, $z = 1/t$ とおくとき,

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{t\to 0} f(1/t) \tag{36}$$

である．同様に, $\lim_{z\to c} f(z) = \infty$ は, $z \to c$ のとき $f(z)$ が限りなく無限遠点 ∞ に近づくことを意味するので,

$$\lim_{z\to c} f(z) = \infty \iff \lim_{z\to c}\frac{1}{f(z)} = 0 \tag{37}$$

を定義としてよい．

3章　正則 な 関数

☆ 12 ☆

キーワード: 微分の公式, 整関数, 多項式, 有理関数, 指数関数,
三角関数, 周期関数, 逆関数, 対数関数, 巾根関数, 一般の巾

- 1 -（正則と連続）以後, 紛れがない場合は複素関数は単に関数ともかくことにする．関数 $f(z)$ が点 z で微分可能ならば, 点 z で連続になる．それは,

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z)+\epsilon \tag{1}$$

において $\Delta z\to 0$ としたとき, $\epsilon\to 0$ なので, $f(z+\Delta z)=(f'(z)+\epsilon)\Delta z+f(z)\to f(z)$ となるからである．したがって, 領域 D で正則な関数は D で連続である．（もちろん逆はなりたたない.）

- 2 -（微分の公式）複素関数においても, 実関数と同様な微分に関する公式がなりたつ．すなわち, f, g が領域 D で正則ならば, $f+g$, cf, fg も D で正則であり, また D から $g=0$ の点を除けば $\frac{f}{g}$ も正則であって,

$$(f+g)'=f'+g' \qquad (cf)'=cf' \qquad (fg)'=f'g+fg' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2} \tag{2}$$

がなりたつ．たとえば積の場合を確認すると,

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{\Delta z}[f(z+\Delta z)g(z+\Delta z)-f(z)g(z)]\\
=\;&\tfrac{1}{\Delta z}[f(z+\Delta z)g(z+\Delta z)-f(z)g(z+\Delta z)+f(z)g(z+\Delta z)-f(z)g(z)]\\
=\;&\tfrac{1}{\Delta z}[f(z+\Delta z)-f(z)]\cdot g(z+\Delta z)+f(z)\cdot\tfrac{1}{\Delta z}[g(z+\Delta z)-g(z)]\\
\longrightarrow\;&f'(z)g(z)+f(z)g'(z). \qquad (\Delta z\to 0) \qquad (g \text{ の連続性より})
\end{aligned} \tag{3}$$

(ex1) (1) 残りの式を示せ．(2) $(f_1+f_2+\cdots+f_n)'=f_1'+f_2'+\cdots+f_n'$ を示せ.

- 3 -（合成と微分）合成関数の微分についても通常の公式がなりたつ．f が領域 D で正則かつ g が $f(D)$ で正則なとき, $g\circ f$ は D で正則であり, 連鎖律:

$$(g\circ f)'=(g'\circ f)f', \qquad \text{すなわち} \quad [g(f(z))]'=g'(f(z))f'(z) \tag{4}$$

がなりたつ．なぜならば, $w=f(z)$, $\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$ とおけば, f が D で連続なので, $\Delta z\to 0$ のとき $\Delta w\to 0$ となるので,

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{\Delta z}[g(f(z+\Delta z))-g(f(z))]\\
=\;&\tfrac{1}{\Delta w}[g(w+\Delta w)-g(w)]\cdot\tfrac{1}{\Delta z}[f(z+\Delta z)-f(z)]\\
\longrightarrow\;&g'(w)f'(z)=g'(f(z))f'(z). \qquad (\Delta z\to 0)
\end{aligned} \tag{5}$$

- 4 -（正則な関数）恒等関数 $f(z)=z$ や定数関数 $f(z)=c$ は明らかに全平面で正則である．これらの関数から出発して, 加法, 乗法を有限回施して得られる関数は多項式となるが, それは, - 2 - で述べたことより全平面で正則となる．さらに除法を施した場合は有理関数となるが, それは全平面から分母 $=0$ となる点を除いた領域で正則となる．全平面で正則な関数を整関数という．関数が正則でない点を特異点という．特異点は通常 $\times$ で表示する．

(ex2) $(z^n)'=nz^{n-1}$ を数学的帰納法で示せ．

- 5 -（指数関数）ここで, 多項式以外の整関数の重要な例として指数関数 e^z を導入する．e^z は次で定義される．

$$e^z=e^{x+yi}:=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)=e^x\cos y+ie^x\sin y \tag{6}$$

これを $u(x,y)+iv(x,y)$ とおけば, u,v は全平面で, C^1 級かつ Cauchy–Riemann の関係式をみたすことがわかる．ゆえに e^z は整関数である．当然のことながら, z が実数のとき e^z は通常の実数の指数関数に一致する．$f(z)$ が長い式のとき, $e^{f(z)}=\exp(f(z))$ とかくこともある．

指数関数は以下の公式をみたす．

$$\begin{gathered}(e^z)'=e^z\\ e^{z+w}=e^ze^w\text{（指数法則）}\qquad e^{z+2\pi i}=e^z\\ |e^z|=e^{\mathrm{Re}\,z}\qquad \arg e^z=\mathrm{Im}\,z+2n\pi\ (n\in\mathbf{Z})\\ \overline{e^z}=e^{\overline{z}}\end{gathered}\tag{7}$$

(ex3) (1) e^z が整関数であることを確かめよ． (2) (7) を示せ． (3) $e^0=1$, $e^{-z}=\frac{1}{e^z}$, $e^{z-w}=\frac{e^z}{e^w}$ を確かめよ． (4) $(e^z)^n=e^{nz}$ $(n\in\mathbf{Z})$ を示せ．

(ex4) 任意の $z\in\mathbf{C}$ に対して, $e^z\neq 0$ を示せ．

- 6 -（三角関数）三角関数は, 指数関数を用いて次のように定義される．

$$\begin{array}{lll}\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} & \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} & \tan z=\frac{\sin z}{\cos z}\\ \sec z=\frac{1}{\cos z} & \mathrm{cosec}\,z=\frac{1}{\sin z} & \cot z=\frac{\cos z}{\sin z}\end{array}\tag{8}$$

これら以外にも, 双曲線関数:

$$\begin{array}{lll}\cosh z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2} & \sinh z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2} & \tanh z=\frac{\sinh z}{\cosh z}\\ \mathrm{sech}\,z=\frac{1}{\cosh z} & \mathrm{cosech}\,z=\frac{1}{\sinh z} & \coth z=\frac{\cosh z}{\sinh z}\end{array}\tag{9}$$

などが用いられる．- 2 - $\cdots$ - 5 - で述べたことにより, 指数関数と加法, 乗法を用いて表される関数は整関数である．ゆえに, $\cos z$, $\sin z$, $\cosh z$, $\sinh z$ は整関数である．以上, この節で定義した関数も, 変数が実数のときは通常の定義と一致する．三角関数は以下の公式をみたす．（第 4–6 式を三角関数の加法定理という．複号同順.）

$$\begin{gathered}(\cos z)'=-\sin z\qquad(\sin z)'=\cos z\qquad(\tan z)'=\frac{1}{\cos^2 z}\\ \cos(z\pm w)=\cos z\cos w\mp\sin z\sin w\qquad\sin(z\pm w)=\sin z\cos w\pm\cos z\sin w\\ \tan(z\pm w)=\frac{\tan z\pm\tan w}{1\mp\tan z\tan w}\\ \cos(z+2\pi)=\cos z\qquad\sin(z+2\pi)=\sin z\qquad\tan(z+\pi)=\tan z\\ \cos^2 z+\sin^2 z=1\\ e^{iz}=\cos z+i\sin z\end{gathered}\tag{10}$$

双曲線関数は以下の公式をみたす.（第 7–9 式を双曲線関数の加法定理という. 複号同順.）

$$
\begin{array}{c}
(\cosh z)' = \sinh z \qquad (\sinh z)' = \cosh z \qquad (\tanh z)' = \frac{1}{\cosh^2 z} \\
\cosh iz = \cos z \qquad \sinh iz = i\sin z \qquad \tanh iz = i\tan z \\
\cosh(z \pm w) = \cosh z\cosh w \pm \sinh z\sinh w \\
\sinh(z \pm w) = \sinh z\cosh w \pm \cosh z\sinh w \\
\tanh(z \pm w) = \frac{\tanh z \pm \tanh w}{1 \pm \tanh z\tanh w} \\
\cosh(z + 2\pi i) = \cosh z \qquad \sinh(z + 2\pi i) = \sinh z \\
\tanh(z + \pi i) = \tanh z \\
\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1
\end{array}
\tag{11}
$$

(ex5) $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$ を示せ.

(ex6) $\cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z\sin w$, $\sin(z+w) = \sin z\cos w + \cos z\sin w$ を示せ.

(ex7) (1) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ を示せ.　(2) $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ を示せ.

- 7 -（周期関数）関数 $f(z)$ に対して, ある 0 でない定数 ω が存在して, $f(z)$ の定義域の任意の点 z に対して $z+\omega$ も定義域に属して,

$$
f(z+\omega) = f(z) \tag{12}
$$

をみたすならば, $f(z)$ を周期関数といい, ω をその周期という. - 5 - - 6 - で見たように, 指数関数, 三角関数, 双曲線関数は周期関数である. 指数関数や三角関数において,

$$
\begin{array}{rcll}
e^{z+\omega} = e^z & \Longleftrightarrow & \omega = 2n\pi i & (n \in \mathbf{Z}) \\
\cos(z+\omega) = \cos z & \Longleftrightarrow & \omega = 2n\pi & (n \in \mathbf{Z}) \\
\sin(z+\omega) = \sin z & \Longleftrightarrow & \omega = 2n\pi & (n \in \mathbf{Z})
\end{array}
\tag{13}
$$

がなりたつ. したがって, e^z の周期は $2n\pi i$ のみであり, $\cos z$, $\sin z$ の周期は $2n\pi$ のみである. 以下, 主な周期関数の周期をまとめておく.

e^z	$2n\pi i$
$\cos z$, $\sin z$	$2n\pi$
$\tan z$	$n\pi$
$\cosh z, \sinh z$	$2n\pi i$
$\tanh z$	$n\pi i$

- 8 -（逆関数）関数 $f(z)$ に対して, 方程式 $f(w) = z$ を w について解いて得られる関数 $w = g(z)$ を $f(z)$ の逆関数という. この, 逆関数 $g(z)$ の定義は,

$$
f(w) = z \iff w = g(z) \tag{14}
$$

と同値である. 複素関数の逆関数は多価[1]になることがあるが, 定義よりつねに $f(g(z)) = z$ がなりたつ. f の逆関数は f^{-1} とも表記される.

[1]関数の値が複数個（無限個の場合もある）あるとき, 多価関数という. それぞれの値を別々の関数とみれば, 多価関数は関数の集合とも考えられる. 通常の, 値が 1 つに定まる関数を一価関数という. 定義域において, 最大 n 個の異なる値を持つ関数を n 価関数といい, 有限の n 価関数とはならないものを無限多価関数という.

(T1) D を領域, $f : D \longrightarrow E$ を正則な全射[2]とし, その逆関数（多価ならばそのうちのどれか 1 つを取る[3]）$g : E \longrightarrow D$ が連続とする. D において $f'(w) \neq 0$ とする. このとき, g は E の内部で正則であり, $g'(z) = \frac{1}{f'(g(z))}$.

($\because$) E の内点 z を任意に取り固定する. $w = g(z)$ とすれば $w \in D$ であり, $f(w) = z$ がなりたつ. z が Δz だけ動くとき, w が Δw だけ動くとする. g は連続なので, $\Delta z \to 0$ のとき $\Delta w \to 0$ となる. ゆえに,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{g(z + \Delta z) - g(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta z}{\Delta w}} = \frac{1}{f'(w)} = \frac{1}{f'(g(z))} = g'(z) \tag{15}$$

となって, g は z において微分可能になる. こうして, g は E の内部で正則となる. (q.e.d.)

- 9 -（対数関数）e^z の逆関数を対数関数といい, $\log z$ とかく. すなわち, $e^w = z$ を解いて $w = \log z$ が求められる. $w = u + iv$ とすると,

$$e^w = e^{u+iv} = e^u e^{iv} = z. \tag{16}$$

ここで両辺の絶対値を取って, $e^u = |z| \iff u = \mathrm{Log}\,|z|$. ただし, $\mathrm{Log}\,|z|$ は通常の正数の自然対数を表す. また両辺の偏角を比較して, $v = \arg z$. こうして

$$w = \log z = \mathrm{Log}\,|z| + i \arg z \tag{17}$$

となる. ここで, arg の多価性より log は多価になることがわかる. $-\pi < \theta \leq \pi$ をみたす z の偏角 θ を偏角の主値といい, $\mathrm{Arg}\, z$ で表す. これは $z \neq 0$ ならばただ 1 つに定まる. これを用いれば,

$$\log z = \mathrm{Log}\,|z| + i\mathrm{Arg}\, z + 2n\pi i \qquad (n \in \mathbf{Z}) \tag{18}$$

とかける. また

$$\mathrm{Log}\, z = \mathrm{Log}\,|z| + i\mathrm{Arg}\, z \tag{19}$$

とおいてこれを対数の主値と呼ぶ. これより,

$$\log z = \mathrm{Log}\, z + 2n\pi i. \tag{20}$$

対数関数は（無限）多価ではあるが, 1 つの値（分枝）に着目すると, (17) より, $z = 0$ を含まない任意の単連結領域[4]E で連続とみなせる. また, つねに $(e^w)' = e^w \neq 0$ をみたす. ゆえに, (T1) より, 対数関数（の分枝[5]）は E で正則であり, その導関数は次で与えられる.

$$(\log z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z} \tag{21}$$

対数関数については, 通常の実数の対数の公式がなりたたないことがある. なりたつものとしては,

$$\begin{array}{l} \log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2, \quad \log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2, \quad \log \frac{1}{z} = -\log z \\ \log z^c = c \log z + 2n\pi i \quad (c \in \mathbf{C}) \qquad \text{(- 12 - 参照)} \\ \log z^{1/m} = \frac{1}{m} \log z \quad (m \in \mathbf{Z},\, m \neq 0) \qquad \text{(- 12 - 参照)} \end{array} \tag{22}$$

---

[2] f が D で正則で, $f(D) = E$ をみたすこと.

[3] 多価関数から 1 つの値を取って一価にしたものをその多価関数の分枝という.

[4] 穴の空いていない領域を単連結領域という. 1 点のみが除外されていても, 単連結とはいえない.

[5] 混乱のおそれのないときは, 分枝という言葉は省略する.

などがある．ただし, これらの等式の意味は, 両辺は多価関数として等しい, すなわち, 変数 z_1, z_2, z の各値に対して, 両辺が取る値の集合が等しいということである．多価関数のいくらかの和については, 各項が可能な値を取ったときに得られるすべての値を表すものと考える．このことは演算が他の四則演算の場合でも同様である．

なお, (22) 第 1 式において $z_1 = z_2 = z$ とすれば $\log z^2 = 2\log z$ が得られるようであるが, これは厳密にはなりたたない．それは $\log z^2 = \log z + \log z$ を解釈する際に右辺の 2 つの $\log z$ は独立に多価の値を取り得るので, $\log z + \log z = 2\log z$ とできないことによる．$\log z^2 = 2\log z$ は両辺に共通の値もあるが, 値の集合としては一致しないのである．

(∵) ((22) 第 1 式) $w_1 = \mathrm{Log}\, z_1,\ w_2 = \mathrm{Log}\, z_2$ とおくと, $e^{w_1} = z_1,\ e^{w_2} = z_2$. $\therefore$ $e^{w_1+w_2} = z_1 z_2$. $\therefore$ $\log(z_1 z_2) = w_1 + w_2 + 2n\pi i$ (#1). 一方, $\log z_1 + \log z_2 = w_1 + 2n\pi i + w_2 + 2m\pi i = w_1 + w_2 + 2(m+n)\pi i$ (#2). (#1),(#2) は値の集合としては一致するから, $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$. (q.e.d.)

- 10 -（巾根関数）z^n の逆関数を巾根関数といい, $\sqrt[n]{z}$ とかく．それは $w^n = z$ を解くことで求められるが, その方法はすでに 1 章で扱った $z^n = c$ の解き方と同じことで, $w = se^{i\varphi}$ とおき,

$$s^n e^{in\varphi} = z. \tag{23}$$

両辺の絶対値を取って $s^n = |z|$, $s = \sqrt[n]{|z|}$. 両辺の偏角を比較して $n\varphi = \arg z$. $\varphi = \frac{\arg z}{n} = \frac{\mathrm{Arg}\, z + 2m\pi}{n}$ $(m = 0, \ldots, n-1)$. ゆえに,

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\arg z}{n}} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\mathrm{Arg}\, z + 2m\pi}{n}} \quad (m = 0, \ldots, n-1). \tag{24}$$

ゆえに, $\sqrt[n]{z}$ は多価（n 価）であり, 各 $z \neq 0$ に対して $\sqrt[n]{z}$ の n 個の値は, 0 を中心とする正 n 角形の頂点をなす．ここで $\sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\mathrm{Arg}\, z}{n}}$ を $\sqrt[n]{z}$ の主値という．

巾根関数（の分枝）も $z = 0$ を含まない単連結領域で正則であり, その導関数は次で与えられる．

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)' = \frac{1}{(w^n)'} = \frac{1}{nw^{n-1}} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{z}\right)^{n-1}} \tag{25}$$

- 11 -（その他の逆関数）三角関数, 双曲線関数の逆関数は, 前に arc をつけて表す．たとえば $\sin z$ の逆関数は $\arcsin z$ など．一般にこれらは対数関数を用いて表され, 多価となる．次がなりたつ．

$$\begin{aligned} &1:\ \arccos z = i\log\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) \quad 2:\ \arcsin z = i\log\left(-iz + \sqrt{1-z^2}\right) \\ &3:\ \arctan z = \tfrac{i}{2}\log\tfrac{i+z}{i-z} \end{aligned} \tag{26}$$

(ex8) これらを示せ．

(ans) 1: を示す．$\cos w = z$ を w について解く．

$$\begin{aligned} &\cos w = \tfrac{e^{iw}+e^{-iw}}{2} = z. \qquad \text{ここで } e^{-iw} = s \text{ とおけば,} \\ &s^{-1} + s = 2z. \qquad \therefore\ s^2 - 2zs + 1 = 0. \qquad \therefore\ s = z + \sqrt{z^2-1}. \\ &\therefore\ w = \arccos z = i\log s = i\log\left(z + \sqrt{z^2-1}\right). \end{aligned} \tag{27}$$

- 12 -（一般の巾）複素数 $z, c\ (z \neq 0)$ に対して z^c を,

$$z^c = e^{c\log z} \tag{28}$$

で定義する. z^c は c が整数であれば一価となり, 通常の巾と一致するが, c が整数でなければ多価である. $e^{c\mathrm{Log}\,z}$ を z^c の主値という. 本書では z^c の主値を $(z^c)_{\mathrm{pv}}$ で表すことにする. 次がなりたつ.

$$\begin{aligned}&z^c = (z^c)_{\mathrm{pv}}\, e^{2cn\pi i}, \quad (z_1z_2)^c = z_1^c z_2^c, \quad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^c = \frac{z_1^c}{z_2^c}, \quad z^{-c} = \frac{1}{z^c} = \left(\frac{1}{z}\right)^c,\\ &(z^{c_1+c_2})_{\mathrm{pv}} = (z^{c_1})_{\mathrm{pv}}\,(z^{c_2})_{\mathrm{pv}}\end{aligned} \tag{29}$$

(∵) 第 1,2 式を示す.

$$\begin{aligned} z^c &= e^{c\log z} = e^{c(\mathrm{Log}\,z+2n\pi i)} = e^{c\mathrm{Log}\,z}e^{2cn\pi i} = (z^c)_{\mathrm{pv}}\, e^{2cn\pi i}.\\ (z_1z_2)^c &= e^{c\log(z_1z_2)} = e^{c(\log z_1+\log z_2)} = e^{c\log z_1 + c\log z_2}\\ &= e^{c\log z_1}e^{c\log z_2} = z_1^c z_2^c. \qquad \text{(q.e.d.)}\end{aligned} \tag{30}$$

(note) (i) $z^{c_1+c_2} = z^{c_1}z^{c_2}$, (ii) $z^{c_1c_2} = (z^{c_1})^{c_2}$ のような公式は一般にはなりたたない. これらは両辺に共通の値はあるが, 値の集合としては一致しない. (i) を計算してみると,

$$\begin{aligned} z^{c_1+c_2} = &\ (z^{c_1+c_2})_{\mathrm{pv}}\, e^{2(c_1+c_2)n\pi i},\\ z^{c_1}z^{c_2} = &\ (z^{c_1})_{\mathrm{pv}}\, e^{2c_1n\pi i}\,(z^{c_2})_{\mathrm{pv}}\, e^{2c_2n'\pi i} = (z^{c_1+c_2})_{\mathrm{pv}}\, e^{2c_1n\pi i+2c_2n'\pi i}. \qquad (n, n' \in \mathbf{Z})\end{aligned} \tag{31}$$

これらを値の集合としてみると, 左辺は右辺に含まれていることがわかる. ここでたとえば $c_1 = m$ を整数, $c_2 = c$ を複素数とすれば次がなりたつ.

$$z^{m+c} = z^m z^c \tag{32}$$

(ii) についても,

$$z^{c_1c_2} = (z^{c_1c_2})_{\mathrm{pv}}\, e^{2c_1c_2n\pi i}, \quad (z^{c_1})^{c_2} = (z^{c_1c_2})_{\mathrm{pv}}\, e^{2c_1c_2n\pi i}e^{2c_2n'\pi i} \tag{33}$$

となり, やはり左辺は右辺に含まれている. この場合, $c_1 = c$ を複素数, $c_2 = m$ を整数とすれば次がなりたつ.

$$z^{cm} = (z^c)^m \tag{34}$$

(ex9) 次を求めよ. (1) $\mathrm{Log}\,(-ei)$. $\left(1 - \frac{\pi}{2}i\right)$ (2) $(1+\sqrt{3}i)^i$. $\left(e^{-\frac{\pi}{3}-2n\pi+i\mathrm{Log}\,2}\right)$

(ex10) $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$ を示せ.

(∵)

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{n}} &= e^{\frac{1}{n}\log z} = e^{\frac{1}{n}(\mathrm{Log}\,|z|+i\arg z)} = e^{\frac{1}{n}\mathrm{Log}\,|z|}e^{i\frac{\arg z}{n}}\\ &= e^{\mathrm{Log}\,|z|^{\frac{1}{n}}}e^{i\frac{\arg z}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\arg z}{n}} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg z}{n}} = \sqrt[n]{z}.\end{aligned} \tag{35}$$

(ex11) $\frac{q}{p}$ を既約分数, $p \geq 1$ とするとき, $z^{\frac{q}{p}}$ は丁度 p 個の相異なる値を持つことを示せ.

(∵) $\mathrm{Arg}\,z = \theta$ とおく.

$$\begin{aligned} z^{\frac{q}{p}} &= e^{\frac{q}{p}\log z} = e^{\frac{q}{p}(\mathrm{Log}\,|z|+i\arg z)} = e^{\frac{q}{p}\mathrm{Log}\,|z|}e^{i\frac{q}{p}\arg z}\\ &= e^{\mathrm{Log}\,|z|^{\frac{q}{p}}}e^{i\frac{q}{p}(\theta+2m\pi)} = |z|^{\frac{q}{p}}e^{i\frac{q}{p}\theta}e^{i\frac{2qm}{p}\pi}\end{aligned} \tag{36}$$

この式は明らかに, m が p 増える度に同じ値を取る. そこで, $m = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ に対して相異なる値を取ることを言えばよい. そこで, $0 \leq m < m' \leq p-1$ に対して,

$$e^{i\frac{2qm}{p}\pi} = e^{i\frac{2qm'}{p}\pi} \tag{37}$$

とすると, ある整数 k に対して,

$$\frac{2qm'}{p} - \frac{2qm}{p} = \frac{2q(m'-m)}{p} = 2k. \tag{38}$$

これは不可能なので, 題意は示された. (q.e.d.)

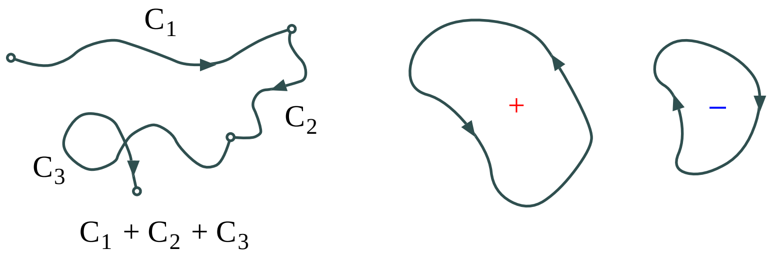
(note) これ以後の章では, 特に断らない限り, 関数という言葉や記号 $f(z)$ などは, 一価関数（または多価関数から 1 つの値を選んで得られる関数）を指すものとする.

4章　複素積分, 線積分

☆ 4 ☆

キーワード: 曲線, 複素積分, 線積分, 積分の評価式

- 1 -（曲線）複素平面上の曲線 C は z の方程式で表せるが, $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ $(a \leq t \leq b)$ のように実変数 t を持ち, 複素数を値に持つ関数として表すこともできる. これを曲線のパラメータ表示（t がパラメータ）という. ここで, $x(t), y(t)$ は連続な実関数とする. 曲線 C において, $\alpha = z(a)$ を C の始点といい, $\beta = z(b)$ を C の終点という. 曲線には始点から終点に向かって向きがついていると考え, α から β へ向かう曲線などと表現する. 始点と終点が異なる曲線を開曲線, 始点と終点が一致している曲線を閉曲線という. 任意の異なる t_1, t_2（ただし $\{t_1, t_2\} \neq \{a, b\}$）に対して, $z(t_1) \neq z(t_2)$ となるとき, C を単一曲線または Jordan 曲線という. 直観的には, 自分自身に交差していない曲線を単一曲線というのである. 単一閉曲線は複素平面をその内部と外部に分けることがわかる.[1] また, 単一閉曲線はその向きが時計回りか反時計回りかを判断できる. 反時計回りの向きを正の向き, 時計回りの向きを負の向きという. ある曲線 C に対して, その向きのみを逆にした曲線を $-C$ で表す.



2 つの曲線 C_1, C_2 があり, C_1 の終点と C_2 の始点が等しいとき, C_1 と C_2 を繋ぐことができる. こうして得られた曲線を $C_1 + C_2$ で表す. この操作を繰り返して, 3 つ以上の曲線を繋ぐこともできる. 曲線 $C : z = z(t) = x(t) + iy(t)$ $(a \leq t \leq b)$ において, $x(t)$, $y(t)$ が共に C^1 級のとき, C を滑らかな曲線という.[2] 有限個の滑らかな曲線を繋いでできる曲線を区分的に滑らかな曲線という.

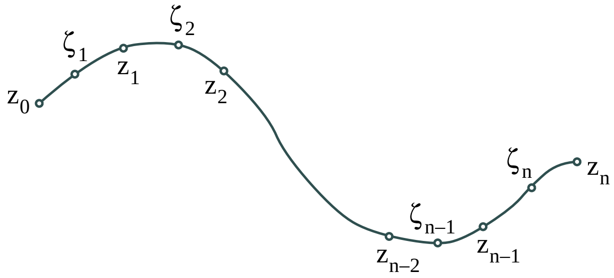
(ex1)　円周 $|z - c| = r$（正の向き）を $z = z(t)$ の形に表せ.　$[z = c + re^{it}\ (0 \leq t \leq 2\pi)]$

- 2 -（複素積分）$C : z = z(t) = x(t) + iy(t)$ $(a \leq t \leq b)$ を α から β へ向かう滑らかな曲線とする. $f(z)$ を C 上で連続な複素関数とする. ここで, C に沿った $f(z)$ の複素積分: $\displaystyle\int_C f(z)dz$ を導入しよう.

[1] 単一閉曲線上の点は, その内部にも外部にも属さないと考える.

[2] $x(t)$, $x'(t)$ が $a \leq t \leq b$ で連続のとき, $x(t)$ は $a \leq t \leq b$ で C^1 級という. ただし, $x'(t)$ の a, b での値はそれぞれ右微分, 左微分で代用する.

C 上に分点 $\alpha = z_0, z_1, \ldots, z_n = \beta$ をこの順に取る. さらに, C 上 z_{k-1} から z_k までの区間に, 点 ζ_k を取る. ただし, $z_0, \ldots, z_n$ はすべて異なり, ζ_k は z_{k-1} か z_k に一致してもよいとする. こうしてできた点の列 $z_0, \zeta_1, z_1, \zeta_2, z_2, \ldots, \zeta_n, z_n$ を C の分割といい, 簡単に Δ で表すことにする. 分割の大きさ $|\Delta|$ を, $|\Delta| = \max_{1\leq k\leq n} |z_k - z_{k-1}|$ で定める. また, $z_k - z_{k-1} = \Delta z_k$ とかき, $z_k = x_k + iy_k$, $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$ とする.



分割 Δ に対して, 次の量

$$S_\Delta = S_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \tag{1}$$

を考える. これは分割に応じていろいろな値を取るが, $|\Delta| \to 0$ のとき, ある極限値に収束することを示す. まず $C : z = z(t)$ において, $z(t_k) = z_k$, $z(\tau_k) = \zeta_k$ であるとする. こうすると, 区間 $[a, b]$ の分割 $\tilde{\Delta}$: $a = t_0, \tau_1, t_1, \ldots, \tau_n, t_n = b$ が得られることがわかる. ここでは, $|\Delta| \to 0$ ならば $|\tilde{\Delta}| \to 0$ となることを仮定しておく.

$$\begin{aligned} S_\Delta &= \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} [u(\zeta_k) + iv(\zeta_k)][\Delta x_k + i\Delta y_k] \\ &= \sum_{k=1}^{n} [u(\zeta_k)\Delta x_k - v(\zeta_k)\Delta y_k + iu(\zeta_k)\Delta y_k + iv(\zeta_k)\Delta x_k] \\ &= \sum_{k=1}^{n} u(\zeta_k)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} v(\zeta_k)\Delta y_k + i\sum_{k=1}^{n} u(\zeta_k)\Delta y_k + i\sum_{k=1}^{n} v(\zeta_k)\Delta x_k \end{aligned} \tag{2}$$

ここで, 最後の式は 4 つの和として表されており, このうちはじめの項について計算すると,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} u(\zeta_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} u(z(\tau_k))[x(t_k) - x(t_{k-1})] \\ &= \sum_{k=1}^{n} u(z(\tau_k))\frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}(t_k - t_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} u(z(\tau_k))x'(\sigma_k)\Delta t_k \qquad \text{（∵ 平均値の定理）} \\ &= \sum_{k=1}^{n} u(z(\tau_k))x'(\tau_k)\Delta t_k + \sum_{k=1}^{n} u(z(\tau_k))[x'(\sigma_k) - x'(\tau_k)]\Delta t_k. \end{aligned} \tag{3}$$

ただし, $t_k - t_{k-1} = \Delta t_k$ とおいた. ここで, $|\Delta| \to 0$ のとき $|\tilde{\Delta}| \to 0$ となるので, 実関

数の積分の定義より,

$$\sum_{k=1}^{n} u(z(\tau_k))x'(\tau_k)\Delta t_k \longrightarrow \int_a^b u(z(t))x'(t)dt \quad (|\Delta| \to 0) \tag{4}$$

が得られる．次に第 2 項について考える．$x'(t)$ は閉区間 $[a,b]$ 上で連続なので結局一様連続[3] になり, 任意の $\epsilon > 0$ に対して十分小さい $\delta > 0$ を取れば, $|\Delta| < \delta$ ならば $|x'(\sigma_k) - x'(\tau_k)| < \epsilon$ となる．このとき, $|u(z)|$ の C 上での最大値を M とおけば,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u(z(\tau_k))[x'(\sigma_k) - x'(\tau_k)]\Delta t_k\right| < M\epsilon(b-a). \tag{5}$$

よって, $|\Delta| \to 0$ のとき,

$$\sum_{k=1}^{n} u(\zeta_k)\Delta x_k \longrightarrow \int_a^b u(z(t))x'(t)dt. \tag{6}$$

以上の議論を繰り返せば,

$$\begin{aligned} S_\Delta \longrightarrow \quad & \int_a^b u(z(t))x'(t)dt - \int_a^b v(z(t))y'(t)dt \\ & + i\int_a^b u(z(t))y'(t)dt + i\int_a^b v(z(t))x'(t)dt \\ = \quad & \int_a^b [u(z(t)) + iv(z(t))][x'(t) + iy'(t)]dt \\ = \quad & \int_a^b f(z(t))z'(t)dt. \end{aligned} \tag{7}$$

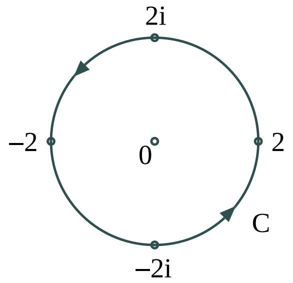
これを $\displaystyle\int_C f(z)dz$ とかき, C に沿った $f(z)$ の複素積分といい, それを求めることを, C に沿って $f(z)$ を複素積分するという．S_Δ の定義より, $\displaystyle\int_C f(z)dz$ は関数 $f(z)$ および曲線 C そのもので決まり, C のパラメータ表示の違いにはよらないことがわかる．C をこの複素積分の積分路という．

(6) の積分を $\displaystyle\int_C u(x,y)dx$ とかき, C に沿った $u(x,y)$ の x 方向の線積分という．同様に, (2) 最後の式第 2 項の極限を $\displaystyle -\int_C v(x,y)dy$ とかき, $\displaystyle\int_C v(x,y)dy$ を C に沿った $v(x,y)$ の y 方向の線積分という．この表記法を用いれば, 複素積分を形式的に次のように変形できる．

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_C (u(x,y) + iv(x,y))(dx + idy) \\ &= \int_C u(x,y)dx - \int_C v(x,y)dy + i\int_C u(x,y)dy + i\int_C v(x,y)dx \end{aligned} \tag{8}$$

[3]任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して $|x-y| < \delta \;\Rightarrow\; |g(x) - g(y)| < \epsilon$ をみたすとき, $g(x)$ は一様連続という．関数が有限閉区間で連続ならば, そこで一様連続になることが知られている．

(ex2) C を $|z|=2$（正の向き）とするとき, $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z}$ を求めよ.



(ans) $C : z = 2e^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ と表せるので,

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{z'(t)}{2e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} \frac{2ie^{it}}{2e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} idt = [it]_0^{2\pi} = \boxed{2\pi i}. \tag{9}$$

- 3 -（区分的に滑らかなとき）以上は C が滑らかな場合の複素積分の定義だったが, $C = C_1 + \cdots + C_s$ が区分的に滑らかで, 各 C_k が滑らかな場合には, C に沿った複素積分は,

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{s} \int_{C_k} f(z)dz \tag{10}$$

で定められる. 右辺は C の繋ぎ目を分点にするような分割 Δ に対して, S_Δ を作って極限を取ったものと考えられる. したがって, 区分的に滑らかな場合でも積分の定義に本質的な違いはない. また C をどのように $C = C_1 + \cdots + C_s$ と分解（滑らかな点での分解でもよい）しても, (10) がなりたつ. なぜならば, 繋ぎ目および滑らかでない点を分点とするような C の分割 Δ を考え, これを分解した曲線 $C_1, \ldots, C_s$ の分割 $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$ に割り振れば,

$$S_\Delta = S_{\Delta_1} + \cdots + S_{\Delta_s} \tag{11}$$

を得る. そこで $|\Delta| \to 0$ とすれば, $|\Delta_1|, \ldots, |\Delta_s| \to 0$ となり, (10) を得る.

　区分的に滑らかな曲線 C を取る. C 上で連続な関数 $f(z), g(z)$ に対して, (1) より,

$$\begin{aligned} S_\Delta(f+g) = &\sum_{k=1}^{n} (f(\zeta_k) + g(\zeta_k))\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k + \sum_{k=1}^{n} g(\zeta_k)\Delta z_k \\ = &S_\Delta(f) + S_\Delta(g) \end{aligned} \tag{12}$$

がなりたつ. 同様に, 複素数の定数 m に対して, $S_\Delta(mf) = mS_\Delta(f)$ もなりたつ. そこで $|\Delta| \to 0$ とすれば, 公式:

$$\begin{aligned} &\int_C (f(z) + g(z))\, dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz \\ &\int_C mf(z)dz = m \int_C f(z)dz \qquad (m \in \mathbf{C}) \end{aligned} \tag{13}$$

を得る.（第 1 式については 3 つ以上の和でも同様の式がなりたつ） このことは (7) からでも導ける.

なお, S_Δ の式 (1) において, 曲線 C の向きが反転すると, 明らかに Δz_k の符号が変わる. ゆえに $\displaystyle\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$ がなりたつ.

- 4 -（弧長に関する線積分）- 2 - における $f(z)$, C, 分割 Δ に対して,

$$T_\Delta = T_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)|\Delta z_k| \tag{14}$$

を考え, その極限を取ったものを, 弧長に関する（線素に関する）線積分といい, $\displaystyle\int_C f(z)|dz|$ で表す. この積分は, - 3 - で述べた方法で, C が区分的に滑らかな場合にも拡張でき, この積分でも (10),(13) と同様の公式がなりたつことがわかる. ただし, $\displaystyle\int_{-C} f(z)|dz| = \int_C f(z)|dz|$, すなわちこの積分は曲線の向きによらないことに注意する. また C の長さを L とすると, $f(z) = 1$ のとき, $\displaystyle\int_C |dz| = L$ となることに注意する. （これはむしろ曲線の長さの定義である.）

曲線が $C : z = z(t)$ $(a \leq t \leq b)$ で表されるとき, S_Δ のときと同様にして T_Δ の極限を計算すると,（途中の計算は省略する）

$$\int_C f(z)|dz| = \int_a^b f(z(t))|z'(t)|dt \tag{15}$$

が得られる. さて, この積分は $\displaystyle\left|\int_C f(z)dz\right|$ を評価するのによく用いられる. すなわち,

(T1)（積分の評価式）連続関数 $f(z)$ と長さ L の区分的に滑らかな曲線 C があり, $|f(z)|$ の C 上での最大値を M とすると,

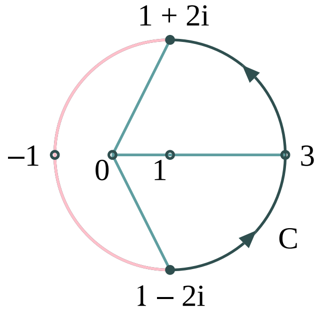
$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_C |f(z)||dz| \leq ML. \tag{16}$$

($\because$) $|z + w| \leq |z| + |w|$ より, 一般に $|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|$ がなりたつことに注意すると,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)||\Delta z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} M|\Delta z_k|. \tag{17}$$

ここで $|\Delta| \to 0$ とすると, (16) を得る. (q.e.d.)

(ex3) 円周 $|z - 1| = 2$ の右半分に沿って, $1 - 2i$ から $1 + 2i$ へ向かう曲線を C とするとき, $\displaystyle\left|\int_C \frac{\overline{z}}{z-1}dz\right| \leq 3\pi$ を示せ.



(ans) 図より, C 上で

$$\left|\frac{\overline{z}}{z-1}\right| = \frac{|\overline{z}|}{|z-1|} = \frac{|z|}{|z-1|} \leq \frac{3}{2}. \tag{18}$$

ゆえに積分の評価式より,

$$\left|\int_C \frac{\overline{z}}{z-1}dz\right| \leq \frac{3}{2}\cdot 2\pi = 3\pi. \quad \text{(q.e.d.)} \tag{19}$$

(note) 以後, 複素積分の積分路や図形の境界 C としては, 特に断らない限り, 区分的に滑らかなもののみを考えることにする.

5章　Cauchyの積分定理, 積分公式

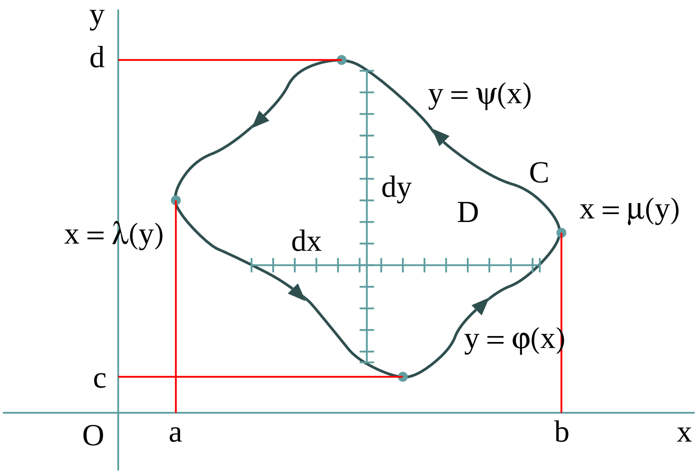
☆8☆

キーワード: Green の定理, Cauchy の積分定理, 積分路変形の原理,
原始関数, Cauchy の積分公式

- 1 - (T1)（Green の定理）C を正の向きの単一閉曲線[1]とし, C およびその内部からなる集合を D とする. $P(x,y), Q(x,y)$ を D を含むある領域で C^1 級の 2 変数実関数とする. このとき,

$$\int_C (Pdx + Qdy) = \int_D (-P_y + Q_x)dxdy \tag{1}$$

がなりたつ.



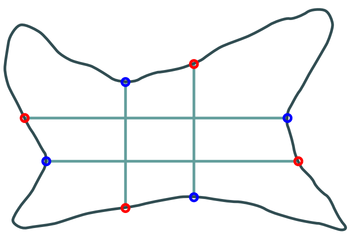
(∵) 簡単のため, 曲線は図のようなものとし, 上半分が $y=\psi(x)$ $(a \le x \le b)$, 下半分が $y=\varphi(x)$ $(a \le x \le b)$ で表され, また左半分が $x=\lambda(y)$ $(c \le y \le d)$, 右半分が $x=\mu(y)$ $(c \le y \le d)$ で表されるものとする.

$$\begin{aligned}
\int_D (-P_y + Q_x)dxdy &= \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} -P_y dy \right) dx + \int_c^d \left(\int_{\lambda(y)}^{\mu(y)} Q_x dx \right) dy \quad \text{(Fubini)} \\
&= \int_a^b \left[-P(x,y) \right]_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)} dx + \int_c^d \left[Q(x,y) \right]_{x=\lambda(y)}^{x=\mu(y)} dy \\
&= \int_a^b \left[-P(x,\psi(x)) + P(x,\varphi(x)) \right] dx \\
&\quad + \int_c^d \left[Q(\mu(y),y) - Q(\lambda(y),y) \right] dy
\end{aligned}$$

[1] この定理は通常座標平面上で考えるが, 複素平面上でもそのまま成立する. 以後, 特に断らない限り, 曲線や領域などの図形は複素平面上で考える.

$$
\begin{aligned}
&= \int_C P(x,y)dx + \int_C Q(x,y)dy \quad \text{（定義より）} \\
&= \int_C (P(x,y)dx + Q(x,y)dy)
\end{aligned} \tag{2}
$$

以上は, D が縦横凸, すなわち, 縦凸（D 上の縦に並ぶ任意の 2 点を結ぶ線分はまた D に含まれる）かつ 横凸（D 上の横に並ぶ任意の 2 点を結ぶ線分はまた D に含まれる）のときになりたつ. D がより複雑な図形の場合は, D を適当に縦, 横の線分で有限個の縦横凸な図形に分割し, 各部分にこの結果を当てはめる. たとえば以下のように D を分割する.



この場合, 9 つの部分での (1) 左辺を考えその総和を取ると, 緑色の線分に沿った線積分は打ち消し合い, もとの D の境界 C に沿った線積分のみが残る. 9 つの部分での (1) 右辺の重積分の総和はもちろん D 上の重積分になり, 証明を終える.

実は D が有限個の縦横凸の部分に分割できない残念な場合もあるが, その場合の証明は割愛する.　(q.e.d.)

- 2 - (T2)（Cauchy の積分定理 I） C を単一閉曲線, $f(z)$ を C およびその内部で正則な複素関数とするとき,

$$
\int_C f(z)dz = 0. \tag{3}
$$

($\because$) C の向きを正として示せばよい. C およびその内部からなる集合を D とおく.

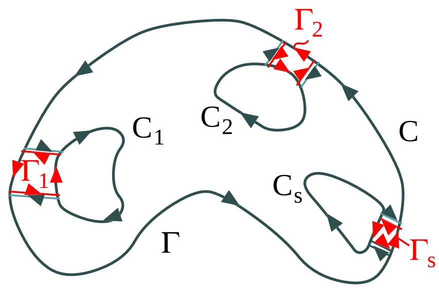
$$
\begin{aligned}
\int_C f(z)dz \quad &= \int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy) \\
&= \int_D (-u_y - v_x)dxdy + i\int_D (-v_y + u_x)dxdy \quad \text{(Green)} \\
&= \int_D (v_x - v_x)dxdy + i\int_D (-v_y + v_y)dxdy \quad \text{(Cauchy–Riemann)} \\
&= 0 \qquad\qquad \text{(q.e.d.)}
\end{aligned} \tag{4}
$$

これは, 今後のすべての定理を導く基礎となる重要な定理である. 通常 Cauchy の積分定理と呼ぶが, 次の系と区別するために番号をつけた.

- 3 - (T3)（Cauchy の積分定理 II）C を単一閉曲線とし, $C_1, C_2, \ldots, C_s$ を C 内にある単一閉曲線で, 互いに外側にあるものとする. 閉曲線の向きはすべて正とする. $f(z)$ は, C および $C_1, C_2, \ldots, C_s$ 上と, これらの閉曲線に挟まれる部分で正則とする.[2] このとき,

$$
\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{s} \int_{C_k} f(z)dz. \tag{5}
$$

[2] C の内部かつ $C_1, C_2, \ldots, C_s$ の外部にある部分をこれらの閉曲線に挟まれる部分という.

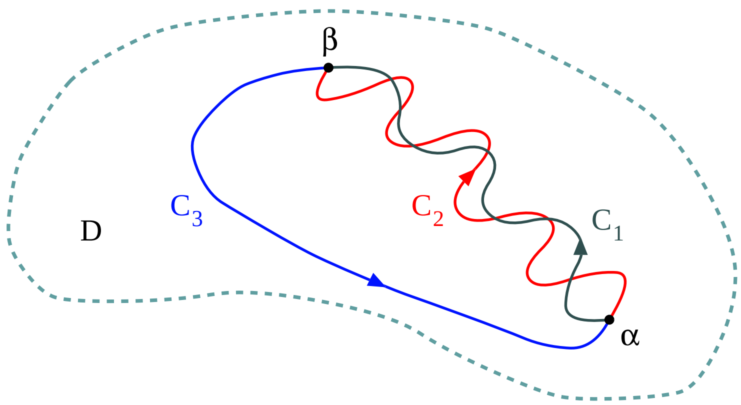


(∵) 上図のように, C_k と C の間に 2 つずつ道を作り, C および $C_1, C_2, \ldots, C_s$ をつなげた閉曲線を Γ とおく．また, C_k と C の間の 2 つの道をつなげた小さい閉曲線を Γ_k とおく．すると, $f(z)$ は Γ 上とその内部で正則であり, また Γ_k 上とその内部でも正則である．ゆえに積分定理 I より,

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f(z)dz + \sum_{k=1}^{s} \int_{\Gamma_k} f(z)dz &= \int_C f(z)dz - \sum_{k=1}^{s} \int_{C_k} f(z)dz = 0. \\ \therefore \qquad \int_C f(z)dz &= \sum_{k=1}^{s} \int_{C_k} f(z)dz. \quad \text{(q.e.d.)} \end{aligned} \tag{6}$$

(note) (T3) のように, 正の向きの積分路の中にいくらかの単一閉曲線の積分路を考えるときは, 特に断らない限り, 向きはすべて正と考えることにする．

- 4 - (T4)（積分路変形の原理）$f(z)$ を単連結領域 D で正則とする．α から β へ向かう D 内の単一曲線 C に対して, $\displaystyle\int_C f(z)dz$ は α, β のみで決まり, C の途中の経路によらない．



(∵) α から β へ向かう単一曲線 C_1, C_2 に対して, 図のように, 始点と終点以外で C_1, C_2 と交わらないような, β から α へ向かう単一曲線 C_3 を考える．このとき $f(z)$ は閉曲線 $C_1 + C_3$ 上およびその内部で正則であり, $C_2 + C_3$ 上およびその内部でも正則である．ゆ

えに積分定理 I より,

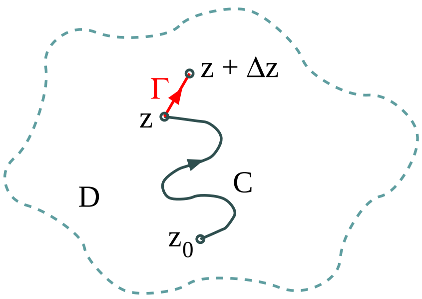
$$
\begin{aligned}
&\int_{C_1+C_3} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz = 0,\\
&\int_{C_2+C_3} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz = 0.\\
&\therefore \quad \int_{C_1} f(z)dz = -\int_{C_3} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz. \qquad \text{(q.e.d.)}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

同様にして, 次の系も示される. これも, 積分路変形の原理と呼ぶことにする.

(T4') $f(z)$ を領域 D で連続とする. D 内の任意の単一閉曲線 Γ に対して, $\int_\Gamma f(z)dz = 0$ がなりたつならば, α から β へ向かう D 内の単一曲線 C に対して, $\int_C f(z)dz$ は α, β のみで決まり, C の途中の経路によらない.

- 5 -（積分で表された関数）(T5) $f(z)$ を単連結領域 D で正則とする. D 内の点 z_0 を固定し, D 内の点 z に対して, z_0 から z へ向かう D 内の単一曲線 C を取ると, $\int_C f(\zeta)d\zeta$ は z のみで決まるのでこれを $\tilde{F}(z)$ とおく. このとき $\tilde{F}(z)$ は D で正則で,

$$
\tilde{F}'(z) = f(z). \tag{8}
$$



(∵) $f(z)$ は単連結領域で正則なので, 積分路変形の原理 (T4) より, $\int_C f(\zeta)d\zeta$ は z, z_0 のみで決まり C の途中の経路によらない. ただし z_0 は固定されているので, 結局積分は z のみで決まる. よって $\int_C f(\zeta)d\zeta = \tilde{F}(z)$ とおける. D 内に任意に z を取り, z の変化 Δz に対して, z から $z + \Delta z$ へ向かう線分 Γ を考えれば,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta z}\left[\tilde{F}(z+\Delta z) - \tilde{F}(z)\right] &= \frac{1}{\Delta z}\left(\int_{C+\Gamma} f(\zeta)d\zeta - \int_C f(\zeta)d\zeta\right)\\
&= \frac{1}{\Delta z}\int_\Gamma f(\zeta)d\zeta.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

ここで, $f(z)$ との差を取ると,

$$\begin{aligned}\left|\tfrac{1}{\Delta z}\int_\Gamma f(\zeta)d\zeta - f(z)\right| &= \left|\tfrac{1}{\Delta z}\int_\Gamma f(\zeta)d\zeta - \tfrac{1}{\Delta z}\int_\Gamma f(z)d\zeta\right| \\ &= \left|\tfrac{1}{\Delta z}\int_\Gamma (f(\zeta)-f(z))d\zeta\right|.\end{aligned} \tag{10}$$

$f(z)$ は D で正則なのでもちろん D で連続である. よって, 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して, $|\Delta z| < \delta$ ならば $|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon$ $(\zeta \in \Gamma)$ となる. このとき, 積分の評価式を用いて,

$$\left|\frac{1}{\Delta z}\int_\Gamma (f(\zeta)-f(z))d\zeta\right| < \frac{1}{|\Delta z|}\cdot\epsilon\cdot|\Delta z| = \epsilon. \tag{11}$$

すなわち, $\Delta z \to 0$ のとき,

$$\frac{1}{\Delta z}\left[\tilde{F}(z+\Delta z) - \tilde{F}(z)\right] = \frac{1}{\Delta z}\int_\Gamma f(\zeta)d\zeta \longrightarrow f(z) = \tilde{F}'(z). \tag{12}$$

ゆえに, $\tilde{F}(z)$ は z において微分可能で, $\tilde{F}'(z) = f(z)$. z は D の任意の点だったので, $\tilde{F}(z)$ は D で正則となる. (q.e.d.)

上記の証明では, 積分路変形の原理 (T4) を用いて一旦関数 $\int_C f(\zeta)d\zeta = \tilde{F}(z)$ を導入できれば, あとは $f(z)$ の連続性しか使っていない. したがって (T4') から出発しても同様の結果が得られる. すなわち,

(T5') $f(z)$ を領域 D で連続とし, D 内の任意の単一閉曲線 Γ に対して, $\int_\Gamma f(z)dz = 0$ とする. D 内の点 z_0 を固定し, z_0 から z へ向かう D 内の単一曲線 C に対して $\int_C f(\zeta)d\zeta = \tilde{F}(z)$ とおく. このとき $\tilde{F}(z)$ は D で正則で,

$$\tilde{F}'(z) = f(z). \tag{13}$$

- 6 - (原始関数) $F'(z) = f(z)$ となる $F(z)$ を $f(z)$ の原始関数または不定積分という. $f(z)$ の原始関数はたくさんあるがその差は定数の違いしかなく, それらをまとめて $\int f(z)dz$ と表す. (積分に添字がないことで複素積分と区別する) $f(z)$ の原始関数の 1 つを $F(z)$ とすれば,

$$\int f(z)dz = F(z) + c \qquad (c \text{ は複素数の積分定数}) \tag{14}$$

がなりたつ.[3] 3 章 - 2 - - 3 - で見たように, 複素関数においても通常の微分の公式がなり

[3]具体的な計算などでは, $\int f(z)dz$ で原始関数の 1 つを表すこともある. (17) 参照.

たつので, それを用いて以下の不定積分の諸公式が示される.

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} && \int (f(z)+g(z))dz = \int f(z)dz + \int g(z)dz \\
&\text{(ii)} && \int kf(z)dz = k\int f(z)dz \\
&\text{(iii)} && \int f(w)dw = \int f(g(z))g'(z)dz \quad (w=g(z)) && \text{（置換積分法）} \\
&\text{(iv)} && \int f'(z)g(z)dz = f(z)g(z) - \int f(z)g'(z)dz && \text{（部分積分法）}
\end{aligned} \tag{15}$$

(∵) 一応確認しておく. (i): $f(z)$, $g(z)$ の原始関数をそれぞれ $F(z)$, $G(z)$ とおくと, 右辺は $F(z)+G(z)+c$ となる. これを微分して, $f(z)+g(z)$. したがって, 右辺は $f(z)+g(z)$ の原始関数であり, 積分定数を含むので, (右辺) $= \displaystyle\int (f(z)+g(z))dz$.

(iii) 左辺は $F(w)+c$ とかける. これを z で微分して, $f(w)g'(z) = f(g(z))g'(z)$. したがって, 左辺は $f(g(z))g'(z)$ の原始関数で積分定数を含むので, (左辺) $= \displaystyle\int f(g(z))g'(z)dz$.

(ii),(iv) も同様.

- 7 -（原始関数と積分）(T5) より, 次が示される.

(T6) $f(z)$ を単連結領域 D で正則とし, C を z_0 から z へ向かう D 内の単一曲線とする. $f(z)$ の原始関数の 1 つ $F(z)$ を取れば,[4]

$$\int_C f(\zeta)d\zeta = F(z) - F(z_0). \tag{16}$$

(∵) $\displaystyle\int_C f(\zeta)d\zeta = \tilde{F}(z)$ とおくと, (T5) より, $\tilde{F}'(z) = f(z)$. 一方, $f(z)$ の原始関数の 1 つを $F(z)$ とおくと $F'(z) = f(z)$. ゆえに, $\left(\tilde{F}(z) - F(z)\right)' = \tilde{F}'(z) - F'(z) = f(z) - f(z) = 0$. よってある定数 c が存在して, $\tilde{F}(z) - F(z) = c$. ここで $\tilde{F}(z_0) - F(z_0) = 0 - F(z_0) = c$. ゆえに, $\displaystyle\int_C f(\zeta)d\zeta = \tilde{F}(z) = F(z) + c = F(z) - F(z_0)$. (q.e.d.)

(ex1) $D : |z| < 3$ とし, C を 0 から z へ向かう D 内の単一曲線とするとき, $\displaystyle\int_C \frac{\zeta-3}{\zeta+3}d\zeta$ を求めよ.

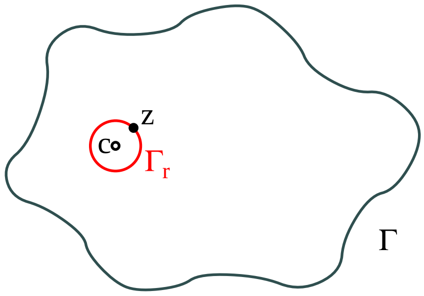
(ans) D は単連結な領域であり, $f(z) = \frac{z-3}{z+3}$ は D で正則なので, $f(z)$ の原始関数 $F(z)$ によって $\displaystyle\int_C \frac{\zeta-3}{\zeta+3}d\zeta = F(z) - F(0)$ と表される.

$$\begin{aligned}
&F(z) = \int \frac{z-3}{z+3}dz = \int \left(1 - \frac{6}{z+3}\right) dz = z - 6\mathrm{Log}\,(z+3). \\
&\therefore \quad \int_C \frac{\zeta-3}{\zeta+3}d\zeta = \boxed{z - 6\mathrm{Log}\,(z+3) + 6\mathrm{Log}\,3}.
\end{aligned} \tag{17}$$

[4] 具体的な計算では, 便宜上 $\displaystyle\int_C f(\zeta)d\zeta = [F(\zeta)]_{z_0}^{z} = F(z) - F(z_0)$ のように表記することもある.

- 8 - (T7)（Cauchy の積分公式 I）Γ を正の向きの単一閉曲線, $f(z)$ を Γ およびその内部で正則とする. c を Γ の内部にある点とする. このとき,

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-c}dz. \tag{18}$$



(∵) c を中心とする半径 r の円を Γ_r とおく. Γ_r が Γ の内部に含まれるように $r>0$ を取る. このとき, $\frac{f(z)}{z-c}$ は Γ および Γ_r 上と, これらに挟まれる部分で正則なので, 積分定理 II より

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-c}dz = \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{z-c}dz \tag{19}$$

を得る. ここで $2\pi i f(c)$ との差を計算する. $\displaystyle\int_{\Gamma_r}\frac{dz}{z-c} = 2\pi i$ なので,

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-c}dz - 2\pi i f(c) &= \int_{\Gamma_r}\frac{f(z)}{z-c}dz - \int_{\Gamma_r}\frac{f(c)}{z-c}dz \\ &= \int_{\Gamma_r}\frac{f(z)-f(c)}{z-c}dz. \end{aligned} \tag{20}$$

$f(z)$ は Γ の内部で連続なので, 任意の $\epsilon>0$ に対して, $r>0$ を十分小さく取ると, Γ_r 上で $|f(z)-f(c)|<\epsilon$ をみたす. このとき, 積分の評価式より,

$$\left|\int_{\Gamma_r}\frac{f(z)-f(c)}{z-c}dz\right| < \frac{\epsilon}{r}\cdot 2\pi r = 2\pi\epsilon. \tag{21}$$

すなわち,

$$\left|\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-c}dz - 2\pi i f(c)\right| < 2\pi\epsilon \tag{22}$$

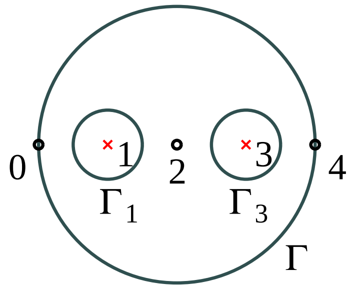
である. ところが ϵ は任意の正数なので,

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-c}dz = 2\pi i f(c) \tag{23}$$

でなければならない. $2\pi i$ で割って (18) を得る. (q.e.d.)

この定理は, $f(z)$ が閉曲線 Γ 上およびその内部で正則ならば, $f(z)$ の Γ の内部での値は, Γ 上の値で完全に決定してしまうことを意味する. これは驚異的なことだと言わざるを得ない.

(ex2) $\Gamma : |z-2| = 2$（向きは正）とするとき, $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z-2}{(z-1)(z-3)}dz$ を求めよ.



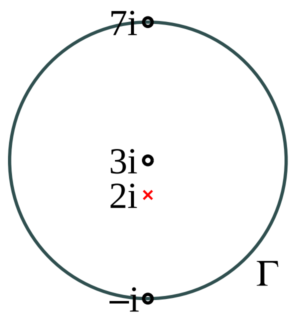
(ans) 図のような Γ_1, Γ_3 を取る. 積分定理 II より,

$$\int_\Gamma \frac{z-2}{(z-1)(z-3)}dz = \int_{\Gamma_1} \frac{z-2}{(z-1)(z-3)}dz + \int_{\Gamma_3} \frac{z-2}{(z-1)(z-3)}dz. \tag{24}$$

ここで, $\frac{z-2}{z-3} = f(z)$, $\frac{z-2}{z-1} = g(z)$ とおくと, $f(z)$ は Γ_1 上およびその内部で正則, $g(z)$ は Γ_3 上およびその内部で正則となる. ゆえに積分公式 I より,

$$(24) = \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z-1}dz + \int_{\Gamma_3} \frac{g(z)}{z-3}dz = 2\pi i f(1) + 2\pi i g(3) = \boxed{2\pi i}. \tag{25}$$

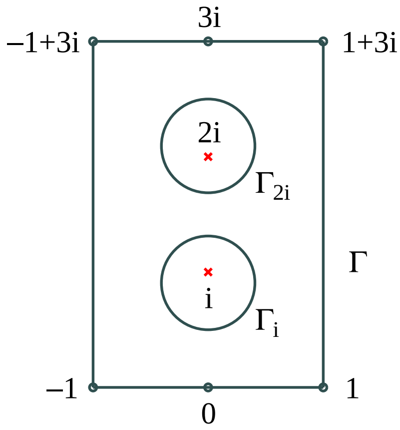
(ex3) $\Gamma : |z-3i| = 4$（向きは正）とするとき, $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^{\pi z}}{z^2+4}dz$ を求めよ.



(ans) $\frac{e^{\pi z}}{z^2+4} = \frac{e^{\pi z}}{(z+2i)(z-2i)} = f(z)$ とおく. Γ 内にある $f(z)$ の特異点は $z = 2i$ のみである. そこで $\frac{e^{\pi z}}{z+2i} = g(z)$ とおくと, $g(z)$ は Γ 上およびその内部で正則なので, 積分公式 I より,

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma \frac{g(z)}{z-2i}dz = 2\pi i g(2i) = 2\pi i \frac{e^{2\pi i}}{2i+2i} = \boxed{\frac{\pi}{2}}. \tag{26}$$

(ex4) Γ を 4 点 $\pm 1, \pm 1 + 3i$ を頂点とする正の向きの長方形とするとき, $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}dz$ を求めよ.



(ans) $\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} = \frac{z^2}{(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)} = f(z)$ とおく. Γ 内の $f(z)$ の特異点は $z = i, 2i$ のみである. 図のような Γ_i, Γ_{2i} を取ると, 積分定理 II より,

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\Gamma_i} f(z)dz + \int_{\Gamma_{2i}} f(z)dz. \tag{27}$$

ここで, $\frac{z^2}{(z+i)(z+2i)(z-2i)} = g(z)$, $\frac{z^2}{(z+i)(z-i)(z+2i)} = h(z)$ とおくと, $g(z)$ は Γ_i 上およびその内部で正則, $h(z)$ は Γ_{2i} 上およびその内部で正則となる. ゆえに積分公式 I より,

$$(27) = \int_{\Gamma_i} \frac{g(z)}{z-i}dz + \int_{\Gamma_{2i}} \frac{h(z)}{z-2i}dz = 2\pi i g(i) + 2\pi i h(2i) = \boxed{\frac{\pi}{3}}. \tag{28}$$

6章　積分公式IIとその応用

☆6☆

キーワード: Cauchy の積分公式, Morera の定理, 最大値の原理,
Cauchy の評価式, Liouville の定理, 代数学の基本定理

- 1 -（Cauchy の積分公式 II）(T1) D を領域とする．$f(z)$ が D で正則なとき, D で何回でも微分可能になり, その n 次導関数は,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta \tag{1}$$

で与えられる．ただし C は, C 自身およびその内部が D に含まれる正の向きの単一閉曲線, z は C の内部の点とする．

(∵) (1) を n に関する帰納法で示す．$f(z)$ が D で正則とする．C, z を上記のように取る．すると積分公式 I より,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta. \tag{2}$$

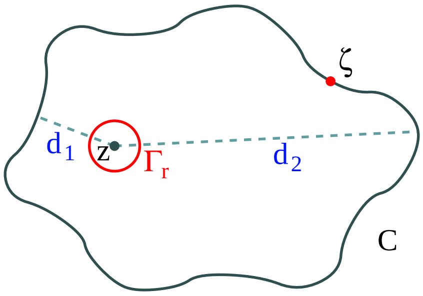
この公式は, $n = 0$ のときに (1) がなりたつことを示している．

$n - 1$ のとき (1) がなりたつと仮定すると,

$$\begin{aligned}
&\tfrac{2\pi i}{(n-1)!}\cdot\tfrac{1}{h}\left[f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)\right] = \frac{1}{h}\left(\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-(z+h))^n}d\zeta - \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^n}d\zeta\right)\\
&= \frac{1}{h}\int_C f(\zeta)\frac{(\zeta-z)^n - (\zeta-z-h)^n}{(\zeta-z-h)^n(\zeta-z)^n}d\zeta\\
&= \frac{1}{h}\int_C f(\zeta)\frac{(\zeta-z)-(\zeta-z-h)}{(\zeta-z-h)^n(\zeta-z)^n}\left[\textstyle\sum_{k=0}^{n-1}(\zeta-z)^k(\zeta-z-h)^{n-k-1}\right]d\zeta\\
&= \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)^n(\zeta-z)^n}\left[\textstyle\sum_{k=0}^{n-1}(\zeta-z)^k(\zeta-z-h)^{n-k-1}\right]d\zeta.
\end{aligned} \tag{3}$$

ここで, $n\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$ との差を評価する．簡単のため, $\zeta - z = s$ とおく．

$$\begin{aligned}
&\int_C \frac{f(\zeta)}{(s-h)^n s^n}\left[\textstyle\sum_{k=0}^{n-1}s^k(s-h)^{n-k-1}\right]d\zeta - n\int_C \frac{f(\zeta)}{s^{n+1}}d\zeta\\
&= \int_C \frac{f(\zeta)}{(s-h)^n s^{n+1}}\left[s\textstyle\sum_{k=0}^{n-1}s^k(s-h)^{n-k-1} - n(s-h)^n\right]d\zeta
\end{aligned}$$



$$
\begin{aligned}
&= \int_C \frac{f(\zeta)}{(s-h)^n s^{n+1}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(s^{k+1}(s-h)^{n-k-1} - (s-h)^n \right) \right] d\zeta \\
&= \int_C \frac{f(\zeta)}{(s-h)^n s^{n+1}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} (s-h)^{n-k-1} \left(s^{k+1} - (s-h)^{k+1} \right) \right] d\zeta \\
&= \int_C \frac{f(\zeta)}{(s-h)^n s^{n+1}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} (s-h)^{n-k-1} h \sum_{l=0}^{k} s^l (s-h)^{k-l} \right] d\zeta \\
&= h \int_C \frac{f(\zeta)}{(s-h)^n s^{n+1}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{k} s^l (s-h)^{n-l-1} \right] d\zeta
\end{aligned} \tag{4}
$$

r を十分小として, z 中心半径 r の円周 Γ_r が C の内部に含まれるようにし, $|h| < r$ とすれば, $z+h$ は Γ_r の内部にある. z と C の距離を d_1, $|s|$ $(\zeta \in C)$ の最大値を d_2 とすると, $d_1 - r \leq |s|, |s-h| \leq d_2 + r$ となる. $|f(\zeta)|$ の C 上での最大値を M とする. C の長さを L とする. これらを用いて (4) 最後の式の絶対値を評価すると,

$$
|\cdots| \leq |h| \cdot \frac{M}{(d_1 - r)^{2n+1}} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot (d_2 + r)^{n-1} \cdot L \tag{5}
$$

となって, $|h| \to 0$ のとき,

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{2\pi i}{(n-1)!} \cdot \tfrac{1}{h} \left[f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z) \right] \longrightarrow n \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \\
&\therefore \quad \tfrac{1}{h} \left[f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z) \right] \longrightarrow \tfrac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = f^{(n)}(z).
\end{aligned} \tag{6}
$$

こうして n のときもなりたつので, 帰納法が完成した. (q.e.d.)

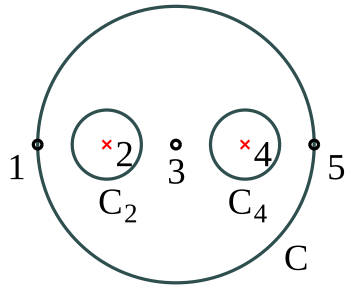
ここで見たように, ある領域で 1 回でも微分可能な複素関数は, 実は何回でも微分可能になってしまう. それは実関数とは全く異なり, 大変不思議な性質である.

(note) (1) は (2) の右辺の被積分関数を z で n 回偏微分することで得られる. しかしそのことの正当性は現段階では明らかでないので, 上のような証明を行ったのである. 参考までに, 上記の正当性を示す定理を記しておく. 証明は 12 章で行う.

(T2) $g(z,\zeta)$ は複素変数 z, ζ の（複素数値）関数で, z は領域 D を動き, ζ は曲線 C 上を動くものとする. $g(z,\zeta)$ は連続で, 各 $\zeta \in C$ を固定したとき, $g(z,\zeta)$ は z の関数として D で正則とする. このとき $f(z) = \displaystyle\int_C g(z,\zeta) d\zeta$ は D で正則で,

$$
f'(z) = \int_C \frac{\partial}{\partial z} g(z,\zeta) d\zeta. \tag{7}
$$

(ex1) $C : |z-3| = 2$（向きは正）とするとき, $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{Log}\, z}{(z-2)^2(z-4)}dz$ を求めよ.



(ans) 図のような C_2, C_4 を取る. 積分定理 II より,

$$\int_C \frac{\mathrm{Log}\, z}{(z-2)^2(z-4)}dz = \int_{C_2} \frac{\mathrm{Log}\, z}{(z-2)^2(z-4)}dz + \int_{C_4} \frac{\mathrm{Log}\, z}{(z-2)^2(z-4)}dz. \tag{8}$$

ここで, $\frac{\mathrm{Log}\, z}{z-4} = f(z)$, $\frac{\mathrm{Log}\, z}{(z-2)^2} = g(z)$ とおくと, $f(z)$ は C_2 上およびその内部で正則, $g(z)$ は C_4 上およびその内部で正則となる. ゆえに積分公式 I,II より,

$$\begin{aligned}(8) \quad &= \int_{C_2} \frac{f(z)}{(z-2)^2}dz + \int_{C_4} \frac{g(z)}{z-4}dz = 2\pi i f'(2) + 2\pi i g(4) \\ &= 2\pi i \left[\frac{\frac{1}{z}(z-4) - \mathrm{Log}\, z}{(z-4)^2}\right]_{z=2} + 2\pi i \frac{\mathrm{Log}\, 4}{4} = \boxed{\frac{\mathrm{Log}\, 2 - 1}{2}\pi i}.\end{aligned} \tag{9}$$

以下, 積分公式の応用をいくらかあげることにする.

- 2 -（Morera の定理）(T3) $f(z)$ を領域 D で連続とする. D 内の任意の単一閉曲線 Γ に対して $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz = 0$ がなりたつとき, $f(z)$ は D で正則となる.

(∵) D 内の点 z_0 を固定し, D 内の点 z に対して, z_0 から z へ向かう D 内の単一曲線 C を取ると, 5 章 (T5') より $\displaystyle\int_C f(\zeta)d\zeta = \tilde{F}(z)$ は D で正則で, $\tilde{F}'(z) = f(z)$. ところが, 前述の - 1 - によれば, 正則な関数は何回でも微分可能なので, $\tilde{F}'(z) = f(z)$ もまた D で微分可能である. すなわち $f(z)$ は D で正則となる. (q.e.d.)

この定理では, D は単連結でなくてもよい. D が単連結の場合には, これは積分定理 I の逆とみることができる.

- 3 -（最大値の原理）(T4) Γ を単一閉曲線, Γ とその内部からなる集合を E とする. $f(z)$ を E で正則とするとき, $|f(z)|$ は E における最大値を Γ 上で取る.

($\because$) Γ の内部の任意の点 c を取る. $|f(z)|$ の Γ における最大値を M, Γ の長さを L, c と Γ との距離を d とおく. $(f(z))^n$ は E で正則なので, 積分公式 I, および積分の評価式より,

$$\begin{aligned} |f(c)|^n = |(f(c))^n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(f(z))^n}{z-c}dz\right| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M^n}{d}\cdot L. \\ \therefore\quad |f(c)| \leq M\frac{L^{1/n}}{(2\pi d)^{1/n}} \longrightarrow M.\quad (n\to\infty) \qquad \text{(q.e.d.)} \end{aligned} \tag{10}$$

(note) $f(z)$ が定数関数でない限り, $|f(z)|$ は E における最大値を, Γ の内部で取ることはない.

(ex2) $f(z) = e^z$ について, $|e^z|$ の $|z-i| \leq 3$ における最大値はいくらで, それはどこで取るか.

- 4 -（Cauchy の評価式）(T5) Γ_r を c 中心半径 r の円とし, $f(z)$ が Γ_r 上およびその内部で正則とする. Γ_r における $|f(z)|$ の最大値を M とすると,

$$\left|f^{(n)}(c)\right| \leq \frac{n!M}{r^n}. \tag{11}$$

($\because$) 積分公式 II および積分の評価式より,

$$\left|f^{(n)}(c)\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}dz\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r = \frac{n!M}{r^n}. \qquad \text{(q.e.d.)} \tag{12}$$

この定理の応用として, 次の Liouville の定理を得る. さらにその応用として, 代数学の基本定理を得る.

- 5 -（Liouville の定理）(T6) 全平面で有界な整関数は定数に限る.

($\because$) $f(z)$ を全平面で有界な整関数とする. 任意の点 c を取り, c を中心とする半径 r の円を Γ_r とおく. $f(z)$ は有界なので, ある $\tilde{M}$ が存在して, つねに $|f(z)| \leq \tilde{M}$ がなりたち, Γ_r における $|f(z)|$ の最大値を M とすれば, $M \leq \tilde{M}$ (#) である. ここで Cauchy の評価式の $n=1$ の場合を適用して,

$$|f'(c)| \leq \frac{M}{r}. \tag{13}$$

これと (#) より,

$$|f'(c)| \leq \frac{\tilde{M}}{r} \tag{14}$$

を得る. ここで $r\to\infty$ とすれば, $|f'(c)| = 0$ となる. c は任意だったので, 結局全平面において $f'(z) = 0$ がなりたつことになる. これより, $f(z) = \text{const}$ を得る. (q.e.d.)

- 6 -（代数学の基本定理）(T7) 複素係数の代数方程式は, 複素平面上に少なくとも 1 つの根を持つ.

($\because$) 複素係数の多項式 $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ ($n \geq 1$, $a_0 \neq 0$) を取り, 関数

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} \tag{15}$$

を考える. さて代数方程式 $f(z) = 0$ が決して根を持たないと仮定しよう. すると, $g(z)$ は全平面で正則すなわち整関数となる. $z \to \infty$ のとき,

$$\begin{aligned} |g(z)| &= \frac{1}{|a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n|} \\ &= \frac{1}{|z|^n} \cdot \frac{1}{\left|a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}\right|} \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{16}$$

となるので, 十分大きい R に対して, $|z| > R$ ならば, $|g(z)| < 1$ がなりたつ. また $g(z)$ は正則なので連続であり, したがって $|g(z)|$ も連続である. ゆえに $|g(z)|$ は $|z| \leq R$ において最大値 M を取る. こうして全平面において,

$$|g(z)| \leq \max(1, M) \tag{17}$$

をみたし, $g(z)$ は全平面で有界となる. ところが $g(z)$ は整関数だったので, Liouville の定理より $g(z)$ は定数となって, 明らかに矛盾する. これより, $f(z) = 0$ は根を持たなければならない. (q.e.d.)

一旦この定理を認めれば, 多項式 $f(z)$ に対してその複素数の根の 1 つ α_1 を選ぶことで, 因数定理により,

$$f(z) = (z - \alpha_1) f_1(z) \tag{18}$$

を得る. 同様に $f_1(z)$ の根 α_2 を選べば, $f(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) f_2(z)$. 以下繰り返して,

$$f(z) = a_0 (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_n). \tag{19}$$

すなわち, $f(z)$ は複素係数の 1 次式の積に分解される.

7章 複素数列, 級数の基礎

☆ 9 ☆

キーワード: 複素数列, 集積点, Bolzano–Weierstrass の定理, Cauchy の収束条件,
複素級数, 絶対収束, Cauchy の乗積級数

- 1 -（複素数列）無限に続く複素数の列: $a_0, a_1, a_2, \ldots$ を複素数列という. これは簡単に $\{a_n\}$ とも表記される. 以下複素数列を単に数列と呼ぶ. 数列を考えるからには, その極限値が問題となる. ある複素数 α が存在して次の条件 (1) をみたすとき,[1] 数列 $\{a_n\}$ は α に収束する, あるいは $\{a_n\}$ の極限値は α であるといい, $a_n \to \alpha$ または $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とかく.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{任意の正の実数 } \epsilon \text{ に対して, ある非負整数 } N \text{ が存在して,}\\ \text{非負整数 } n \text{ が } n \geq N \text{ をみたすならば } |a_n - \alpha| < \epsilon.\end{array}} \tag{1}$$

直感的に言うと, 極限値は数列が限りなく近づく値ということだが, 厳密な議論では (1) が必要になる. 数列がどの複素数にも収束しないときは発散するという.[2] $a_n = s_n + it_n$, $\alpha = \sigma + i\tau$ とおくとき,

$$a_n \to \alpha \iff s_n \to \sigma \ \text{ かつ } \ t_n \to \tau \tag{2}$$

が示される. 点 c 中心半径 ϵ の円の内部を c の ϵ 近傍と呼び, $U_\epsilon(c)$ とかく.

- 2 -（数列の和, 積, 商と極限）$a_n \to \alpha$, $b_n \to \beta$ とし, c を定数とするとき,

$$a_n + b_n \longrightarrow \alpha + \beta, \quad ca_n \longrightarrow c\alpha, \quad a_n b_n \longrightarrow \alpha\beta, \quad \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{\alpha}{\beta}. \tag{3}$$

ただし最後は分母が 0 にならないとする. より一般に次がなりたつ.

(T1) 連続な 2 変数複素関数 $g(z, w)$ に対して,

$$g(a_n, b_n) \longrightarrow g(\alpha, \beta). \tag{4}$$

($\because$) 任意の $\epsilon > 0$ を取る. $g(z, w)$ は (α, β) で連続だから, $\delta > 0$ が存在して,

$$|z - \alpha|, |w - \beta| < \delta \text{ ならば } |g(z, w) - g(\alpha, \beta)| < \epsilon. \tag{5}$$

ここで $a_n \to \alpha$, $b_n \to \beta$ なので, ある N, N_1 が存在して,

$$\begin{array}{lll} n \geq N & \text{ならば} & |a_n - \alpha| < \delta, \\ n \geq N_1 & \text{ならば} & |b_n - \beta| < \delta. \end{array} \tag{6}$$

[1] 条件 (1) において, 特に紛れがない場合は, 実数や非負整数という言葉を省略する.

[2] すなわち数列 $\{a_n\}$ が発散するとは, 数列が Riemann 球面上で, ∞ に限りなく近づくか, どの点にも限りなく近づくことがないかのいずれかである. 前者のとき, 数列は ∞ に発散するといい, $a_n \to \infty$ とかき, それは $|a_n| \to \infty$ と同値である.

よって $M=\max(N,N_1)$ を取ると, (5),(6) より, $n \geq M$ ならば,

$$|g(a_n,b_n)-g(\alpha,\beta)|<\epsilon. \tag{7}$$

ϵ は任意だったので, これで $g(a_n,b_n) \longrightarrow g(\alpha,\beta)$ が示された. (q.e.d.)

(ex1) 数列 $\left\{\frac{3n-i}{2ni+3}-\left(\frac{i}{3}\right)^n+2e^{2n\pi i}\right\}$ の極限値を求めよ. $\left(2-\frac{3}{2}i\right)$

- 3 -（集積点と Bolzano–Weierstrass の定理）数列 $\{a_n\}$ の集積点とは, 次をみたす ω のことである.

$$\boxed{\text{任意の } \epsilon>0 \text{ に対して, } |a_n-\omega|<\epsilon \text{ をみたす } n \text{ が無数にある.}} \tag{8}$$

数列の極限値は集積点だが, 逆は言えない. ここで, 収束条件について論じるために, 次の定理を導入する.

(T2)（Bolzano–Weierstrass の定理）有界な数列は集積点を持つ.

($\because$) $\{a_n\}$ が有界とする. したがって, ある R が存在して, つねに $|a_n| \leq R$ である. そこで, $\pm R \pm Ri$ を 4 頂点とする正方形の周と内部を合わせた Q_0 を考えれば, すべての a_n が Q_0 に含まれる. ここで Q_0 を縦横に切り 4 等分する. これらの 4 つの部分（境界を含む）のうち, どれかには a_n が無数に含まれていなければならない.（でなければ $\{a_n\}$ が有限数列になる） そのような小正方形を 1 つ選び, Q_1 とする. 次に Q_1 をまた 4 等分し, a_n が無数に含まれる小正方形を選びそれを Q_2 とする. このような操作を繰り返せば, 正方形の列 $\{Q_n\}$ を得る. Q_n の左下頂点を x_n+iy_n, 右上頂点を $\tilde{x}_n+i\tilde{y}_n$ とおく. 定義より,

$$\begin{array}{c} x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n < \tilde{x}_n \leq \tilde{x}_{n-1} \leq \cdots \leq \tilde{x}_1 \leq \tilde{x}_0 \\ y_0 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_{n-1} \leq y_n < \tilde{y}_n \leq \tilde{y}_{n-1} \leq \cdots \leq \tilde{y}_1 \leq \tilde{y}_0 \end{array} \tag{9}$$

なので, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ は有界単調増加列, $\{\tilde{x}_n\}$, $\{\tilde{y}_n\}$ は有界単調減少列となって, これらはすべて収束する. また

$$\tilde{x}_n-x_n=\tilde{y}_n-y_n=\frac{R}{2^{n-1}} \longrightarrow 0 \tag{10}$$

より,

$$\begin{array}{c} x_n \to x \leftarrow \tilde{x}_n \\ y_n \to y \leftarrow \tilde{y}_n \end{array} \tag{11}$$

を得る. そこで $\omega=x+yi$ とおけば, ω はすべての Q_n に含まれるので, どんな $\epsilon>0$ を取っても $U_\epsilon(\omega)$ に含まれる正方形 Q_s が存在し, 無数の n に対して a_n が Q_s に含まれる. したがって, これら無数の a_n は $|a_n-\omega|<\epsilon$ をみたす. ゆえに ω は $\{a_n\}$ の集積点である. (q.e.d.)

(ex2) 数列 $\left\{i^n+\frac{1}{n+1}\right\}$ の集積点を求めよ. $(\pm 1,\ \pm i)$

- 4 -（Cauchy の収束条件）数列 $\{a_n\}$ に対する Cauchy の収束条件は次で与えられる.

$$\boxed{\text{任意の } \epsilon > 0 \text{ に対して, ある } N \text{ が存在し, } m, n \geq N \text{ ならば } |a_m - a_n| < \epsilon.} \tag{12}$$

このとき, 次の定理がなりたつ.

$$\begin{array}{ccc} & \boxed{\{a_n\} \text{ が有界でただ 1 つの集積点 } \alpha \text{ を持つ}} & \\ \Uparrow \text{(i)} & & \Downarrow \text{(ii)} \\ \boxed{\{a_n\} \text{ が Cauchy の収束条件をみたす}} & \overset{\text{(iii)}}{\Leftarrow} & \boxed{\{a_n\} \text{ が } \alpha \text{ に収束する}} \end{array} \tag{13}$$

(∵) (i): $\{a_n\}$ が Cauchy の収束条件をみたすとする. このとき, $\epsilon = 1$ を取るとある N が存在して, $m, n \geq N$ ならば $|a_m - a_n| < 1$ となる. したがってまた $|a_m - a_N| < 1$ となる. ゆえに, $m \geq N$ ならば a_m は $U_1(a_N)$ に含まれる. また $\max(|a_0|, \ldots, |a_N|) = r$ とおけば, 結局すべての a_n は $U_{r+1}(0)$ に含まれることになる. これは $\{a_n\}$ が有界であることを意味する. 有界であるならば, Bolzano–Weierstrass の定理より集積点を持つ. それがただ 1 つであることを言うために, 集積点を 2 つ以上持つと仮定し, そのうち 2 つを α, β とし, $|\alpha - \beta| = d$ とおく. すると, $\epsilon = d/3$ に対して無数の m, n があって, $|a_m - \alpha| < \epsilon$ (a), $|a_n - \beta| < \epsilon$ (b) がなりたつ. しかし Cauchy の収束条件より, ある N があって, $m, n \geq N$ ならば $|a_m - a_n| < \epsilon$ (c) となる. したがって, 無数の m, n に対して, (a),(b),(c) が同時になりたつことになる. すると,

$$\begin{aligned} d &= |\alpha - \beta| = |(\alpha - a_m) + (a_m - a_n) + (a_n - \beta)| \\ &\leq |\alpha - a_m| + |a_m - a_n| + |a_n - \beta| < 3\epsilon = d \end{aligned} \tag{14}$$

となって矛盾する. これで, $\{a_n\}$ が有界かつただ 1 つの集積点を集積点を持つことが示された. (q.e.d.)

(∵) (ii):（背理法による）$\{a_n\}$ が有界でただ 1 つの集積点 α を持ち, かつ α に収束しないと仮定する. すると, ある $\epsilon > 0$ が存在し, どんな N に対しても, $n \geq N$ かつ $|a_n - \alpha| \geq \epsilon$ となる n がある. したがってそのような $n = n'$ は無数に存在し, $|a_{n'} - \alpha| \geq \epsilon$ をみたしていることになる. ところが $\{a_n\}$ は有界なので, 適当な $U_R(0)$ があってつねに $a_n \in U_R(0)$ となる. ゆえに無数の n' に対して, $a_{n'} \in U_R(0) - U_\epsilon(\alpha)$ がみたされる. そこで Bolzano–Weierstrass の定理より, $\{a_n\}$ に α と異なる集積点が存在することになり, 矛盾を生ずる. (q.e.d.)

(∵) (iii): $a_n \longrightarrow \alpha$ とする. 任意の $\epsilon > 0$ を取る. するとある N が存在して, $n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \epsilon/2$ となる. 同様に, $m \geq N$ ならば $|a_m - \alpha| < \epsilon/2$. ゆえに $m, n \geq N$ ならば,

$$|a_m - a_n| = |(a_m - \alpha) + (\alpha - a_n)| \leq |a_m - \alpha| + |a_n - \alpha| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \tag{15}$$

これは $\{a_n\}$ が Cauchy の収束条件をみたすことを示す. (q.e.d.)

(13) は 3 つの命題が同値であることを示すが, 特に重要なのは,

(T3) $\boxed{\text{数列が収束する} \iff \text{数列が Cauchy の収束条件をみたす}}$

という定理である. Cauchy の収束条件は極限値を使わないために扱いやすい. Cauchy の収束条件をみたす数列は $\boxed{\text{Cauchy 列}}$ と呼ばれる.

- 5 -（級数）数列 $\{a_n\}$ が与えられたとき, 形式的な和 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ を（複素）級数という．第 n 項までの部分和 $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ をつくるとき, 数列 $\{S_n\}$ が S に収束するならば, 級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は S に収束する（級数の和は S である）といい,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S \tag{16}$$

とかく．級数が収束しないときは発散するという．- 4 - の Cauchy の収束条件を用いると, 次を得る．

(T4)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ が収束する} \iff \boxed{\begin{array}{l}\text{任意の } \epsilon > 0 \text{ に対して, ある } N \text{ が存在し,} \\ m > n \geq N \text{ ならば } \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \epsilon.\end{array}} \tag{17}$$

($\because$) Cauchy の収束条件を $\{S_n\}$ に用いると,

$$\begin{array}{l}\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ が収束する} \iff \{S_n\} \text{ が収束する} \iff \\ \text{任意の } \epsilon > 0 \text{ に対して, ある } N \text{ が存在し, } m, n \geq N \text{ ならば } |S_m - S_n| < \epsilon.\end{array} \tag{18}$$

ところが, ($m, n \geq N$ ならば $|S_m - S_n| < \epsilon$) の部分は, ($m > n \geq N$ ならば $|S_m - S_n| < \epsilon$) と同値である．また $m > n$ のときは

$$|S_m - S_n| = \left|\sum_{k=0}^{m} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \tag{19}$$

なので, 結局, (18) 右辺 $\iff$ (17) 右辺． (q.e.d.)

(17) の右辺の囲みの中は, 級数に対する Cauchy の収束条件に他ならない．

(ex3) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が収束するならば, $a_n \to 0$ を示せ．（逆はなりたたない）

- 6 -（絶対収束）級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が絶対収束するとは, $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ が収束することをいう．次の定理がなりたつ．

(T5) 級数が絶対収束するならば, 収束する．

($\because$) 級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が絶対収束するとしよう．すると $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ が Cauchy の収束条件をみたすので, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある N があって, $m > n \geq N$ ならば $\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \epsilon$. このとき,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \epsilon. \tag{20}$$

これは $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が Cauchy の収束条件をみたしたことを示すので, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は収束する． (q.e.d.)

もう少し一般化した次の定理もよく用いられる．

(T5') 条件 $|a_k| \leq M_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ がなりたつとする．$\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ が収束するならば, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ も (絶対) 収束する．

証明は (T5) とほとんど同じなので省略する．

(note) (T5) の逆はなりたたない．すなわち, 級数が収束しても絶対収束するとは限らない．たとえば, $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\mathrm{Log}\,2$ だが, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\infty$ である．このように, 級数が収束するが絶対収束はしないとき, その級数は条件収束するという．

(note) (T5') の条件 $|a_k|\le M_k$ $(k=0,1,2,\ldots)$ をみたすとき, $\sum_{k=0}^{\infty}M_k$ は $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ の優級数, あるいは, $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ は $\sum_{k=0}^{\infty}M_k$ の劣級数という．(T5') は, 優級数が収束すれば, 劣級数も絶対収束するということに他ならない．

- 7 -（和の順序交換）収束する級数は, 項の順序をはじめの有限項だけ入れ替えても和は変わらない．しかし, 無限に多くの項の順序を入れ替えると, 和が変わってしまうことがある．

(T6) 級数が絶対収束するならば, 項の順序をどのように入れ替えても和は変わらない．

($\because$) $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ $(*)$ が絶対収束するとし, $\sum_{k=0}^{n}a_k=S_n$, $S_n\to S$ とする．また, $\sum_{k=0}^{n}|a_k|=T_n$, $T_n\to T$ とする．$(*)$ の項の順序を任意に入れ替えてできた級数を $\sum_{k=0}^{\infty}a'_k$ とし, $\sum_{k=0}^{m}a'_k=S'_m$ とおく．

任意の $\epsilon>0$ をとる．すると N があって, $n\ge N$ ならば $|S_n-S|<\epsilon$. また, N_1 があって, $n\ge N_1$ ならば $|T_n-T|<\epsilon$. よって $n=\max(N,N_1)$ と取れば, $|S_n-S|<\epsilon$ かつ $|T_n-T|<\epsilon$. ここで M を十分大とすると, $m\ge M$ ならば, $a'_0,a'_1,\ldots,a'_m$ の中に $a_0,a_1,\ldots,a_n$ がすべて含まれる．このとき,

$$\begin{aligned}|S'_m-S_n| &= \left|a_{j_1}+\cdots+a_{j_{m-n}}\right| \le |a_{j_1}|+\cdots+|a_{j_{m-n}}| \\ &\le |a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\cdots=T-T_n<\epsilon.\end{aligned} \tag{21}$$

ゆえに,

$$|S'_m-S|\le|S'_m-S_n|+|S_n-S|<\epsilon+\epsilon=2\epsilon \tag{22}$$

となって, $S'_m\to S$ が示せた．(q.e.d.)

- 8 -（級数の和, スカラー倍）$\sum_{k=0}^{\infty}a_k=S$, $\sum_{k=0}^{\infty}b_k=T$ とする．部分和をそれぞれ S_n,T_n とおく．(3) を用いると,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=0}^{n}a_k+\sum_{k=0}^{n}b_k=S_n+T_n &\quad\longrightarrow S+T \\ \sum_{k=0}^{n}ca_k=c\sum_{k=0}^{n}a_k=cS_n &\quad\longrightarrow cS\end{aligned} \tag{23}$$

を得る．ゆえに,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k+\sum_{k=0}^{\infty}b_k;\qquad \sum_{k=0}^{\infty}ca_k=c\sum_{k=0}^{\infty}a_k. \tag{24}$$

(ex4) $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2^k}+\frac{2i}{(3i)^k}\right)$ を求めよ．$\left(\frac{33+9i}{5}\right)$

(note) (24) は右辺が絶対収束すれば左辺も絶対収束する．

- 9 -（級数の積）級数の積は和やスカラー倍に比べて計算が複雑になる.

(T7) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ が絶対収束するとき,

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0). \tag{25}$$

右辺は絶対収束する. 右辺の級数を, 左辺の 2 つの級数に対する Cauchy の乗積級数という.

(∵) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ が絶対収束するとし, それぞれの和を S, T, 部分和を S_n, T_n とする. $\sum_{k=0}^{n} |a_k| = \tilde{S}_n \to \tilde{S}$, $\sum_{k=0}^{n} |b_k| = \tilde{T}_n \to \tilde{T}$ とする. さらに

$$\sum_{k=0}^{n}(a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0) = U_n \tag{26}$$

とおく.

$$S_nT_n \longrightarrow ST \tag{27}$$

なので,

$$S_nT_n - U_n \to 0 \tag{28}$$

を示す. 任意の $\epsilon > 0$ を取る. $\tilde{S}_n\tilde{T}_n \to \tilde{S}\tilde{T}$ なので Cauchy の収束条件を用いれば, ある N があって, $m, n \geq N$ ならば $|\tilde{S}_m\tilde{T}_m - \tilde{S}_n\tilde{T}_n| < \epsilon$. ゆえに,

$$|\tilde{S}_m\tilde{T}_m - \tilde{S}_N\tilde{T}_N| < \epsilon. \tag{29}$$

ここで $n \geq 2N$ ならば,

$$|S_nT_n - U_n| \leq \tilde{S}_n\tilde{T}_n - \tilde{S}_N\tilde{T}_N < \epsilon \tag{30}$$

を得る. (Figure 1) これで (28) が示せた. それと (27) より,

$$U_n = (U_n - S_nT_n) + S_nT_n \longrightarrow ST \tag{31}$$

を得る. これで (25) が示せた.

次に (25) 右辺が絶対収束することを示す. (25) 右辺において, a_i, b_j をそれぞれ $|a_i|$, $|b_j|$ で置き換えた級数を

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_k \tag{32}$$

とすれば, これは今証明したことより収束する. ところで

$$|a_0b_k + \cdots + a_kb_0| \leq M_k \tag{33}$$

なので, (T5') より (25) 右辺が絶対収束することがわかる. (q.e.d.)

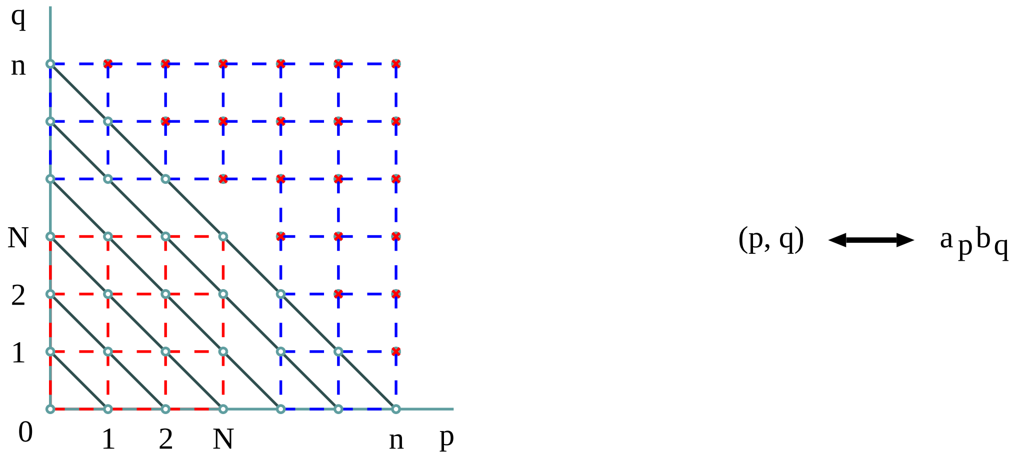


Figure 1

(ex5) a, b を絶対値が 1 より小さい複素数とする. $a_k = a^k$, $b_k = b^k$ $(k = 0, 1, 2 \ldots)$ とするとき, (25) がなりたつことを確かめよ.

8章　一様収束と極限関数の微分積分

☆7☆

キーワード: 一様収束, 広義一様収束, 項別積分, 項別微分, Weierstrass の判定法,
巾級数, 収束半径, Cauchy–Hadamard の定理

- 1 -（各点収束と一様収束）無限に続く複素関数の列:

$$f_0(z), f_1(z), f_2(z), \dots \tag{1}$$

を関数列という. (1) を簡潔に $\{f_n(z)\}$ ともかく. 関数列 $\{f_n(z)\}$ において, 各項 $f_n(z)$ の定義域が D であるとき, $\{f_n(z)\}$ は D で定義されたという. これに対し $z \in D$ を適当な値に固定すれば, $\{f_n(z)\}$ は関数の値の列なので普通の数列と変わりはない. z を D の各点で固定したとき, 数列として $\{f_n(z)\}$ が $f(z)$ に収束するならば, 関数列 $\{f_n(z)\}$ は D で $f(z)$ に (各点) 収束するといい,（D で）$f_n(z) \to f(z)$ または $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ とかく. このとき, $f(z)$ を（D における）$\{f_n(z)\}$ の極限関数という.

　z を D の各点で固定したとき, 数列として $\{f_n(z)\}$ が発散するならば, 関数列 $\{f_n(z)\}$ は D で発散するという.

　関数列に関しては, 次のような数列と同様の公式がなりたつ.（z を固定して考えれば普通の数列の公式より明らか）D で $f_n(z) \to f(z)$, $g_n(z) \to g(z)$ とするとき,（最後の式は D で分母が 0 にならないとき）D で,

$$\begin{array}{ll} f_n(z) + g_n(z) \longrightarrow f(z) + g(z), & h(z)f_n(z) \longrightarrow h(z)f(z), \\ f_n(z)g_n(z) \longrightarrow f(z)g(z), & \frac{f_n(z)}{g_n(z)} \longrightarrow \frac{f(z)}{g(z)}. \end{array} \tag{2}$$

　収束より強い条件として一様収束がある. 関数列 $\{f_n(z)\}$ が D で極限関数 $f(z)$ に一様収束する[1] とは, 次の条件をみたすことである.

$$\begin{array}{l} \text{任意の } \epsilon > 0 \text{ に対して, ある非負整数 } N \text{ が存在して,} \\ n \ge N \text{ ならば, すべての } z \in D \text{ に対して } |f_n(z) - f(z)| < \epsilon. \end{array} \tag{3}$$

　$\{f_n(z)\}$ が D で $f(z)$ に一様収束するならば, 当然 $\{f_n(z)\}$ は D で $f(z)$ に収束するが, 逆はなりたたない.

　$\{f_n(z)\}$ が一様収束する, すなわち条件 (3) をみたすとき,

$$\boxed{\text{関数列の各項が持っている連続性や正則性が極限関数に継承される}}.$$

(ex1) $\{z^n\}$ は $|z| \le \frac{1}{2}$ で 0 に一様収束することを示せ.[2]

[1] $\{f_n(z)\}$ が $z \in D$ に関して一様に $f(z)$ に収束する（$z \in D$ に関して一様収束する）などとも表現する.

[2] 1 より小さい任意の正数 r に対して, $\{z^n\}$ は $|z| \le r$ で 0 に一様収束するが, $|z| < 1$ においては, 0 に各点収束し, 一様収束はしない.

(T1) 集合 D で連続な項 $f_n(z)$ からなる関数列 $\{f_n(z)\}$ が D で $f(z)$ に一様収束するとき, $f(z)$ は D で連続である.

($\because$) $f_n(z)$ が D で連続で, $\{f_n(z)\}$ が D で $f(z)$ に一様収束するとしよう. D の任意の点 c を取り固定する. 任意に $\epsilon > 0$ を取る. まず一様収束性から, ϵ に対して, ある N が存在して, $n \geq N$ ならば, すべての $z \in D$ に対して $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$. それゆえ特に, $|f_N(z) - f(z)| < \epsilon$. したがってまた, $|f_N(c) - f(c)| < \epsilon$. ここで, $f_N(z)$ は D で連続なので, ϵ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $|z - c| < \delta$, $z \in D$ ならば $|f_N(z) - f_N(c)| < \epsilon$. このとき,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(c)| &= |f(z) - f_N(z) + f_N(z) - f_N(c) + f_N(c) - f(c)| \\ &\leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(c)| + |f_N(c) - f(c)| < 3\epsilon. \end{aligned} \tag{4}$$

3ϵ は任意の正数だったので, これで $f(z)$ が c で連続であることが示された. c は D の任意の点だったので, $f(z)$ は D で連続となる. (q.e.d.)

(T2) C を曲線とし, 各項が C 上で連続な関数列 $\{f_n(z)\}$ が C 上で $f(z)$ に一様収束するとする. このとき,

$$\lim_{n\to\infty} \int_C f_n(z)dz = \int_C f(z)dz. \tag{5}$$

($\because$) $\{f_n(z)\}$ は各項が C 上で連続かつ C 上で $f(z)$ に一様収束するので, (T1) より $f(z)$ は C 上で連続になり, 右辺の積分が存在する. また, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある N が存在して, $n \geq N$ ならば, すべての $z \in C$ に対して $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$. このとき, L を C の長さとすると,

$$\left| \int_C f_n(z)dz - \int_C f(z)dz \right| = \left| \int_C (f_n(z) - f(z))dz \right| < \epsilon \cdot L. \tag{6}$$

$\epsilon \cdot L$ はいくらでも小さい正数にできるので, これで (5) は示された. (q.e.d.)

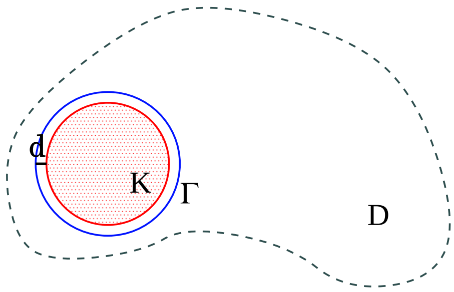
- 2 -（広義一様収束と正則性）領域 D で定義された関数列 $\{f_n(z)\}$ が D で $f(z)$ に広義一様収束するとは, 次の条件をみたすことである.[3]

$$\boxed{D \text{ 内の任意の閉円板 } K \text{ に対して, } \{f_n(z)\} \text{ が } K \text{ で } f(z) \text{ に一様収束する.}} \tag{7}$$

定義より, $\{f_n(z)\}$ が D で $f(z)$ に一様収束していれば, D で $f(z)$ に広義一様収束する. 逆はなりたたないが, D で広義一様収束していれば, D 内の任意の有界閉集合（(長さ有限の）曲線もその例）で一様収束することがわかっている.

(T3) D を領域とする. 各項が D で正則な関数列 $\{f_n(z)\}$ が D で $f(z)$ に広義一様収束するとき, $f(z)$ は D で正則で, 各自然数 k に対して, $\{f_n^{(k)}(z)\}$ は D で $f^{(k)}(z)$ に広義一様収束する.

[3] D が一般の集合の場合, 広義一様収束を, D に含まれる任意の有界閉集合 K に対して, $\{f_n(z)\}$ が K で $f(z)$ に一様収束することと定義する. D が領域, あるいはより一般に開集合のときは, (7) を定義として用いてよい.



(∵) (i) $f(z)$ の正則性: D 内の任意の閉円板 K を取る. $f_n(z)$ は K で正則なので, 当然 K で連続になり, $\{f_n(z)\}$ は K で一様収束するので, $f(z)$ は K で連続になる. 次に $f_n(z)$ は K で正則なので, 積分定理 I より K 上の任意の単一閉曲線 C に対して, $\displaystyle\int_C f_n(z)dz = 0$ となる. ここで, $\{f_n(z)\}$ は K で一様収束するから, 当然 C 上でも一様収束する. よって (T2) より,

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)dz = 0. \tag{8}$$

ここで C は K 上の任意の単一閉曲線であり, $f(z)$ は K で連続だったので, Morera の定理より, $f(z)$ は K の内部 K^o で正則になる. D 内の任意の点は適当な K^o に含まれるので, これより $f(z)$ は D で正則となる.

(ii) $\{f_n^{(k)}(z)\}$ が $f^{(k)}(z)$ に広義一様収束すること: これを言うには, D 内で任意に取った閉円板 K 上で, $\{f_n^{(k)}(z)\}$ が $f^{(k)}(z)$ に一様収束することを言えばよい. z を K 上の任意の点とし, Γ を K を内部に含む少し大きい円周とする. D が開集合で K が閉円板なので, このような Γ を D 内にとることができる (上図). そこで積分公式 II より,

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}d\zeta, \quad f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}d\zeta. \tag{9}$$

それゆえ,

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| = \left|\frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}d\zeta\right|. \tag{10}$$

ここで, $\{f_n(\zeta)\}$ は Γ 上で $f(\zeta)$ に一様収束するから, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある N が存在して, $n \geq N$ ならば, すべての $\zeta \in \Gamma$ に対して $|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \epsilon$. このとき, すべての K の点 z に対して,

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| < \frac{k!}{2\pi}\frac{\epsilon}{d^{k+1}}L. \tag{11}$$

ただし, d は K と Γ の距離, L は Γ の長さである. 右辺はいくらでも小さい正数とできるので, これで $\{f_n^{(k)}(z)\}$ が K で $f^{(k)}(z)$ に一様収束することがわかった. (q.e.d.)

- 3 -（関数項を持つ級数）集合 D で定義された関数列 $\{f_n(z)\}$ が与えられたとき, これらを項に持つ級数:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) \tag{12}$$

を考えることができる. 第 n 項までの部分和 $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$ をつくるとき, 関数列 $\{S_n(z)\}$ が D で $S(z)$ に収束するならば, 級数 $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ は D で $S(z)$ に収束する（級数の和は $S(z)$ である）といい, 次のようにかく.[4]

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) = S(z) \tag{13}$$

関数項を持つ級数についても, 次のような, 通常の級数と同様の公式がなりたつ.（z を固定して考えれば通常の級数の公式に帰着できる.）$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$, $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(z)$ が収束するとき,（最後の式については絶対収束するとき）

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) + \sum_{k=0}^{\infty} g_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (f_k(z) + g_k(z)); \quad h(z)\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(z) f_k(z) \\
&\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k(z)\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k} f_m(z) g_{k-m}(z).
\end{aligned} \tag{14}$$

これらは左辺の各級数が絶対収束すれば, 右辺も絶対収束する.

ここで, 項別積分, 項別微分に関する定理を述べる. 項別積分とは, 級数の積分を各項の積分で行うことであり, 同様に項別微分とは, 級数の微分を各項の微分で行うことである.

(T4)（項別積分）C を曲線とする. C 上で連続な関数を項に持つ級数 $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ が C 上で一様収束するとき,

$$\int_C \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)\right) dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_C f_k(z) dz. \tag{15}$$

($\because$) $\sum_{k=0}^{n} f_k(z) = S_n(z)$ とし, $\{S_n(z)\}$ が C 上で $S(z)$ に一様収束するとする. (T2) より,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} \int_C f_k(z) dz = \int_C S_n(z) dz \longrightarrow \int_C S(z) dz. \\
&\therefore \quad \sum_{k=0}^{\infty} \int_C f_k(z) dz = \int_C \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)\right) dz. \qquad \text{(q.e.d.)}
\end{aligned} \tag{16}$$

(T5)（項別微分）D を領域とする. D で正則な関数を項に持つ級数 $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ が D で $S(z)$ に広義一様収束するとき, $S(z)$ は D で正則で,

$$S'(z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k(z). \tag{17}$$

[4] $\{S_n(z)\}$ が D で $S(z)$ に一様収束するならば, $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ は D で $S(z)$ に一様収束するという. 広義一様収束についても同様に定める. また $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(z)|$ が D で収束するならば, $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ は D で絶対収束するという. 最後に $\{S_n(z)\}$ が D で発散するならば, $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ は D で発散するという.

右辺はまた D で広義一様収束する.

(∵) $\sum_{k=0}^{n} f_k(z) = S_n(z)$ とし, $\{S_n(z)\}$ が D で $S(z)$ に広義一様収束するとする. $S_n(z)$ は D で正則なので, (T3) より $S(z)$ も D で正則になり,

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k'(z) \longleftarrow \sum_{k=0}^{n} f_k'(z) = S_n'(z) \longrightarrow S'(z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)\right)' \tag{18}$$

を得る. さらに (T3) より, $\{S_n'(z)\}$ は D で $S'(z)$ に広義一様収束する. ゆえに, $\sum_{k=0}^{\infty} f_k'(z)$ は D で $S'(z)$ に広義一様収束する. (q.e.d.)

- 4 -（Weierstrass の判定法）ここでは, 関数項を持つ級数が D で一様収束するための十分条件を与えよう. すなわち, その条件がみたされれば一様収束していると判定できる. まず, 少し一般化した定理を述べる.

(T6) 集合 D においてつねに $|f_k(z)| \leq M_k(z)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ がみたされ, かつ $\sum_{k=0}^{\infty} M_k(z)$ が D で一様収束するとする. このとき, $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ もまた D で一様収束する.

(∵) $\sum_{k=0}^{\infty} M_k(z)$ が D で各点収束しているのは明らかで, $|f_k(z)| \leq M_k(z)$ がみたされているので, 7 章 (T5') により, $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ も D で各点収束する. そこで,

$$\sum_{k=0}^{n} M_k(z) = T_n(z) \to T(z), \qquad \sum_{k=0}^{n} f_k(z) = S_n(z) \to S(z) \tag{19}$$

とおく. $\sum_{k=0}^{\infty} M_k(z)$ が D で一様収束するので, 任意の $\epsilon > 0$ に対し, ある N があって, $n \geq N$ ならば, $\boxed{\text{すべての } z \in D \text{ に対して}}$ $|T_n(z) - T(z)| < \epsilon$. このとき $m > n$ ならば, すべての $z \in D$ に対して,

$$\begin{aligned} |S_m(z) - S_n(z)| &= \left|\textstyle\sum_{k=n+1}^{m} f_k(z)\right| \leq \textstyle\sum_{k=n+1}^{m} |f_k(z)| \leq \textstyle\sum_{k=n+1}^{m} M_k(z) \\ &= |T_m(z) - T_n(z)| \leq |T(z) - T_n(z)| < \epsilon. \end{aligned} \tag{20}$$

ここで $m \to \infty$ とすれば,

$$|S(z) - S_n(z)| < \epsilon. \tag{21}$$

これは $\{S_n(z)\}$ が D で $S(z)$ に一様収束することを示す. (q.e.d.)

(T6) より, 以下の系を得る.

(T6-1) $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(z)|$ が D で一様収束するならば, $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ もまた D で一様収束する.

これは, (T6) において $M_k(z) = |f_k(z)|$ となった特別な場合なのでなりたつ. このように, $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(z)|$ が一様収束することを, $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ が一様に絶対収束するということにする. (T6-1) は, $\boxed{\text{級数が一様に絶対収束すれば, 一様収束する}}$ ということである.

(T6-2)（Weierstrass の判定法）D においてつねに $|f_k(z)| \leq M_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ がみたされ, かつ $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ が収束するとする. このとき, $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ は D で一様に絶対収束する.

これは (T6) において $M_k(z)$ が定数 M_k になった特別な場合なのでなりたつ．この判定法は, 級数が一様に (絶対) 収束することを確認するのによく用いられる．

(note) 集合 D においてつねに $|f_k(z)| \le M_k(z)$ $(k=0,1,2,\ldots)$ がなりたつとき, D において, $\sum_{k=0}^{\infty} M_k(z)$ は $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ の優級数（あるいは $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ は $\sum_{k=0}^{\infty} M_k(z)$ の劣級数）であるという．(T6) は, 優級数が一様収束すれば, 劣級数も一様収束するということに他ならない．

(ex2) $S(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ は, $|z| \le \frac{1}{2}$ で一様収束することを示せ．

(ex3) $C:|z|=\frac{1}{2}$ のとき, $\displaystyle\int_C S(z)dz$ を求めよ．

(ex4) $|z|<1$ において, $S'(z)$ を級数の形で求めよ．

- 5 -（巾級数）関数項を持つ級数の中でも, 巾級数は特に重要である．c を複素数とするとき, c を中心とする巾級数とは,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k \tag{22}$$

の形の級数のことである．ここに a_k は複素数の係数とする．巾級数 (22) が収束するような z からなる集合のことを, (22) の収束域という.[5] それは c を中心とするある円 Γ の内部（および周の一部）であることがわかっている．そのような Γ を収束円といい, その半径 R を収束半径という．($R=0,\infty$ のこともありうる．$R=\infty$ のときは, 収束域は全平面, $R=0$ のときは, 収束域は 1 点 $\{c\}$ のみである.) 重要なことは, Γ の内部においては, (22) は広義一様収束するということであり, したがって (T5) より (22) は Γ の内部で正則で項別微分が可能となる．また Γ の内部にある曲線 C 上で (22) は一様収束するので, (T4) より C 上で項別積分も可能になる．これらの事実を示すために, 次の定理から始める．

(T7) (22) が $z=z_0$ で収束し, $0 \le r < |z_0-c|$ ならば, (22) は $|z-c| \le r$ で一様に絶対収束する．

($\because$) (22) が $z=z_0$ で収束するので, 特に $a_n(z_0-c)^n \to 0$ となる．ゆえに, $\epsilon=1$ に対してある N があって, $n \ge N$ ならば $|a_n(z_0-c)^n|<1$．ここで $\max_{0\le n\le N-1}|a_n(z_0-c)^n| = M_0$, $\max(1,M_0)=M$ とおけば, すべての n に対して $|a_n(z_0-c)^n| \le M$．すなわち $\{a_n(z_0-c)^n\}$ は有界である．そこで $|z_0-c|=s$ とし, $0 \le r < s$ となる r を取る．$|z-c| \le r$ ならば,

$$|a_k(z-c)^k| = |a_k(z_0-c)^k|\frac{|z-c|^k}{|z_0-c|^k} \le M\frac{r^k}{s^k} = M\left(\frac{r}{s}\right)^k. \tag{23}$$

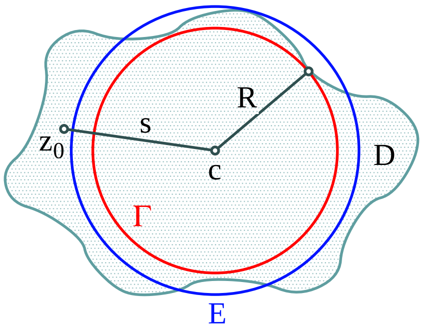
ここで $0 \le \frac{r}{s} < 1$ なので,

$$\sum_{k=0}^{\infty} M\left(\frac{r}{s}\right)^k = M\frac{1}{1-\frac{r}{s}}. \tag{24}$$

[5] 一般に, 関数項を持つ級数 (12) が収束するような z からなる集合のことを, (12) の収束域という．収束域がどのような形になるかは与えられた級数に依存する．

(23),(24) より, Weierstrass の判定法を用いて, (22) は $|z-c| \leq r$ で一様に絶対収束することがわかる. (q.e.d.)

(22) の収束域を D とおく. 明らかに D は c を含む. D の境界と c との距離を R とする. c 中心半径 R の円 Γ を描く. このとき, Γ の内部は D に含まれる. Γ の外部の点 z_0 が D 内にあるならば, (T7) より, c 中心で半径が $s=|z_0-c|$ より少し小さい閉円板 E は収束域に含まれる. しかし E は Γ を内部に含み, Γ 上に D の境界上の点があるはずなので矛盾を生ずる. したがって, Γ の外部の点は D 内にない. これより, $\boxed{D \text{ は } \Gamma \text{ の内部および } \Gamma \text{ の一部からなることになる}}$.



以上で (22) が Γ の内部（および Γ の一部）で収束することがわかった. Γ を (22) の収束円という. 次は (22) が Γ の内部で広義一様収束することを示す. それには Γ の内部に含まれる任意の閉円板 K に対して, (22) が K で一様収束することをいえばよい. c を中心とし, Γ の内部に含まれる閉円板 K_1 で, K を含むものが明らかに存在する. そこで Γ と K_1 に挟まれる部分（境界を除く）から z_0 を取れば, z_0 で (22) は収束する. ゆえに (T7) より, (22) は K_1 で一様収束する. $K \subset K_1$ だから, (22) は K で一様収束する. これで示せた.

(T8) (22) は収束円の内部で広義一様収束し, 外部では発散する.（収束円上では収束することも発散することもある.）

(T4),(T5),(T8) に基づけば, この節の冒頭で述べたように (22) に対して項別積分, 項別微分が可能になる. すなわち,

(T9) C を収束円の内部に含まれる α から β へ向かう曲線とするとき,

$$\int_C \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k\right) dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_C a_k(z-c)^k dz = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{a_k}{k+1}(z-c)^{k+1}\right]_{\alpha}^{\beta}. \tag{25}$$

(T10) (22) は 収束円の内部で項別微分可能で,

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(z-c)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}(z-c)^k. \tag{26}$$

(note) (22) を $f(z)$ とおくと, (T5) より導関数 $f'(z)$（上式中・右辺）はもとの関数 $f(z)$ の収束円 Γ の内部で広義一様収束することがわかるが, その外部では発散することが示せる. 何故ならば, もし外部で収束すれば, 導関数 $f'(z)$ の収束円 Γ' が大きくなり, その

内部で広義一様収束する. そこで Γ' 内の中心 c から z へ向かう単一曲線 C を考えれば, C 上で $f'(z)$ は一様収束するので, (T4) より項別積分して,

$$\begin{aligned}\int_C \left(\sum_{k=1}^{\infty} ka_k(\zeta-c)^{k-1}\right) d\zeta &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_C ka_k(\zeta-c)^{k-1}d\zeta \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k(\zeta-c)^k\right]_c^z = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-c)^k.\end{aligned} \tag{27}$$

これが Γ' 内でつねに収束することになり, 矛盾を生ずる.

- 6 -（巾級数の和と積）(T11) c を中心とする巾級数 (22) および

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-c)^k \tag{28}$$

が与えられ, これらの収束域のうち小さい方を $D : |z-c| < R$ とするとき, (14) より D において次がなりたつ.

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-c)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)(z-c)^k \\ &p(z-c)^l\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k = \sum_{k=0}^{\infty} pa_k(z-c)^{k+l} \\ &\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-c)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m}\right)(z-c)^k\end{aligned} \tag{29}$$

(ex5) 巾級数 (22) を $f(z)$ とおくとき, $(z-c)f''(z) - 3f'(z)$ を巾級数で表せ.

(ans) $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k$ を代入して,

$$\begin{aligned}&(z-c)f''(z) - 3f'(z) \\ =\ & (z-c)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k(z-c)^{k-2} - 3\sum_{k=1}^{\infty} ka_k(z-c)^{k-1} \\ =\ & \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k(z-c)^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty}(-3)ka_k(z-c)^{k-1} \\ =\ & -3a_1 + \sum_{k=2}^{\infty}\left[k(k-1)a_k - 3ka_k\right](z-c)^{k-1} \\ =\ & -3a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-4)a_k(z-c)^{k-1} \\ =\ & -3a_1 + \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)(k-3)a_{k+1}(z-c)^k.\end{aligned} \tag{30}$$

- 7 -（収束半径）(T12) (22) の収束半径 R を求めるのに有用な公式は以下の通りである.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |a_k|^{1/k} \quad (\text{Cauchy–Hadamard の定理}) \\ &\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}; \qquad R = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} \end{aligned} \tag{31}$$

これらは $R = 0, \infty$ のときでもなりたつが, 下の公式については, 右辺が ∞ 以外の発散をするときはなりたたない. 以下簡単のため, $R \neq 0, \infty$ の場合のみ示す.

($\because$) (Cauchy–Hadamard の定理)

$$b_n = \sup_{k\geq n} |a_k|^{1/k}; \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{r} \tag{32}$$

とおく. $0 < s < r$ なる s を取る. $\{b_n\}$ は単調に減少し, 極限値として $\frac{1}{r}$ を持つので, $\epsilon = \frac{1}{s} - \frac{1}{r} > 0$ に対して, ある N があって, $n \geq N$ ならば,

$$\begin{aligned} &b_n - \tfrac{1}{r} = \left|b_n - \tfrac{1}{r}\right| < \tfrac{1}{s} - \tfrac{1}{r}. \qquad \therefore \quad b_N = \tfrac{1}{s_1} < \tfrac{1}{s}. \quad (s < s_1 < r) \\ &\therefore \quad |a_n|^{1/n} \leq \tfrac{1}{s_1}. \end{aligned} \tag{33}$$

ゆえに $|z - c| \leq s$ ならば, $k \geq N$ に対して,

$$\left|a_k(z-c)^k\right| \leq \left(|a_k|^{1/k}\,|z-c|\right)^k \leq \left(\frac{s}{s_1}\right)^k. \tag{34}$$

さらに $\frac{s}{s_1} < 1$ なので, $\sum_{k=N}^{\infty} \left(\frac{s}{s_1}\right)^k = \frac{\left(\frac{s}{s_1}\right)^N}{1-\frac{s}{s_1}}$. したがって Weierstrass の判定法より, $\sum_{k=N}^{\infty} a_k(z-c)^k$ は $|z-c| \leq s$ において一様収束する. ゆえに有限項を追加した (22) もまた $|z-c| \leq s$ で一様収束する.

次に $t > r$ なる t を取る. $\{b_n\}$ が単調に減少し, $b_n \to \frac{1}{r}$ なので, 任意の n に対して,

$$b_n \geq \frac{1}{r}. \tag{35}$$

ゆえに, $\frac{1}{r}$ より小さい $\frac{1}{t}$ に対しては,

$$|a_n|^{1/n} \geq \frac{1}{t_1} > \frac{1}{t} \tag{36}$$

をみたす n が無数に存在する. そのような n および $|z-c| = t$ なる z に対して,

$$\begin{aligned} &|a_n(z-c)^n| = \left(|a_n|^{1/n}\,|z-c|\right)^n \geq \left(\tfrac{t}{t_1}\right)^n. \\ &\therefore \quad a_n(z-c)^n \not\to 0. \end{aligned} \tag{37}$$

したがって, $|z-c| = t$ のとき (22) は発散する. 以上より, $r = R$ である. (q.e.d.)

(∵) (31) 左下: $\lim_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}$ が収束すれば,

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}=\lim_{n\to\infty}b_n \tag{38}$$

を示せばよい. $\lim_{k\to\infty}|a_n|^{1/n}=\alpha$ とする. 任意の $\epsilon>0$ に対して, ある N があって, $n\geq N$ ならば $\left||a_n|^{1/n}-\alpha\right|<\epsilon$ がなりたつ. このとき,

$$|b_n-\alpha|\leq\epsilon<2\epsilon \tag{39}$$

となって, $\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$ を得る. (q.e.d.)

(∵) (31) 右下: $\lim_{k\to\infty}\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}=r$ とおく. $0<s<r<t$ なる s,t を取る. 十分大きい N を取れば, $k\geq N$ のとき, $s<s_1\leq\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}\leq t_1<t$ をみたすので,

$$|a_N|\left(\frac{1}{t_1}\right)^{k-N}\leq|a_k|=|a_N|\frac{|a_{N+1}|}{|a_N|}\frac{|a_{N+2}|}{|a_{N+1}|}\cdots\frac{|a_k|}{|a_{k-1}|}\leq|a_N|\left(\frac{1}{s_1}\right)^{k-N} \tag{40}$$

を得る. これより,

$$\begin{aligned}\left|a_k(z-c)^k\right|&\leq|a_N|s^N\left(\tfrac{s}{s_1}\right)^{k-N}\qquad(|z-c|\leq s)\\ \left|a_k(z-c)^k\right|&\geq|a_N|t^N\left(\tfrac{t}{t_1}\right)^{k-N}\qquad(|z-c|\geq t).\end{aligned} \tag{41}$$

(41) の上の式より, Weierstrass の判定法を用いて, (22) が $|z-c|\leq s$ で一様収束することがわかる. また下の式より, $a_k(z-c)^k\not\to 0$ となり, (22) が $|z-c|\geq t$ で発散することがわかる. 以上より, $r=R$ となる. (q.e.d.)

(ex6) 次の巾級数の収束半径 R を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2-1}{k!}z^k$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3i)^k}{(1+i)^{2k}}(z-c)^k$

9章　Taylor 級数と Laurent 級数

☆☆☆

キーワード: Taylor 級数, Laurent 級数, 微分方程式

- 1 -（Taylor 展開）(T1) 関数 $f(z)$ が c を中心とするある円の内部 D で正則なとき, $f(z)$ を c を中心とする Taylor 級数 (6) に展開することができる．この級数は, 関数 $f(z)$ と中心 c を決めれば 1 通りに決まり, D において広義一様収束する．

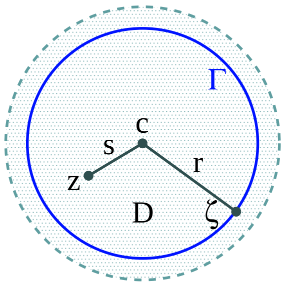


Figure 1

(∵)（展開できること）D 内の任意の点 z を取り固定する．z を内部に含み, c を中心とする D 内の正の向きの円 Γ を取る．Γ の半径を r とする．$|z-c|=s$ とする．明らかに, $s<r$ である．(Figure 1)　ここで, $f(z)$ は Γ 上およびその内部で正則なので, 積分公式 I より,

$$2\pi i f(z)=\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-c-(z-c)}d\zeta=\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-c}\frac{1}{1-\frac{z-c}{\zeta-c}}d\zeta. \tag{1}$$

ここで, $\zeta\in\Gamma$ なので $\left|\frac{z-c}{\zeta-c}\right|=\frac{s}{r}<1$. そこで, 最右辺の積分の中身を級数展開すると,

$$\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-c}\frac{1}{1-\frac{z-c}{\zeta-c}}d\zeta=\int_\Gamma\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{\zeta-c}\left(\frac{z-c}{\zeta-c}\right)^k\right]d\zeta. \tag{2}$$

今, $|f(\zeta)|$ の Γ における最大値を M とすると, 任意の $\zeta\in\Gamma$ に対して,

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta-c}\left(\frac{z-c}{\zeta-c}\right)^k\right|=\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-c|}\left|\frac{z-c}{\zeta-c}\right|^k\le\frac{M}{r}\left(\frac{s}{r}\right)^k \tag{3}$$

であり, また $\frac{s}{r}<1$ なので, 級数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{M}{r}\left(\frac{s}{r}\right)^k$ は $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{M}{r}\left(\frac{s}{r}\right)^k=\frac{M}{r}\frac{1}{1-\frac{s}{r}}$ となって収束する．したがって, Weierstrass の判定法より, (2) 右辺の積分の中身の級数は, Γ 上で

($\zeta \in \Gamma$ に関して）一様収束する．そうなると, (2) 右辺は項別積分可能になるので,

$$\int_\Gamma \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - c}\left(\frac{z-c}{\zeta-c}\right)^k\right] d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - c}\left(\frac{z-c}{\zeta-c}\right)^k d\zeta. \tag{4}$$

この右辺に積分公式 II を適用すれば,

$$(4) = \sum_{k=0}^{\infty} (z-c)^k \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{k+1}} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} (z-c)^k \frac{2\pi i}{k!} f^{(k)}(c). \tag{5}$$

(1), (2), (4), (5) をまとめると, ($2\pi i$ で割って) 以下を得る.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(z-c)^k \tag{6}$$

この級数は Γ の半径に関係なく 1 通りに定まるので, 円の内部 D の任意の点 z に対して同じ式で与えられ, かつ収束することになる．円の内部で収束する巾級数はそこで広義一様収束するので, (6) は D で広義一様収束することがわかる．

（展開の一意性）D において, $f(z)$ の別の展開:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!}(z-c)^k \tag{7}$$

があったとする．これは D で広義一様収束するので項別微分可能で, $n \geq 0$ に対して,

$$\begin{array}{ll} f^{(n)}(z) & = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)a_k}{k!}(z-c)^{k-n} \\ & = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{(k-n)!}(z-c)^{k-n}. \\ \therefore & f^{(n)}(c) = a_n. \\ \therefore & f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(z-c)^k. \end{array} \tag{8}$$

ゆえに展開は一意的である．(q.e.d.)

(6) を ($z=$)c を中心とする $f(z)$ の Taylor 級数といい, このような級数を求めることを, $f(z)$ を $z=c$ で（を中心として）Taylor 展開するという．特に 0 を中心とする Taylor 級数を Maclaurin 級数といい, それを求めることを Maclaurin 展開するという．

(6) の収束域は, c を中心として $f(z)$ が正則な範囲に円形に広がっている．それは特異点を境界に含むまで広がることが可能である．逆に (6) の収束域では, $f(z)$ と Taylor 級数は一致するのが普通である.[1] その場合, (6) の収束域が $f(z)$ の特異点を内部に含むことはない．なぜならば, 収束円の内部では巾級数は正則だからである．こうしてみると, 収束円上には必ず特異点が存在し, 収束半径 R は c とそれに最も近い特異点との距離ということになる．特異点がない, すなわち整関数の場合, 収束域は全平面になり, $R=\infty$ となる．

[1]関数のある点での値を別の値でおきかえたり, 2 つの関数を繋ぎ合わせたような関数では, $f(z)$ と Taylor 級数が, $f(z)$ の特異点より外側で一致しなくなることはありうるが, 通常このような関数は考えない．

(ex1) $f(z) = e^z$ を $z = \pi i$ を中心として Taylor 展開せよ.

(ans) $f'(z) = e^z$, $f''(z) = e^z$, 一般に $f^{(k)}(z) = e^z$. $\therefore$ $f^{(k)}(\pi i) = e^{\pi i} = -1$. $\therefore$ $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{k!}(z - \pi i)^k$.

(ex2) $f(z) = e^z + e^{2z}$ を $z = \frac{\pi i}{2}$ を中心として Taylor 展開せよ.

(ans) $f'(z) = e^z + 2e^{2z}$, $f''(z) = e^z + 2^2 e^{2z}$, 一般に $f^{(k)}(z) = e^z + 2^k e^{2z}$. $\therefore$ $f^{(k)}(\frac{\pi i}{2}) = e^{\frac{\pi i}{2}} + 2^k e^{2\frac{\pi i}{2}} = i - 2^k$. $\therefore$ $e^z + e^{2z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i-2^k}{k!}(z - \frac{\pi i}{2})^k$.

(ex3) $f(z) = \cos 3z$ を $z = \pi$ を中心として Taylor 展開せよ.

(ans) $f'(z) = -3\sin 3z$, $f''(z) = -3^2 \cos 3z$, $f'''(z) = 3^3 \sin 3z$, $f^{(4)}(z) = 3^4 \cos 3z$. 一般に $f^{(2m)}(z) = (-1)^m 3^{2m} \cos 3z$ $(m \geq 0)$, $f^{(2m+1)}(z) = (-1)^{m+1} 3^{2m+1} \sin 3z$ $(m \geq 0)$. $\therefore$ $f^{(2m)}(\pi) = (-1)^m 3^{2m} \cos 3\pi = (-1)^{m+1} 3^{2m}$, $f^{(2m+1)}(\pi) = 0$. $\therefore$ $\cos 3z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} 3^{2m}}{(2m)!}(z - \pi)^{2m}$.

(ex4) 次を示せ.

$$(1)\ e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}. \quad (2)\ \cos z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m}. \quad (3)\ \sin z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1}.$$

- 2 -（Laurent 展開）(T2) c を定点, T, R $(0 \leq T < R)$ を定数とする. 関数 $f(z)$ が円環領域（真ん中に穴のあいた開円板）$D : T < |z - c| < R$ において正則なとき, $f(z)$ を D において, c を中心とする Laurent 級数 (15) に展開することができる. この級数は, D において広義一様収束する. 一般に Laurent 級数は, 関数 $f(z)$ とそれを展開する領域を決めれば 1 通りに決定する.

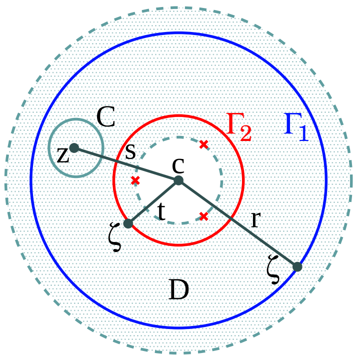


Figure 2

($\because$)（展開できること）D 内の任意の点 z を取り固定する. $|z - c| = s$ とする. 正数 r, t を, $T < t < s < r < R$ をみたすように取り, 2 つの円: $\Gamma_1 : |\zeta - c| = r$, $\Gamma_2 : |\zeta - c| = t$ を描く. ただし向きは正とする. このとき明らかに, Γ_1 と Γ_2 の間に挟まれた部分 E（境界は含まない）内に z がある. E 内に, z を内部に含む正の向きの単一閉曲線 C を取る. (Figure 2) $f(z)$ は C 上およびその内部で正則なので, 積分公式 I より,

$$2\pi i f(z) = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{9}$$

また, $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ は ζ の関数として, Γ_1, Γ_2, C で挟まれた部分とその境界上で正則なので, 積分定理 II より,

$$\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{10}$$

(9), (10) より,

$$2\pi i f(z)=\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{11}$$

ここで, 右辺第 1 項については, Taylor 展開の証明と全く同様にして,

$$\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{k=0}^{\infty}(z-c)^k\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{k+1}}d\zeta \tag{12}$$

を得る. ただし, Γ_2 内で $f(z)$ が正則ではないので, これ以上変形できない.

次に, (11) 右辺第 2 項について考える.

$$-\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_{\Gamma_2}\frac{-f(\zeta)}{\zeta-c-(z-c)}d\zeta=\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{z-c}\frac{1}{1-\frac{\zeta-c}{z-c}}d\zeta \tag{13}$$

ここで, $\zeta\in\Gamma_2$ なので $\left|\frac{\zeta-c}{z-c}\right|=\frac{t}{s}<1.$ それゆえ, やはり Taylor 展開のときと同様にして積分の中身を展開し, Weierstrass の判定法を適用すれば, 項別積分できて,

$$\begin{aligned}(13)\quad &=\int_{\Gamma_2}\left[\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{z-c}\left(\frac{\zeta-c}{z-c}\right)^k\right]d\zeta=\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\Gamma_2}f(\zeta)\frac{(\zeta-c)^k}{(z-c)^{k+1}}d\zeta\\ &=\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(z-c)^k}\int_{\Gamma_2}f(\zeta)(\zeta-c)^{k-1}d\zeta\end{aligned} \tag{14}$$

を得る. (11) — (14) より, ($2\pi i$ で割って) 以下を得る.

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-c)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{-k}}{(z-c)^k} \tag{15}$$

ただし,

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{k+1}}d\zeta,\quad a_{-k}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}f(\zeta)(\zeta-c)^{k-1}d\zeta. \tag{16}$$

ここで, c を中心とし, Γ_1 と Γ_2 の間にある円を 1 つ固定して Γ とおけば, 積分定理 II より,

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{k+1}}d\zeta=\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{k+1}}d\zeta\\ &\int_{\Gamma_2}f(\zeta)(\zeta-c)^{k-1}d\zeta=\int_{\Gamma}f(\zeta)(\zeta-c)^{k-1}d\zeta.\end{aligned} \tag{17}$$

ゆえに, (15) は実は Γ_1, Γ_2 によらず一定の係数を持つことがわかる. z は D 内の任意の点だったので, D で収束する展開 (15) が得られたことになる.

(15) は 2 つの級数の和とみなせるが, 初めの級数は巾級数なので開円板 $|z-c|<R$ で収束し, それは広義一様収束になる. 2 番目の級数は $\frac{1}{z-c}=\tilde{z}$ とおけばやはり巾級数になって $|\tilde{z}|=\frac{1}{|z-c|}<\frac{1}{T}$ で収束するので, $|\tilde{z}|=\frac{1}{|z-c|}\leq\frac{1}{t}<\frac{1}{T}$ では一様収束する. ゆえに $|z-c|\geq t>T$ で一様収束する. これより $|z-c|>T$ で広義一様収束することがわかる. ゆえに (15) は $T<|z-c|<R$, すなわち D で広義一様収束する.[2]

（展開の一意性）D において $f(z)$ の展開 (15) があったとする. 前述の Γ 上では (15) の 2 つの級数は共に一様収束するので, 整数 m に対して $(z-c)^m$ を掛けた

$$(z-c)^m f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-c)^{k+m}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{-k}}{(z-c)^{k-m}} \tag{18}$$

の 2 つの級数もまた Γ 上で一様収束する. そこで両辺を Γ 上で積分すると, 右辺は項別積分できて,

$$\int_\Gamma (z-c)^m f(z)dz=\sum_{k=0}^{\infty}\int_\Gamma a_k(z-c)^{k+m}dz+\sum_{k=1}^{\infty}\int_\Gamma \frac{a_{-k}}{(z-c)^{k-m}}dz. \tag{19}$$

ところが積分定理 I と積分公式 II を使うとほとんどすべての積分が 0 になり, 唯一残るのが,

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \frac{a_{-m-1}}{z-c}dz&=2\pi i a_{-m-1}.\\ \therefore\quad a_{-m-1}&=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (z-c)^m f(z)dz\end{aligned} \tag{20}$$

となってすべての係数が 1 通りに決定する. (q.e.d.)

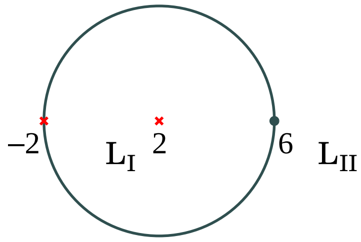
(15) の形の $f(z)$ の展開を, $(z=)c$ を中心とする $f(z)$ の Laurent 級数といい, このような級数を求めることを, $f(z)$ を $z=c$ で（を中心として）Laurent 展開するという. (15) 右辺第 2 項のことを, この Laurent 級数の主部という.

Taylor 級数とは異なり, Laurent 級数は, 関数の高次導関数を求めても決定できない. また, 中心 c が与えられても, 収束域が複数個に分かれている場合は, その中のどの収束域で展開するかで級数の形が変わってくるので, 注意する必要がある. 収束域の境界には必ず特異点が存在し, 収束域内部には特異点は存在しない.

(ex5) (1) $f(z)=\frac{4}{z^2-4}$ の $z=2$ を中心とする Laurent 級数をすべて求め, 各々の収束域を図示せよ. (2) $f(z)=\frac{3z-3}{(z+1)(z-5)}$ の $z=2$ を中心とする Taylor 級数および Laurent 級数を求め, 各々の収束域を図示せよ.

[2] (15) が（広義一様）収束するとは, (15) の 2 つの級数が共に（広義一様）収束することと考える.

(ans) (1) $f(z)$ の特異点は $z=\pm 2$ なので, Laurent 級数の収束域は, 以下のように L_I, L_{II} に分裂することがわかる.

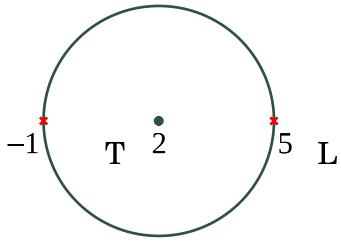


$f(z)$ を部分分数分解して, $\frac{4}{z^2-4}=\frac{4}{(z-2)(z+2)}=\frac{a}{z-2}+\frac{b}{z+2}$. $a(z+2)+b(z-2)=4$ より, $a=1$, $b=-1$. $\therefore$ $f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z+2}$.

(i) $f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2+4}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{z-2}{-4}}=\frac{1}{z-2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1}{4}\frac{(z-2)^k}{(-4)^k}=\frac{1}{z-2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-2)^k}{(-4)^{k+1}}$. $(0<|z-2|<4)$ (すなわち, $z\in L_I$)

(ii) $f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2+4}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2}\frac{1}{1-\frac{-4}{z-2}}=\frac{1}{z-2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1}{z-2}\frac{(-4)^k}{(z-2)^k}=\frac{1}{z-2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-(-4)^k}{(z-2)^{k+1}}=\frac{1}{z-2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-(-4)^{k-1}}{(z-2)^k}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{-(-4)^{k-1}}{(z-2)^k}$. $(|z-2|>4)$ (すなわち, $z\in L_{II}$)

(2) $f(z)$ の特異点は $z=5,-1$ なので, 以下の円の内部 T が Taylor 級数の収束域で, 円の外部 L が Laurent 級数の収束域である.



$f(z)$ を部分分数分解して, $\frac{3z-3}{(z+1)(z-5)}=\frac{a}{z+1}+\frac{b}{z-5}$. $a(z-5)+b(z+1)=3z-3$ より, $a=1$, $b=2$. $\therefore$ $f(z)=\frac{1}{z+1}+\frac{2}{z-5}$.

(i) (Taylor 級数) $f(z)=\frac{1}{z-2+3}+\frac{2}{z-2-3}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z-2}{-3}}+\frac{2}{-3}\frac{1}{1-\frac{z-2}{3}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3}\frac{(z-2)^k}{(-3)^k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{-3}\frac{(z-2)^k}{3^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k-2}{3^{k+1}}(z-2)^k$. $(|z-2|<3)$ (すなわち, $z\in T$)

(ii) (Laurent 級数) $f(z)=\frac{1}{z-2+3}+\frac{2}{z-2-3}=\frac{1}{z-2}\frac{1}{1-\frac{-3}{z-2}}+\frac{2}{z-2}\frac{1}{1-\frac{3}{z-2}}=$
$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z-2}\frac{(-3)^k}{(z-2)^k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{z-2}\frac{3^k}{(z-2)^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-3)^k}{(z-2)^{k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\cdot 3^k}{(z-2)^{k+1}}=$
$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-3)^{k-1}}{(z-2)^k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\cdot 3^{k-1}}{(z-2)^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-3)^{k-1}+2\cdot 3^{k-1}}{(z-2)^k}$. $(|z-2|>3)$ (すなわち, $z\in L$)

- 3 -（微分方程式の巾級数解）簡単な微分方程式について, 正則な関数の解を求めるのに, 予め巾級数の解を想定して係数を決定することがよく行われる．ここでは具体例でその方法を考えてみる．

(ex6) 次の微分方程式をみたす 0 を中心とする巾級数 $f(z)$ を求めよ．ただし c は複素数の定数とする．

(1) $zf''(z) - zf'(z) + 5f(z) = 0.$
(2) $zf''(z) + (1 + cz^2)f'(z) + 2czf(z) = 0.$
(3) $z^2 f'''(z) + 3zf''(z) + f'(z) + cf(z) = 0.$

(ans) (1) 巾級数を $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ とおいて微分方程式に代入する．その際項別微分ができることに注意して,

$$\begin{aligned}
zf''(z) - zf'(z) + 5f(z) &= z\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k z^{k-2} - z\sum_{k=1}^{\infty} ka_k z^{k-1} + 5\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k z^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} ka_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} 5a_k z^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)a_{k+1} z^k - \sum_{k=1}^{\infty} ka_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} 5a_k z^k \\
&= 5a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[k(k+1)a_{k+1} - (k-5)a_k\right] z^k = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

ゆえに,（z^k の係数）$= 0$ から漸化式: $a_{k+1} = \frac{k-5}{k(k+1)}a_k$ $(k \geq 1)$, $a_0 = 0$ を得る．ゆえに順次漸化式に代入して, $a_2 = -2a_1$, $a_3 = a_1$, $a_4 = -\frac{1}{6}a_1$, $a_5 = \frac{1}{120}a_1$．また $k \geq 6$ に対しては $a_k = 0$. $\therefore$ $f(z) = a_1\left(z - 2z^2 + z^3 - \frac{1}{6}z^4 + \frac{1}{120}z^5\right)$.

(2) 巾級数を $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ とおいて微分方程式に代入する．項別微分ができて,

$$\begin{aligned}
&zf''(z) + (1 + cz^2)f'(z) + 2czf(z) \\
&= z\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k z^{k-2} + (1 + cz^2)\sum_{k=1}^{\infty} ka_k z^{k-1} + 2cz\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k z^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} ka_k z^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} cka_k z^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} 2ca_k z^{k+1} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k z^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} ka_k z^{k-1} + \sum_{k=3}^{\infty} c(k-2)a_{k-2} z^{k-1} \\
&\quad + \sum_{k=2}^{\infty} 2ca_{k-2} z^{k-1} \\
&= a_1 + (4a_2 + 2ca_0)z + \sum_{k=3}^{\infty} \left(k^2 a_k + cka_{k-2}\right) z^{k-1} = 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

ゆえに, (z^{k-1} の係数) $= 0$ から漸化式: (i) $a_k = -\frac{c}{k}a_{k-2}$ $(k \geq 3)$, (ii) $a_1 = 0$, (iii) $a_2 = -\frac{c}{2}a_0$ を得る. (i) より $k \geq 3$ に対して,

$$a_k = -\frac{c}{k}a_{k-2} = \frac{(-c)(-c)}{k(k-2)}a_{k-4} = \cdots. \tag{23}$$

これと (ii) より, k が奇数のとき, $a_k = 0$.

次に, $k = 2m$ $(m \geq 2)$ のとき, (i),(iii) より,

$$\begin{aligned} a_{2m} &= -\tfrac{c}{2m}a_{2m-2} = \tfrac{(-c)(-c)}{2m(2m-2)}a_{2m-4} = \cdots = \tfrac{(-c)(-c)\dots(-c)}{2m(2m-2)\dots(2\cdot 2)}a_2 \\ &= \tfrac{(-c)^{m-1}}{2^{m-1}m!}a_2 = \tfrac{(-c)^m}{2^m m!}a_0. \\ \therefore\ f(z) &= a_0 - \frac{c}{2}a_0z^2 + \sum_{m=2}^{\infty}\frac{(-c)^m}{2^m m!}a_0z^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-c)^m}{2^m m!}a_0z^{2m}. \end{aligned} \tag{24}$$

(note) (2) の巾級数解において $t = -\frac{cz^2}{2}$ とおけば, $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}a_0t^m = a_0e^t = a_0e^{-\frac{cz^2}{2}}$ であることがわかる.

(3) 巾級数を $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ とおいて微分方程式に代入する. 項別微分ができて,

$$\begin{aligned} &z^2f'''(z) + 3zf''(z) + f'(z) + cf(z) \\ &= z^2\sum_{k=3}^{\infty}k(k-1)(k-2)a_kz^{k-3} + 3z\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kz^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty}ka_kz^{k-1} + c\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k \\ &= \sum_{k=3}^{\infty}k(k-1)(k-2)a_kz^{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty}3k(k-1)a_kz^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty}ka_kz^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty}ca_{k-1}z^{k-1} \\ &= (a_1 + ca_0) + (8a_2 + ca_1)z \\ &\quad + \sum_{k=3}^{\infty}\left[k(k-1)(k-2)a_k + 3k(k-1)a_k + ka_k + ca_{k-1}\right]z^{k-1} \\ &= (a_1 + ca_0) + (8a_2 + ca_1)z + \sum_{k=3}^{\infty}\left(k^3a_k + ca_{k-1}\right)z^{k-1} = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

ゆえに, (z^{k-1} の係数) $= 0$ から漸化式: (i) $a_k = -\frac{c}{k^3}a_{k-1}$ $(k \geq 3)$, (ii) $a_1 = -ca_0$, (iii) $a_2 = -\frac{c}{8}a_1$ を得る. (ii),(iii) より, $a_2 = \frac{c^2}{8}a_0$. さらに (i) より, $k \geq 3$ に対して,

$$\begin{aligned} a_k &= \tfrac{-c}{k^3}a_{k-1} = \tfrac{(-c)(-c)}{k^3(k-1)^3}a_{k-2} = \cdots = \tfrac{(-c)(-c)\dots(-c)}{k^3(k-1)^3\dots 3^3}a_2 \\ &= \tfrac{(-c)^{k-2}}{k^3(k-1)^3\dots 3^3}a_2 = \tfrac{(-c)^k}{k^3(k-1)^3\dots 3^3 2^3}a_0 = \tfrac{(-c)^k}{(k!)^3}a_0. \\ \therefore\ f(z) &= a_0 - ca_0z + \frac{c^2}{8}a_0z^2 + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-c)^k}{(k!)^3}a_0z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-c)^k}{(k!)^3}a_0z^k. \end{aligned} \tag{26}$$

10章　特異点と留数定理

☆5☆

キーワード: 特異点, 極, 真性特異点, 0 点, 留数定理, 特殊な定積分

- 1 -（特異点）関数 $f(z)$ が正則でない点 $z=c$ を $f(z)$ の特異点といい, このとき $f(z)$ は点 c に特異点を持つなどという. 特に, 特異点 c の適当な近傍（c を中心とするある円の内部）から c を除いた領域で $f(z)$ が正則なとき, c を $f(z)$ の孤立特異点という. 以後特に断りのない限り, 特異点は孤立特異点とする. 正則関数 $f(z)$ が点 c に特異点を持ち, 領域 $D : 0 < |z-c| < R$ で正則とする. このとき $f(z)$ は D において c を中心とする Laurent 級数に展開される:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z-c)^k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c)^k. \tag{1}$$

この展開を, $\boxed{f(z) \text{ の } c \text{ のまわりの Laurent 級数}}$ と呼ぶことにする. (1) の収束域 D は c と隣接しているため, (1) 右辺, 特にその主部には特異点 c の情報が含まれていると考えられる. 今主部を少しかきかえて,

$$f(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{(z-c)^k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c)^k \quad (b_m \neq 0) \tag{2}$$

としてみる. m は 0 でない b_k の中の最大の番号 k である. 0 でない b_k が無数にあれば, $m=\infty$ と考える. m が有限のとき, c を $f(z)$ の m 位の極という. $m=\infty$ のとき, c を $f(z)$ の真性特異点という.

　m が有限のとき,

$$\begin{aligned} & f(z) = \tfrac{1}{(z-c)^m} \textstyle\sum_{k=1}^{m} b_k (z-c)^{m-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c)^k \\ & \therefore \quad f(z) \longrightarrow \infty \qquad (z \to c) \end{aligned} \tag{3}$$

となり, 極において $f(z)$ は ∞ に発散しているとみられる. しかし $m=\infty$ のときは, $f(z)$ は真性特異点 c の近傍で激しく振動し, $z \to c$ のときの極限値を持たない（∞ にもならない）ことが知られている.

　(3) において, $(z-c)^m f(z)$ を考えれば,

$$\begin{aligned} (z-c)^m f(z) \quad & = \textstyle\sum_{k=1}^{m} b_k (z-c)^{m-k} + (z-c)^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c)^k \\ & \longrightarrow b_m \neq 0 \qquad (z \to c) \end{aligned} \tag{4}$$

となる. 逆に, c が $f(z)$ の極であり,

$$(z-c)^m f(z) \longrightarrow b_m \neq 0 \qquad (z \to c) \tag{5}$$

とする．このとき $(z-c)^m f(z)$ を c のまわりで Laurent 展開すると主部がなくなるはずである．（でなければ, $(z-c)^m f(z) \to \infty$.） ゆえに,

$$(z-c)^m f(z) = b_m + b_{m-1}(z-c) + \cdots + b_1(z-c)^{m-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c)^{m+k}. \qquad (6)$$

ここで両辺を $(z-c)^m$ で割れば, (2) の形になる．したがって, 極 c の位数が m であるためには, (5) が必要十分である．これにより極の位数を求められる．

(ex1) $\frac{3}{z(z-3)^2}$ の $z=3$ のまわりの Laurent 級数を求めよ．$z=3$ はどんな特異点か.

(ex2) $e^{1/z}$ の $z=0$ のまわりの Laurent 級数を求めよ．$z=0$ はどんな特異点か.

- 2 -（0 点, γ 点）$f(z)=0$ となる点 z を $f(z)$ の 0 点という．より一般には, 複素数 γ に対して, $f(z)=\gamma$ となる点 z を $f(z)$ の γ 点という．$f(z)$ が c で正則で, c が $f(z)$ の 0 点ならば, ある $m \geq 1$ があって,

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-c)^k \qquad (a_m \neq 0) \qquad (7)$$

とかける．このとき c を $f(z)$ の m 位の 0 点という．Taylor 展開を考えれば, 明らかに (7) は次と同値である.

$$f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(m-1)}(c) = 0, \quad f^{(m)}(c) \neq 0 \qquad (8)$$

(7) がなりたてば,

$$\frac{f(z)}{(z-c)^m} = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-c)^{k-m} \longrightarrow a_m \neq 0 \qquad (z \to c) \qquad (9)$$

であり, 逆に c で正則な $f(z)$ が

$$\frac{f(z)}{(z-c)^m} \longrightarrow a_m \neq 0 \qquad (z \to c) \qquad (10)$$

をみたすならば, Taylor 展開 (9) から (7) を得る．したがって, c が m 位の 0 点であるためには, (10) が必要十分である.

今 $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ ならば,

$$\frac{f(z)}{(z-c)^m} \longrightarrow a_m \neq 0 \iff (z-c)^m g(z) \longrightarrow b_m \neq 0. \qquad (z \to c) \qquad (11)$$

すなわち, $f(z)$ の m 位の 0 点は, $g(z)$ の m 位の極であり, 同様に, $f(z)$ の m 位の極は, $g(z)$ の m 位の 0 点となることがわかる．ただし $f(z)$ の真性特異点は, $g(z)$ の真性特異点になる.

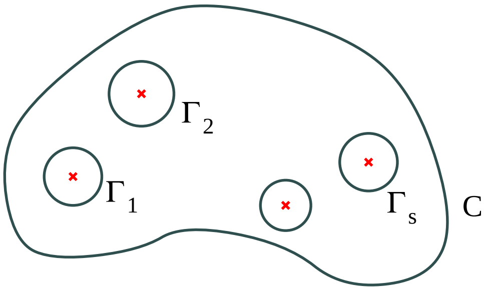
$f(z)$	m 位の 0 点	m 位の極	真性特異点
$1/f(z)$	m 位の極	m 位の 0 点	真性特異点

(ex3) $z(z-3)^2$ の 0 点とその位数を求めよ.

- 3 -（留数定理）留数定理は複素積分を計算する上で非常によく用いられる大切な定理である. c を $f(z)$ の特異点として, $f(z)$ の c のまわりの Laurent 級数を (1) とする. このとき係数 b_1 を $f(z)$ の c における留数といい, $\operatorname*{Res}_{z=c} f(z)$ または $\mathrm{Res}(c)$ とかく.

(T1)（留数定理）C を正の向きの単一閉曲線とし, $f(z)$ は C 上, および C 内から有限個の特異点 $c_1, \ldots, c_s$ を除いた部分で正則とする. このとき,

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{s} \mathrm{Res}(c_k). \tag{12}$$



(∵) $k = 1, \ldots, s$ に対して c_k を中心とする十分小さい円 Γ_k をかけば, 積分定理 II が使えて,

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{s} \int_{\Gamma_k} f(z)dz. \tag{13}$$

$c_1 = c$ とおき, c のまわりの Laurent 級数を (1) とすると, その収束域 D_1 で (1) は広義一様収束し, Γ_1 は D_1 に含まれるので, (1) は Γ_1 上で一様収束する. ゆえに (1) は Γ_1 上で項別積分可能で,

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Gamma_1} \frac{b_k}{(z-c)^k} dz + \int_{\Gamma_1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c)^k \right) dz. \tag{14}$$

ここで, 右辺最後の積分は Γ_1 上とその内部で正則な関数の積分なので, 積分定理 I より 0 となる. 初めの級数については, 定数関数 $g_k(z) = b_k$ に積分公式 II を適用して,

$$\int_{\Gamma_1} \frac{b_k}{(z-c)^k} dz = \frac{2\pi i}{(k-1)!} g_k^{(k-1)}(c) = \begin{cases} 2\pi i\, b_1 & (k=1) \\ 0 & (k \geq 2) \end{cases} \tag{15}$$

すなわち,

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = 2\pi i\, b_1 = 2\pi i \mathrm{Res}(c_1). \tag{16}$$

他の Γ_k 上の積分も同様なので, (13) より (12) を得る. (q.e.d.)

留数については, その定義より明らかに次の性質（ある意味での線形性）を持っている. $f(z), g(z)$ が $z = \alpha$ に特異点を持つとし, c を定数とするとき,

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha} (f(z) + g(z)) = \operatorname*{Res}_{z=\alpha} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\alpha} g(z); \quad \operatorname*{Res}_{z=\alpha} (cf(z)) = c \operatorname*{Res}_{z=\alpha} f(z). \tag{17}$$

- 4 -（留数の求め方）$f(z)$ の c のまわりの Laurent 級数が有限の m に対して (2) で与えられるとき, c における留数を求めよう．それには一旦 (2) の分母を払ったのち微分を繰り返して b_1 を取り出せばよい．すなわち,

$$\begin{aligned}(z-c)^m f(z) &= \textstyle\sum_{k=1}^m b_k (z-c)^{m-k} + \sum_{k=0}^\infty a_k (z-c)^{m+k}.\\ \therefore\quad [(z-c)^m f(z)]^{(m-1)} &= (m-1)!\, b_1\\ &\quad + \textstyle\sum_{k=0}^\infty (m+k)(m+k-1)\ldots(k+2) a_k (z-c)^{k+1}.\\ \therefore\quad \tfrac{1}{(m-1)!}[(z-c)^m f(z)]^{(m-1)} &\longrightarrow b_1. \qquad (z\to c)\end{aligned} \tag{18}$$

(T2) c が $f(z)$ の m 位の極のとき,

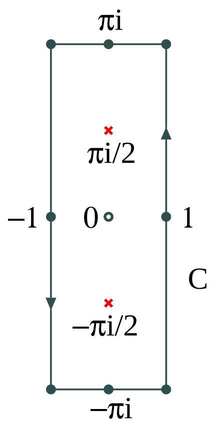
$$\mathrm{Res}(c) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to c}[(z-c)^m f(z)]^{(m-1)}. \tag{19}$$

この公式で $m=1$ かつ $f(z)=\frac{h(z)}{g(z)}$ ($g(c)=0$, $g'(c)\neq 0$; すなわち c は $g(z)$ の 1 位の 0 点) とかけるとき,

$$(z-c)\frac{h(z)}{g(z)} = \frac{h(z)}{\frac{g(z)-g(c)}{z-c}} \longrightarrow \frac{h(c)}{g'(c)} = \mathrm{Res}(c). \qquad (z\to c) \tag{20}$$

を得る．

(ex4) C を 4 点 $\pm 1 \pm \pi i$ を頂点とする正の向きの長方形とするとき, $\int_C \frac{1-e^z}{1+e^{2z}}dz$ を求めよ．



(ans) $1+e^{2z}=0$ より, $2z=\log(-1)=(2n+1)\pi i$, $z=\frac{2n+1}{2}\pi i$. よって, C 内にある特異点は $\pm\frac{\pi}{2}i$ である．

$$\mathrm{Res}\left(\tfrac{\pi}{2}i\right) = \left[\tfrac{1-e^z}{(1+e^{2z})'}\right]_{z=\frac{\pi}{2}i} = \left[\tfrac{1-e^z}{2e^{2z}}\right]_{z=\frac{\pi}{2}i} = \tfrac{1-i}{2(-1)} = \tfrac{-1+i}{2}.$$

$$\mathrm{Res}\left(-\tfrac{\pi}{2}i\right) = \left[\tfrac{1-e^z}{(1+e^{2z})'}\right]_{z=-\frac{\pi}{2}i} = \left[\tfrac{1-e^z}{2e^{2z}}\right]_{z=-\frac{\pi}{2}i} = \tfrac{1-(-i)}{2(-1)} = \tfrac{-1-i}{2}.$$

$$\therefore\quad \int_C \tfrac{1-e^z}{1+e^{2z}}dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}\left(\tfrac{\pi}{2}i\right)+\mathrm{Res}\left(-\tfrac{\pi}{2}i\right)\right) = 2\pi i\left(\tfrac{-1+i}{2}+\tfrac{-1-i}{2}\right) = \boxed{-2\pi i}. \tag{21}$$

- 5 -（留数定理の, ある種の定積分への応用）留数定理は, 閉曲線上の複素積分だけでなく, 実軸上の無限積分など, 特殊な定積分へ応用することができる. 以下, $f(z,w)$ は 2 変数の複素関数, $f(z)$ は全平面から有限個の点を除いた領域で正則であるとする. また, 単一閉曲線の向きはすべて正とする.

I: C を単位円とする. $C: z=e^{i\theta}$ $(0\leq\theta\leq 2\pi)$ と表示すると, 左辺の被積分関数が C 上で連続ならば,

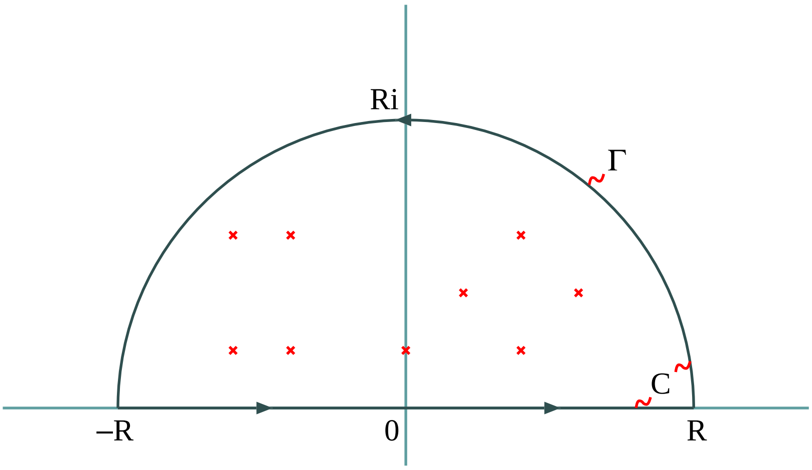
$$\begin{aligned}&\int_C f\left(\tfrac{z+z^{-1}}{2},\tfrac{z-z^{-1}}{2i}\right)\tfrac{1}{iz}dz=\int_0^{2\pi} f\left(\cos\theta,\sin\theta\right)\frac{\left(e^{i\theta}\right)'}{ie^{i\theta}}d\theta\\&=\int_0^{2\pi} f\left(\cos\theta,\sin\theta\right)d\theta\end{aligned}\tag{22}$$

を得る. したがって, 右辺を左辺の積分で計算できることになる. そこで, 左辺の被積分関数が C 上で正則で, C 内に有限個の特異点を持つときは, 留数定理より,

$$\int_0^{2\pi} f\left(\cos\theta,\sin\theta\right)d\theta=2\pi i\sum_{|\alpha|<1}\operatorname*{Res}_{z=\alpha}\left[f\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{1}{iz}\right]\tag{23}$$

を得る.

II: $f(z)$ は $\mathbf{R}$ 上正則で, $z\to\infty$ のとき $zf(z)\to 0$ とする. C を図のような原点中心半径 R の半円形の閉曲線とする. また R から $-R$ へ向かう円弧の部分を Γ とおく.



R を十分大きく取れば, 上半平面[1] にある $f(z)$ の特異点をすべて C 内に収めることができる. このとき留数定理より,

$$\int_C f(z)dz=\int_{-R}^{R} f(x)dx+\int_\Gamma f(z)dz=2\pi i\sum_{\operatorname{Im}\alpha>0}\operatorname*{Res}_{z=\alpha} f(z).\tag{24}$$

ここで, $z\to\infty$ のとき $zf(z)\to 0$ なので, 任意の $\epsilon>0$ に対して, ある $R'>0$ が存在し, $|z|>R'$ ならば $|zf(z)|<\epsilon$. ゆえに $R>R'$ とすれば, 積分の評価式より,

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right|=\left|\int_\Gamma zf(z)\frac{1}{z}dz\right|<\epsilon\cdot\frac{1}{R}\cdot\pi R=\pi\epsilon.\tag{25}$$

[1] 複素平面の中で, 実軸より上の部分を上半平面, 実軸より下の部分を下半平面という.

すなわち $R\to\infty$ のとき, $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz\to 0$ となる. したがって, (24) において $R\to\infty$ とすれば,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,\alpha>0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha} f(z) \tag{26}$$

を得る. ここで, 積分路 C を円の下半分にしてみると, 全く同様の手順により,

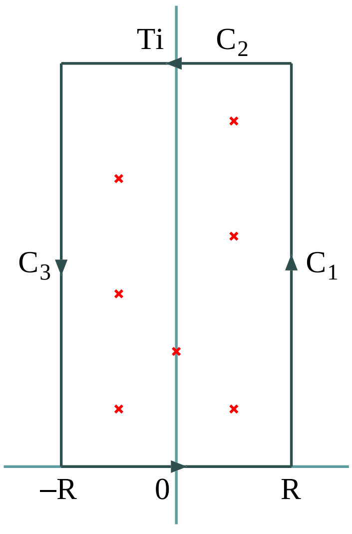
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,\alpha<0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha} f(z) \tag{27}$$

が得られる. 以上, $f(z)$ の前提条件として, 特異点が有限個であることを仮定していたが, 実は (26) では上半平面に有限個, (27) では下半平面に有限個の仮定で十分である.

III: 正数 b に対して関数 $f(z)e^{ibz}$ を考える. ただし, $f(z)$ は $\mathbf{R}$ 上正則で, $z\to\infty$ のとき $f(z)\to 0$ をみたすものとする. 正数 R,T に対して, 4 点 $\pm R$, $\pm R+Ti$ を頂点とする長方形を C とする. C を図のように, 実軸部分と C_1, C_2, C_3 の 4 辺に分ける. R,T を十分大きく取れば, 上半平面にある $f(z)e^{ibz}$ の特異点をすべて C 内に収めることができるので, 留数定理より,

$$\int_C f(z)e^{ibz}dz = \int_{-R}^{R} f(x)e^{ibx}dx + \sum_{k=1}^{3}\int_{C_k} f(z)e^{ibz}dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,\alpha>0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha}\left(f(z)e^{ibz}\right) \tag{28}$$

を得る.



ここで, $z\to\infty$ のとき $f(z)\to 0$ なので, 任意の $\epsilon>0$ に対して, ある $R'>0$ が存在し, $|z|>R'$ ならば $|f(z)|<\epsilon$. ゆえに $R'<R\le T$ とすれば, C_k $(k=1,2,3)$ 上で, $|f(z)|<\epsilon$. このとき積分の評価式より,

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_1} f(z)e^{ibz}dz\right| &\le \int_{C_1}|f(z)||e^{ibz}||dz| < \int_{C_1}\epsilon|e^{ibz}||dz| = \epsilon\int_0^T |e^{ib(R+ti)}||i|dt \\ &= \epsilon\int_0^T e^{-bt}dt = \epsilon\left[-\frac{e^{-bt}}{b}\right]_0^T = \epsilon\left(\frac{1}{b}-\frac{e^{-bT}}{b}\right) < \frac{\epsilon}{b}.\end{aligned} \tag{29}$$

同様にして, $\left|\int_{C_3} f(z)e^{ibz}dz\right| < \frac{\epsilon}{b}$ を得る. 同じく積分の評価式より,

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_2} f(z)e^{ibz}dz\right| &\leq \int_{C_2} |f(z)||e^{ibz}||dz| < \int_{C_2} \epsilon|e^{ibz}||dz| = \epsilon\int_{-R}^{R} |e^{ib(t+Ti)}|dt \\ &= \epsilon\int_{-R}^{R} e^{-bT}dt = 2\epsilon Re^{-bT}.\end{aligned} \tag{30}$$

ここで, R はそのままに T を十分大きく取ると, $2\epsilon Re^{-bT} \leq \frac{\epsilon}{b}$. このとき,

$$\left|\sum_{k=1}^{3} \int_{C_k} f(z)e^{ibz}dz\right| \leq \sum_{k=1}^{3} \left|\int_{C_k} f(z)e^{ibz}dz\right| < \frac{3\epsilon}{b}. \tag{31}$$

このことと (28) より,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)e^{ibx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ibx}dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,\alpha>0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha} \left(f(z)e^{ibz}\right). \tag{32}$$

IIIc: 今 III において $f(z)$ がさらに偶関数, すなわち $f(-z) = f(z)$ をみたすとすると,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ibx}dx &= \int_{\infty}^{0} f(-y)e^{-iby}(-1)dy + \int_{0}^{\infty} f(x)e^{ibx}dx \quad (x = -y) \\ &= \int_{0}^{\infty} f(x)e^{-ibx}dx + \int_{0}^{\infty} f(x)e^{ibx}dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\cos bx dx. \\ \therefore \quad &\int_{0}^{\infty} f(x)\cos bx dx = \pi i \sum_{\mathrm{Im}\,\alpha>0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha} \left(f(z)e^{ibz}\right).\end{aligned} \tag{33}$$

IIIs: また III において $f(z)$ がさらに奇関数, すなわち $f(-z) = -f(z)$ をみたすとすると,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ibx}dx &= \int_{\infty}^{0} f(-y)e^{-iby}(-1)dy + \int_{0}^{\infty} f(x)e^{ibx}dx \quad (x = -y) \\ &= \int_{0}^{\infty} -f(x)e^{-ibx}dx + \int_{0}^{\infty} f(x)e^{ibx}dx = 2i\int_{0}^{\infty} f(x)\sin bx dx. \\ \therefore \quad &\int_{0}^{\infty} f(x)\sin bx dx = \pi \sum_{\mathrm{Im}\,\alpha>0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha} \left(f(z)e^{ibz}\right).\end{aligned} \tag{34}$$

III′: III と同じ条件 ($f(z)$ は $\mathbf{R}$ 上正則で $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, $b > 0$) で関数 $f(z)e^{-ibt}$ を考え, 積分路 C として 4 点 $\pm R$, $\pm R - Ti$ を頂点とする長方形を採用すれば, III と同様にして以下を得る.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ibx}dx = -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,\alpha<0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha} \left(f(z)e^{-ibz}\right) \tag{35}$$

III から IIIc, IIIs を導いたのと同様に, III′ から III′c, III′s を導けば以下を得る.

III′c: III′ において $f(z)$ が偶関数のとき,

$$\int_0^\infty f(x)\cos bx dx = -\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,\alpha<0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha}\left(f(z)e^{-ibz}\right). \tag{36}$$

III′s: III′ において $f(z)$ が奇関数のとき,

$$\int_0^\infty f(x)\sin bx dx = \pi \sum_{\mathrm{Im}\,\alpha<0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha}\left(f(z)e^{-ibz}\right). \tag{37}$$

III と III′ を用いれば, $f(z)$ に偶関数, 奇関数の条件をつけなくても以下の公式を得る.

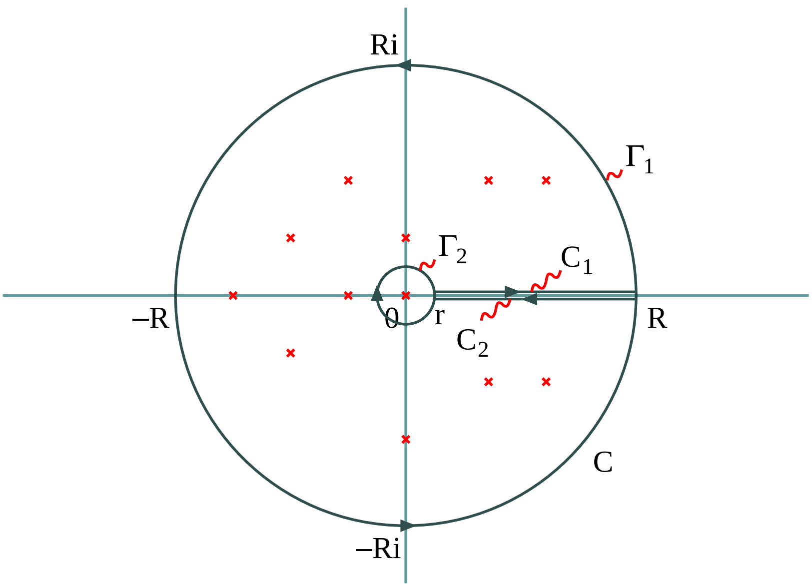
III*c: $f(z)$ は $\mathbf{R}$ 上正則で, $z \to 0$ のとき $f(z) \to 0$, かつ $b>0$ のとき,

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos bx dx = \pi i \sum_{\mathrm{Im}\,\alpha>0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha}\left(f(z)e^{ibz}\right) - \pi i \sum_{\mathrm{Im}\,\alpha<0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha}\left(f(z)e^{-ibz}\right). \tag{38}$$

III*s: $f(z)$ は $\mathbf{R}$ 上正則で, $z \to 0$ のとき $f(z) \to 0$, かつ $b>0$ のとき,

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\sin bx dx = \pi \sum_{\mathrm{Im}\,\alpha>0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha}\left(f(z)e^{ibz}\right) + \pi \sum_{\mathrm{Im}\,\alpha<0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha}\left(f(z)e^{-ibz}\right). \tag{39}$$

IV: $f(z)$ は $\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x>0\}$ 上正則で, $z=0$ で正則か 1 位の極を持ち, $z \to \infty$ のとき $z^2 f(z)$ が有界であるとする. a を $0<a<1$ をみたす定数とする. このとき, 関数 $f(z)z^a$ を考える. 図のような, 原点中心の大小 2 つの円を実軸上の線分で繋いだ閉曲線を C とおく.



一般に $f(z)z^a$ は多価であるが, まず C_1 上で主値を与え, 連続関数として $f(z)z^a$ を C 上で積分する. このとき, $f(x)x^a$ は C_2 上では C_1 上と比べて $e^{2a\pi i}$ 倍の値を持つ. なぜならば,

$$\begin{aligned} f(x)x^a = f(x)e^{a\mathrm{Log}\,x} \xrightarrow{C_1}\xrightarrow{\Gamma_1} \quad & f(z)z^a = f(z)e^{a(\mathrm{Log}\,|z|+i\arg z)} \\ \xrightarrow{\Gamma_1}\xrightarrow{C_2} \quad & f(x)e^{a(\mathrm{Log}\,x+2\pi i)} = e^{2a\pi i}f(x)x^a \end{aligned} \tag{40}$$

だからである. さて, C は単一閉曲線ではないが, この場合は明らかに留数定理がなりたち, R を十分大, $r>0$ を十分小とすれば, $f(z)z^a$ の 0 を除くすべての特異点を C の "内部" に収めることができるので,

$$\begin{aligned}\int_C f(z)z^a dz &= \int_r^R f(x)x^a dx + \int_{\Gamma_1} f(z)z^a dz - \int_r^R e^{2a\pi i} f(x)x^a dx + \int_{\Gamma_2} f(z)z^a dz \\ &= 2\pi i \sum_{\alpha\neq 0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha}\left(f(z)z^a\right)\end{aligned} \tag{41}$$

を得る. ここで $z\to\infty$ のとき $z^2f(z)$ が有界だったので, $R', M>0$ が存在し, $|z|\geq R' \Rightarrow |z^2f(z)|\leq M$ がなりたつ. 円 Γ_1 の半径 R が $R\geq R'$ をみたすとすると, 積分の評価式より,

$$\left|\int_{\Gamma_1} f(z)z^a dz\right| = \left|\int_{\Gamma_1} z^2 f(z) z^{a-2} dz\right| \leq MR^{a-2}\cdot 2\pi R = 2\pi MR^{a-1}. \tag{42}$$

$0<a<1$ だから, $R\to\infty$ のとき $\displaystyle\int_{\Gamma_1} f(z)z^a dz \to 0$ となる.

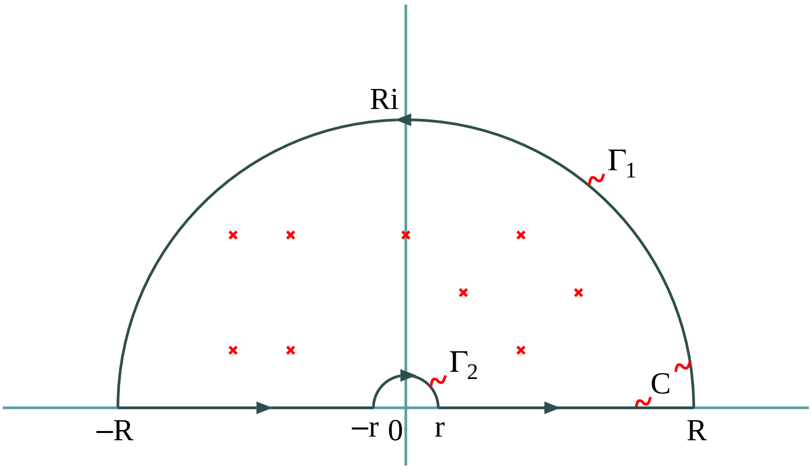
一方 $f(z)$ は $z=0$ で高々1 位の極を持つので, $r', N>0$ が存在して, $|z|\leq r' \Rightarrow |f(z)|\leq N/|z|$ がなりたつ. 円 Γ_2 の半径 r が $r\leq r'$ をみたすとすると, 再度積分の評価式より,

$$\left|\int_{\Gamma_2} f(z)z^a dz\right| \leq \frac{N}{r} r^a \cdot 2\pi r = 2\pi N r^a. \tag{43}$$

ゆえに, $r\to 0$ のとき $\displaystyle\int_{\Gamma_2} f(z)z^a dz\to 0$ となる. 以上より, (41) において $R\to\infty, r\to 0$ とすれば以下を得る.

$$\begin{aligned}&(1-e^{2a\pi i})\int_0^\infty f(x)x^a dx = 2\pi i \sum_{\alpha\neq 0}\operatorname*{Res}_{z=\alpha}\left(f(z)z^a\right). \\ &\therefore\ \int_0^\infty f(x)x^a dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2a\pi i}} \sum_{\alpha\neq 0}\operatorname*{Res}_{z=\alpha}\left(f(z)z^a\right).\end{aligned} \tag{44}$$

V: $f(z)$ は $\mathbf{R}$ 上正則で偶関数であり, $z \to \infty$ のとき $z^2 f(z)$ が有界とする. このとき, 関数 $f(z)\mathrm{Log}\, z$ を考える. C を図のような半円状の閉曲線とし, 大小の半円の半径をそれぞれ R, r とする.



R を十分大, $r > 0$ を十分小とすれば, 上半平面にある $f(z)\mathrm{Log}\, z$ の特異点をすべて C 内に収めることができるので, 留数定理より,

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\mathrm{Log}\, z dz \quad &= \int_r^R f(x)\mathrm{Log}\, x dx + \int_{-R}^{-r} f(x)\left(\mathrm{Log}\,(-x) + i\pi\right) dx \\
&\quad + \int_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{Log}\, z dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\mathrm{Log}\, z dz \\
&= 2\int_r^R f(x)\mathrm{Log}\, x dx + i\pi \int_r^R f(x) dx + \int_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{Log}\, z dz \\
&\quad + \int_{\Gamma_2} f(z)\mathrm{Log}\, z dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,\alpha > 0} \mathop{\mathrm{Res}}_{z=\alpha}\left(f(z)\mathrm{Log}\, z\right)
\end{aligned} \tag{45}$$

を得る. ここで IV と同様, $R', M > 0$ が存在し, $|z| \geq R' \ \Rightarrow\ |z^2 f(z)| \leq M$ がなりたつので, 半円 Γ_1 の半径 R が $R \geq R'$ をみたすとすると, 積分の評価式より,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{Log}\, z dz\right| \quad &= \left|\int_{\Gamma_1} z^2 f(z) z^{-2}\mathrm{Log}\, z dz\right| \leq MR^{-2}\left|\mathrm{Log}\, R + i\pi\right| \cdot \pi R \\
&\leq \pi M R^{-1}\left(|\mathrm{Log}\, R| + \pi\right).
\end{aligned} \tag{46}$$

これより, $R \to \infty$ のとき $\displaystyle\int_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{Log}\, z dz \to 0$ となる.

一方 $f(z)$ は $\mathbf{R}$ 上, したがって特に $z = 0$ で正則なので, $r', N > 0$ が存在して, $|z| \leq r' \ \Rightarrow\ |f(z)| \leq N$ がなりたつ. 半円 Γ_2 の半径 r が $r \leq r'$ をみたすとすると, もう一度積分の評価式より,

$$\left|\int_{\Gamma_2} f(z)\mathrm{Log}\, z dz\right| \leq N\left(|\mathrm{Log}\, r| + \pi\right) \cdot \pi r. \tag{47}$$

ゆえに, $r \to 0$ のとき $\displaystyle\int_{\Gamma_2} f(z)\mathrm{Log}\, z dz \to 0$ となる．以上より, (45) において $R \to \infty$, $r \to 0$ とすれば,

$$
\begin{aligned}
&2\int_0^\infty f(x)\mathrm{Log}\, x dx + i\pi\int_0^\infty f(x)dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,\alpha>0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha} (f(z)\mathrm{Log}\, z)\,. \\
&\therefore\ \int_0^\infty f(x)\mathrm{Log}\, x dx = \pi i \sum_{\mathrm{Im}\,\alpha>0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha} (f(z)\mathrm{Log}\, z) - \frac{\pi i}{2}\int_0^\infty f(x)dx.
\end{aligned}
\tag{48}
$$

ここで, $f(z)$ が偶関数で II の条件をみたすので, 結局

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty f(x)\mathrm{Log}\, x dx &= \pi i \sum_{\mathrm{Im}\,\alpha>0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha} (f(z)\mathrm{Log}\, z) - \frac{\pi i}{2}\cdot\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,\alpha>0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha}\ f(z) \\
&= \pi i \sum_{\mathrm{Im}\,\alpha>0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha} \left[f(z)\left(\mathrm{Log}\, z - \tfrac{\pi i}{2}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{49}
$$

を得る．

V′: V と同じ条件で積分路 C' を V の C と x 軸に関して対称になるように取れば, V と同様の議論ができて, 次を得る．

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty f(x)\mathrm{Log}\, x dx &= -\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,\alpha<0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha} (f(z)\mathrm{Log}\, z) + \frac{\pi i}{2}\int_0^\infty f(x)dx \\
&= -\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,\alpha<0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha} (f(z)\mathrm{Log}\, z) + \frac{\pi i}{2}\cdot(-\pi i) \sum_{\mathrm{Im}\,\alpha<0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha}\ f(z) \\
&= -\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,\alpha<0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha} \left[f(z)\left(\mathrm{Log}\, z + \tfrac{\pi i}{2}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{50}
$$

(note) III と III′ は（特定の条件の下で）実変数複素数値関数 $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ の Fourier 変換 $\hat{f}$ を求めることに応用できる．ここで, Fourier 変換は次で定義される．

$$
\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-itx}dx \qquad (t \in \mathbf{R}) \tag{51}
$$

あるいはまた, III と III′ は $\hat{f}$ の Fourier 逆変換 f を求めることにも応用できる．ただし,

$$
f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \hat{f}(t)e^{itx}dt \qquad (x \in \mathbf{R}) \tag{52}
$$

である．

なお, 偶関数の Fourier 変換は偶関数であり, 奇関数の Fourier 変換は奇関数なので, $f(z)$ が偶関数（または奇関数）のときは $t > 0$ か $t < 0$ のどちらかの場合を計算したのちに $\hat{f}(t) = \hat{f}(-t)$（または $f(t) = -\hat{f}(-t)$）を用いて他の場合を導ける．Fourier 逆変換のときも同様.

(ex5) 次の積分を求めよ．ただし，(3),(4) では $a, b > 0$, (5) では $0 < a < 1$ とする．

$$(1)\ \int_0^{2\pi} \frac{5+4\sin\theta}{5+4\cos\theta}d\theta \quad \left(\tfrac{10}{3}\pi\right) \qquad (2)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2)}dx \quad [(\sqrt{2}-1)\pi]$$

$$(3)\ \int_0^{\infty} \frac{x\sin bx}{x^2+a^2}dx \quad \left(\tfrac{e^{-ab}}{2}\pi\right) \qquad (4)\ \int_0^{\infty} \frac{x\cos bx}{x^2+a^2}dx \quad \left(\tfrac{e^{-ab}}{2a}\pi\right)$$

$$(5)\ \int_0^{\infty} \frac{x^a}{(x+1)(x+2)}dx \quad \left(\tfrac{(2^a-1)\pi}{\sin a\pi}\right) \qquad (6)\ \int_0^{\infty} \frac{4\,\mathrm{Log}\,x}{4+z^2}dx \quad (-i\mathrm{Log}\,2)$$

(ex6) 偶関数の Fourier 変換は偶関数であり，奇関数の Fourier 変換は奇関数であることを示せ．

(ex7) 留数を利用して，以下の関数 $f(x)$ の Fourier 変換 $\hat{f}(t)$ を求めよ．ただし $a > 0$ とする．

$$(1)\ \frac{1}{x^2+a^2} \quad \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a|t|}}{a}\right) \qquad (2)^2\ \frac{x}{x^2+a^2} \quad \left(-\mathrm{sgn}(t)i\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a|t|}\right)$$

[2] $\mathrm{sgn}(t) = 1\ (t > 0),\ 0\ (t = 0),\ -1\ (t < 0)$ と定義する．

11章　偏角の原理とRouchéの定理

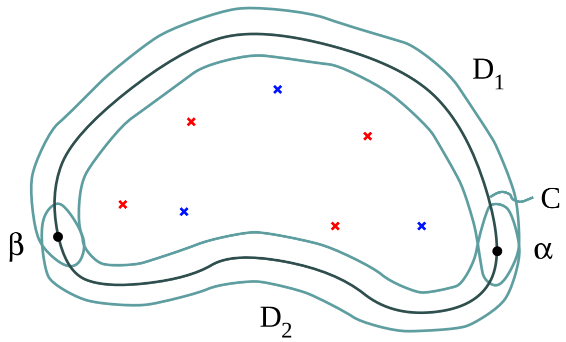
☆☆

キーワード: 偏角の原理, Rouché の定理, 0 点と極の数

- 1 -（偏角の原理）留数定理を応用することで, 0 点, 極の数と関数の w 平面上での挙動の関係を知ることができる．ここでは, ある領域における $f(z)$ の 0 点の数をその領域にある 0 点の位数の和とし, 極の数も同様に極の位数の和と考えることにする．C を閉曲線とする．$f(z)$ は C 上では正則かつ 0 点を持たないとする．z が C 上を 1 周動くとき, $w = f(z)$ が w 平面上で 0 の周りを回る回数を $f(z)$ の 0 のまわりの回転数といい, 記号で $R(f)$ と表すことにする．ただし, 負の向きに回るときは回転数は $-$ で考える．

(T1)（偏角の原理）C を正の向きの単一閉曲線とする．$f(z)$ を C 上では正則かつ 0 点を持たない関数で, C の内部では, 有限個の極以外は正則かつ有限個の 0 点を持つものとする．C 内の 0 点の数を N, 極の数を P とする．このとき,

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i R(f) = 2\pi i(N - P). \tag{1}$$



(∵) 図のように, C に沿った 2 つの単連結領域 D_1, D_2 をとり, それらが $f(z)$ の 0 点, 極を含まず, さらに $D_1 \cup D_2$ で C を覆うことができる．D_1 内で $\frac{f'(z)}{f(z)}$ は正則なので, C に沿った α から β へ向かう曲線 C_1 上の積分は,

$$\int_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = [\log f(z)]_\alpha^\beta = \log f(\beta) - \log f(\alpha) \tag{2}$$

と表される．ここに, $\log f(z)$ は多価であるが, そのうちの適当な値を選ぶものとする．一旦 $\log f(\alpha)$ を決めれば, $\log f(\beta)$ は z が C_1 に沿って動いたときに連続的に変化して得られた値となる．すなわち, (2) は z が C_1 を動いたときの $\log f(z)$ の変化である．同様にして, C に沿った β から α へ向かう曲線 C_2 上の積分は z が C_2 を動いたときの $\log f(z)$ の変化である．したがって,

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \boxed{z \text{ が } C \text{ を 1 周回ったときの } \log f(z) \text{ の変化}} \tag{3}$$

である．ところが $\log f(z) = \mathrm{Log}\,|f(z)| + i\arg f(z)$ に注意すると, z が C を回ったとき, $\mathrm{Log}\,|f(z)|$ はもとの値に戻ってしまうので結局は変化なしとなり, $i\arg f(z)$ については,

$$\boxed{i\arg f(z) \text{ の変化}} = 2\pi i \cdot \boxed{f(z) \text{ の } 0 \text{ のまわりの回転数}} = 2\pi i R(f) \tag{4}$$

となる．これより (1) の左の等号を得る．

次に (1) 左辺を留数を用いて計算する．$\frac{f'(z)}{f(z)}$ の C 内の特異点は, $f(z)$ の C 内の 0 点か極である．そこでそれらの点における留数を求める．$f(z)$ の m 位の 0 点 c を中心として,

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-c)^k \qquad (a_m \neq 0) \tag{5}$$

と Taylor 展開されているとすると,

$$\begin{aligned} (z-c)\frac{f'(z)}{f(z)} &= (z-c)\frac{\sum_{k=m}^{\infty} k a_k (z-c)^{k-1}}{\sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-c)^k} = \frac{\sum_{k=m}^{\infty} k a_k (z-c)^{k-m}}{\sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-c)^{k-m}}. \\ \therefore \quad \operatorname*{Res}_{z=c}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) &= \frac{m a_m}{a_m} = m. \end{aligned} \tag{6}$$

また, $f(z)$ の m 位の極 s のまわりで

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z-s)^k \qquad (a_{-m} \neq 0) \tag{7}$$

と Laurent 展開されているならば,

$$\begin{aligned} (z-s)\frac{f'(z)}{f(z)} &= (z-s)\frac{\sum_{k=-m}^{\infty} k a_k (z-s)^{k-1}}{\sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z-s)^k} = \frac{\sum_{k=-m}^{\infty} k a_k (z-s)^{k+m}}{\sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z-s)^{k+m}}. \\ \therefore \quad \operatorname*{Res}_{z=s}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) &= \frac{-m a_{-m}}{a_{-m}} = -m. \end{aligned} \tag{8}$$

こうして

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \cdot \boxed{0 \text{ 点の位数の和} - \text{極の位数の和}} = 2\pi i (N-P). \tag{9}$$

これで (1) が示せた．(q.e.d.)

- 2 -（Rouché の定理）(T2) C を単一閉曲線とする．$f(z)$, $g(z)$ を C 上では正則かつ 0 点を持たない関数で, C の内部では, 有限個の極以外は正則かつ有限個の 0 点を持つものとする．さらに C 上で $|f(z)-g(z)| < |f(z)|$ をみたすものとする．$f(z)$ の C 内の 0 点の数を N_f, 極の数を P_f とし, N_g, P_g も同様とすると,

$$N_f - P_f = N_g - P_g. \tag{10}$$

(∵) 偏角の原理より, $N_f - P_f = N_g - P_g$ を示すには,

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int_C \frac{g'(z)}{g(z)}dz \tag{11}$$

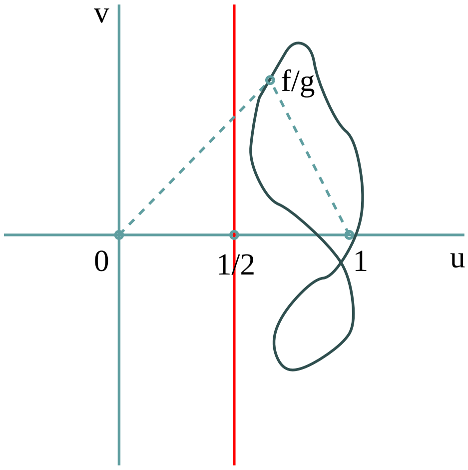
を示せば十分である.

$$\begin{aligned}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz - \int_C \frac{g'(z)}{g(z)}dz &= \int_C \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{f(z)g(z)}dz \\ &= \int_C \frac{\left(f'(z)g(z) - f(z)g'(z)\right)/(g(z))^2}{f(z)/g(z)}dz \\ &= \int_C \frac{\left(f(z)/g(z)\right)'}{f(z)/g(z)}dz\end{aligned} \tag{12}$$

$\frac{f(z)}{g(z)}$ は偏角の原理の条件をみたすので,

$$\int_C \frac{\left(f(z)/g(z)\right)'}{f(z)/g(z)}dz = 2\pi i R(f/g). \tag{13}$$

ところが仮定より, C 上では $\frac{|f(z)-g(z)|}{|g(z)|} < \frac{|f(z)|}{|g(z)|}$. ゆえに $\left|\frac{f(z)}{g(z)} - 1\right| < \left|\frac{f(z)}{g(z)}\right|$. このとき $\frac{f(z)}{g(z)}$ は w 平面上でかならず 0 よりも 1 に近い点に存在するので, つねに直線 $u = \frac{1}{2}$ の右側にある. よって z が C 上を 1 周動いても, $\frac{f(z)}{g(z)}$ は 0 の周りを回ることはない. ゆえに (13) 右辺は 0 となって, (11) を示せた. (q.e.d.)



(ex1) $g(z) = z^5 + 2z^3 - 12$ は $|z| < 2$ においていくつの 0 点を持つか？

(ex2) $g(z) = z^5 + 9z^2 + \frac{7}{z}$ は $|z| < 2$ においていくつの 0 点を持つか？

留数をつかった定積分の計算

型	積分の形	求め方	$f(z)$ の条件
I	$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$	$z = e^{i\theta}$で変数変換 $d\theta \to \frac{dz}{iz}$, $\lvert z\rvert = 1$ で積分	変数変換後, 単位円周上に特異点がないこと.
II	$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$	$\displaystyle 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}\alpha>0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha} f(z)$ or $\displaystyle -2\pi i \sum_{\operatorname{Im}\alpha<0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha} f(z)$	$\mathbf{R}$ 上正則, $z \to \infty$ のとき $zf(z) \to 0$.
III	$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ibx}dx$	$\displaystyle 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}\alpha>0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha} (f(z)e^{ibz})$	$\mathbf{R}$ 上正則, $z \to \infty$ のとき $f(z) \to 0$.
IIIc	$\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\cos bx dx$	$\displaystyle \pi i \sum_{\operatorname{Im}\alpha>0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha} (f(z)e^{ibz})$	$\mathbf{R}$ 上正則で偶関数, かつ $z \to \infty$ のとき $f(z) \to 0$.
IIIs	$\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\sin bx dx$	$\displaystyle \pi \sum_{\operatorname{Im}\alpha>0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha} (f(z)e^{ibz})$	$\mathbf{R}$ 上正則で奇関数, かつ $z \to \infty$ のとき $f(z) \to 0$.
III′	$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ibx}dx$	$\displaystyle -2\pi i \sum_{\operatorname{Im}\alpha<0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha} (f(z)e^{-ibz})$	$\mathbf{R}$ 上正則, $z \to \infty$ のとき $f(z) \to 0$.
IV	$\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)x^a dx$	$\displaystyle \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi ai}} \sum_{\alpha\neq 0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha} (f(z)z^a)$	$\mathbf{R}^+$ 上正則で $z = 0$ で正則か 1 位の極を持ち, $z \to \infty$ のとき $\lvert z^2 f(z)\rvert$ が有界.
V	$\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\operatorname{Log} x dx$	$\displaystyle \pi i \sum_{\operatorname{Im}\alpha>0} \operatorname*{Res}_{z=\alpha} (f(z)\operatorname{Log} z)$ $\displaystyle -\frac{\pi i}{2}\int_0^{\infty} f(x)dx$	$\mathbf{R}$ 上正則で偶関数, かつ $z \to \infty$ のとき $\lvert z^2 f(z)\rvert$ が有界.

ただし，$0 < a < 1$，$b > 0$ とする．
$\mathbf{R}^+$ は，正の実数全体の集合を意味する．