線 形 代 数　演 習　(K. Asai)

1. 空間内の 3 点 $P(1,-2,3)$, $Q(4,-4,1)$, $R(1,0,2)$ がある．以下の問いに答えよ．
 (1) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{RS}$ となるような点 S を求めよ．
 (2) $\triangle PQR$ の重心 G を求めよ．（重心の位置ベクトルの公式は用いてよい．）
 (3) $\triangle QRS$ の重心を H とするとき, $\overrightarrow{GH}$ を求めよ．

1.1* 空間内の 4 点 O,A,B,C を頂点とする四面体 $O-ABC$ がある．各頂点からそれに向かい合う面の重心に至る線分を描くとき, これら 4 つの線分は 1 点で交わることを示せ.（この点を四面体の重心という.）（各面の重心を求める公式は用いてよい.）

2. k を実数とし $\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c}$ を空間ベクトルとするとき, 次の式を示せ.

(1) $|(\mathtt{a},\mathtt{b})|\le||\mathtt{a}||\cdot||\mathtt{b}||$　(2) $||\mathtt{a}+\mathtt{b}||^2-||\mathtt{a}-\mathtt{b}||^2=4(\mathtt{a},\mathtt{b})$
(3) $||k\mathtt{a}||=|k|\,||\mathtt{a}||$　(4) $||\mathtt{a}+\mathtt{b}||\le||\mathtt{a}||+||\mathtt{b}||$
(5) $||\mathtt{a}+\mathtt{b}+\mathtt{c}||^2-||\mathtt{a}||^2-||\mathtt{b}||^2-||\mathtt{c}||^2=2[(\mathtt{a},\mathtt{b})+(\mathtt{b},\mathtt{c})+(\mathtt{c},\mathtt{a})]$

3. 次のベクトルは線形独立か.

$$(1)\ \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}\qquad(2)\ \begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

4. $\mathtt{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\mathtt{b}=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix},\mathtt{c}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ のとき, 次のベクトルを $\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c}$ の線形結合で表せ.

$$(1)\ \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\qquad(2)\ \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\qquad(3)\ \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\qquad(4)\ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

4.1 $\mathtt{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\mathtt{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\mathtt{c}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ のとき $\mathtt{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ を $\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c}$ の線形結合で表せ.

5. 次の平面上の直線 (1), 空間内の直線 (2),(3) のベクトル表示を求めよ.

(1) $9x+4y=5$　(2) $-x-3=2y=z$　(3) $4x+3=6y+5=-2z+1$

6. 空間内の直線：$\begin{cases}x+y-2z=5\\x-y+3z=1\end{cases}$ のベクトル表示を求めよ.

7. 2 つの平面 $-x+2y-5z=8$, $-2x-y+3z=19$ の交角を θ とするとき, $\sin\theta$ を求めよ．（平面の交角とは, 平面の法線ベクトルのなす角であり, 法線ベクトルの向きの取り方を変えると交角 θ として 2 つの値がでるが, $\sin\theta$ はただひとつに定まるので心配ない.）

8. 次のベクトル表示で表された平面または直線を表す方程式を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

9. 次の平面の方程式をベクトル表示に書き改めよ.

(1) $x + 2y - z = 3.$ (2) $3x + 2y + z = 0.$
(3) $5x - 8z = 25.$

10. 次の計算をせよ.

(1) $\begin{pmatrix} 5 & 15 & 10 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

(3) BA

11.* 2 つの空間ベクトル $\mathtt{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\mathtt{a}' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ の張る平行四辺形の面積 S は, この平行四辺形の, xy,yz,zx 平面への正射影の面積 S_1, S_2, S_3 を用いて, $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$ と表される. これを示せ.

12. V^3 の線型変換 T を次のように定めるとき, $T = T_A$ をみたす行列 A を求めよ. また, (1),(3) については A^n を求めよ.

$$(1)\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

$$(2)\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x-2y+3z \\ 3x+5y-2z \\ -2x+3y+5z \end{pmatrix}$$

$$(3)\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y-z \\ -x+2y-z \\ -x-y+2z \end{pmatrix}$$

13. V^3 の線型変換 T, S を次のように定めるとき, (1) $ST = T_A$ をみたす行列 A を求めよ. (2) $TS = T_B$ をみたす行列 B を求めよ.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-2y-3z \\ x+2y+2z \\ 2x-y-3z \end{pmatrix}, \qquad S\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-2y+z \\ x-2y+2z \\ 2x+2y-z \end{pmatrix}$$

14. 3 次行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ を取る. 次の直線 l または平面 S が T_A によって移される図形 l', S' を方程式で表せ. ただし, (5) の d は実定数とする.

(1) $\dfrac{x}{3} = -y-2 = \dfrac{z+1}{2}$　　(2) $-\dfrac{x+2}{10} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-3}{12}$

(3) $3x+y-4z=2$　　(4) $2x-3y+3z=3$

(5) $y-z=d$

15. 3 次行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ を取る. 次の直線 l または平面 S が T_A によって移される図形 l', S' を方程式で表せ.

(1) $2x = -y = 3z$　　(2) $5x+2y+6z=0$

16. 3 次行列 $A = k\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を取る. 任意の実定数 d に対して, 平面 S_d : $x+y+z=d$ が T_A によってまた S_d に移されるとき, k を求めよ.

17. (1) x-y 平面上で, 各点を直線 $l: y=2x$ に関して対称な点に移す線型変換を表す行列を A とする. A を求めよ.

(2) $y = mx$ のときはどうか.

18. (1) A, B を 2 次または 3 次の正方行列とするとき, $|AB| = |A||B|$ を示せ.

(2) A を 2 次または 3 次の正方行列とするとき, $|A| = |{}^tA|$ を示せ.

19. 行列 A, B は, $AB = BA$ がなりたつとき可換であるといわれる. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ と可換な行列 $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ をすべて求めよ.

20. 次の等式を証明せよ.

$$(1)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = -(x-y)(x-z)(y-z)$$

$$(2)\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$$

ただし $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$. （1 の原始 3 乗根のうちの 1 つ）

21. $\mathtt{x} = (1, 2, \ldots, n)$, $\mathtt{y} = (1, t, \ldots, t^{n-1})$ のとき, 次の行列を求めよ.

$$(1)\ \mathtt{x}{}^t\mathtt{y} \qquad (2)\ {}^t\mathtt{x}\mathtt{y} \qquad (3)\ \mathtt{x}{}^t\mathtt{x} \qquad (4)\ {}^t\mathtt{y}\mathtt{y} \qquad (5)\ {}^t\mathtt{x}\mathtt{y}{}^t({}^t\mathtt{x}\mathtt{y})$$

21.1 $\mathtt{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\mathtt{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ のとき, $({}^t\mathtt{ab})^n$ を求めよ.

22. 区分けを利用して次の計算をせよ. ただし, A は正則な 2 次行列, E は 2 次単位行列とする.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(3)\ \begin{pmatrix} A & -E \\ E & A^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & E-A^{-1} & -E \\ -E & E+A & -A \end{pmatrix}$$

23.* A, B がそれぞれ (l, m) 型, (m, n) 型行列のとき, ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ を示せ.

24. 対称区分けされた行列 $A = \begin{pmatrix} P & Q \\ O & S \end{pmatrix}$ において, P は r 次行列, S は s 次行列とする. このとき, A が正則となるための必要十分条件は P と S が正則なことである. これを示せ. （逆行列を持つ行列を正則という）（ただし, 正方行列 M に対して X が存在して $MX = E$ または $XM = E$ のどちらか一方がなりたてば M は正則になるという定理は既知とする.）

25.* $\Theta_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とする. このとき, 区分けを利用して次を計算せよ.

$$\begin{pmatrix} (\cos\alpha)\ \Theta_\theta & (-\sin\alpha)\ \Theta_\theta \\ (\sin\alpha)\ \Theta_\theta & (\cos\alpha)\ \Theta_\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\cos\beta)\ \Theta_\phi & (-\sin\beta)\ \Theta_\phi \\ (\sin\beta)\ \Theta_\phi & (\cos\beta)\ \Theta_\phi \end{pmatrix}$$

(Θ は θ の大文字)

26. 基本変形を繰り返して次の行列を $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ の形に変形し, その階数を求めよ. ただし x は実数とする.

(1) $\begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} x & & O & 1 \\ & x & & 1 \\ O & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & x \end{pmatrix}$ (n 次行列, $n \geq 2$)

27. 次の行列の逆行列を求めよ. ただし A, B は正則とする.

(1) $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -4 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} E & A \\ B & O \end{pmatrix}$

28. 次の行列 $(A \quad E)$ を行に関して変形し, A が正則であれば, A の逆行列を求めよ. ただし a, b は $|a| \neq |b|$ をみたす実数とする.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 7 & -8 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (4)* $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

29. A, B を正則な n 次行列とするとき, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ となることを示せ.

30. A を正則な n 次行列とするとき, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ となることを示せ.

31.* $n \geq 2$ とする. n 次行列 $\begin{pmatrix} 1 & x & x & \dots & x \\ x & 1 & x & \dots & x \\ x & x & 1 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & 1 \end{pmatrix}$ の階数を次のようにして求めよ.

(1) ある列（たとえば n 列）に残りの列をすべて加える.

(2) 場合分けした上, n 列の定数倍を各列に加えて, 以下うまく変形する.

32. 次の 1 次方程式を解け．ただし, x, y, z, w は未知数, a は定数とする．（方程式が複数個ある場合と同様に考えよ）

$$\begin{array}{ll} (1) & x + ay - az - aw = a \\ (2) & ax + 0y - 5z - w = 4 \\ (3) & 3x + 2y = z + 4w \end{array}$$

33. 次の 1 次方程式系を解け．ただし, a, b, c は定数とする．

(1) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ y - w = 5 \\ x + y + w = 6 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x + 2y + z - w = 4 \\ 2x + y - w = -2 \\ 4x + 3y + 2z - w = 10 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} -y + z = -2 \\ 5x - y - 4z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} -3x + y - z + w = -8 \\ -2x - 2y - 2z + 3w = -12 \\ 3x + y + z - 2w = 12 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} u + v + w = a \\ w + x + y = b \\ y + z + u = c \end{cases}$ (6) $\begin{cases} y + z + 2w = 0 \\ 2x + 4y + 6z + 8w = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} z + 2w = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ (8)* $\begin{cases} 2x + 3y - 5z - 2w = 9 \\ -2x + 2y + 3z - 5w = -18 \\ -5x - 2y + 2z + 3w = -7 \\ 3x - 5y - 2z + 2w = 4 \end{cases}$

34. 次の 1 次方程式系が解を持つための必要十分条件を求め, その条件のもとで解け．ただし, (2) については $abc \neq 0$ とする．

(1) $\begin{cases} 2x + 5y + 6z = a \\ x + 2y + z = b \\ 3x + 5y - z = c \end{cases}$ (2) $\begin{cases} ax - by = c \\ by - cz = a \\ -ax + cz = b \end{cases}$

35. 次の 1 次方程式系を解け．ただし, a, b, c は定数とする．

(1) $\begin{cases} 2y + z + w = a \\ x - z - 2w = b \\ x + 2y - w = 2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x + 2y + 2z + w = 2 \\ 3x + 2y + 2z + w = 1 \\ 2x + y + z + w = 4 \end{cases}$

(3)* $\begin{cases} x + ay + z - w = 3 \\ x - y - z + bw = 5 \end{cases}$ (4)* $\begin{cases} bu + v + cw = a \\ cw + x + ay = b \\ ay + z + bu = c \end{cases}$

36. A をある 3 次行列, $\mathtt{c}$ をある 3 項ベクトルとし, $\mathtt{x} = {}^t(x, y, z)$ とおく．ひとみさんは 1 次方程式系 $A\mathtt{x} = \mathtt{c}$ を解こうとして, 拡大係数行列 $(A\ \mathtt{c})$ を基本変形する際に, 誤って 2 列目を 2 倍してしまった．また, 列の入れ換えは行なっていない．こうして得た解は, $\mathtt{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ であった．正しい解を求めよ．

37. 次の行列式を計算せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & e \\ 0 & b & f & 0 \\ 0 & g & c & 0 \\ h & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} a & b & & O \\ 0 & a & b & \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ (7) $\begin{vmatrix} 1 & 14 & 15 & 4 \\ 12 & 7 & 6 & 9 \\ 8 & 11 & 10 & 5 \\ 13 & 2 & 3 & 16 \end{vmatrix}$

38. 次の行列が正則でなくなるような複素数 c の値をすべて求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} c+1 & -2 \\ -1 & c \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} c & -1 & 1 \\ 0 & c & 2 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} c & c & c+9 \\ c+1 & c+2 & c+12 \\ 0 & 9 & c \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} c & 1 & 2 & 3 \\ 1 & c+2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & c & 1 \\ 3 & 0 & 1 & c+2 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} c & 1 & 2 & 3 \\ -1 & c & 1 & 2 \\ -2 & -1 & c & 1 \\ -3 & -2 & -1 & c \end{pmatrix}$

39. 次の置換を互換の積に分解し, 符号を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

40. 次の行列式を計算せよ. ((1),(2) は因数分解せよ. (5) は $t=1$ として計算してもよい.)

(1)* $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$ (3)* $\begin{vmatrix} x & 1 & 3 & \dots & 2n-1 \\ 1 & x & 3 & \dots & 2n-1 \\ 1 & 3 & x & \dots & 2n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & 5 & \dots & x \end{vmatrix}$

(4)* $\begin{vmatrix} 15 & 8 & 1 & 24 & 17 \\ 16 & 14 & 7 & 5 & 23 \\ 22 & 20 & 13 & 6 & 4 \\ 3 & 21 & 19 & 12 & 10 \\ 9 & 2 & 25 & 18 & 11 \end{vmatrix}$ (5)** $\underbrace{\begin{vmatrix} t^{-1}+tx^2 & x & & & O \\ x & t^{-1}+tx^2 & x & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & x & t^{-1}+tx^2 & x \\ O & & & x & t^{-1}+tx^2 \end{vmatrix}}_{n}$

41. 奇数次の交代行列 (${}^tA=-A$) の行列式は 0 であることを示せ.

42. 空間の, 同一直線上にない 3 点 (x_i, y_i, z_i) $(i=1,2,3)$ を通る平面の方程式を, 行列式で表せ.

43. 次を求めよ. ただし, (3) は $n=1,2,3,4$ のときでよい.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ (3) $\underbrace{\begin{vmatrix} k & 1 & & & O \\ 1 & k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & k & 1 \\ O & & & 1 & k \end{vmatrix}}_{n}$

(4)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

44. 逆行列の公式 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\widetilde{A}$ を用いて, 次の行列の逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & a \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

45. クラメルの公式を用いて次の 1 次方程式系を解け. ただし, (2) については $a^3+b^3+c^3 \neq 3abc$ とする.

(1) $\left\{ \begin{array}{rrrcr} 2x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & +x_2 & +4x_3 & = & -3 \\ -2x_1 & +3x_2 & -5x_3 & = & 3 \end{array} \right.$ (2) $\left\{ \begin{array}{llllr} ax_1 & +bx_2 & +cx_3 & = & 1 \\ cx_1 & +ax_2 & +bx_3 & = & 1 \\ bx_1 & +cx_2 & +ax_3 & = & 1 \end{array} \right.$

46. 成分がすべて整数であるような正方行列 A が逆行列を持ち, その成分がまたすべて整数であるための必要十分条件は $\det A = \pm 1$ であることを示せ.

47. エルミート行列（$A^* \equiv \overline{{}^tA} = A$ がなりたつ複素行列）の対角成分は実数であることを示せ.

48. X, Y, Z, F を n 次行列とし, $[X,Y]_F = XFY - YFX$ と定義する. このとき次を示せ. (1) $[[X,Y]_F, Z]_F + [[Y,Z]_F, X]_F + [[Z,X]_F, Y]_F = O$

(2) F が対称行列（すなわち ${}^tF = F$）で, X, Y が交代行列（すなわち ${}^tX = -X$, ${}^tY = -Y$）のとき, $[X,Y]_F$ も交代行列であることを示せ.

49.* A, B をそれぞれ (l,m) 型, (m,n) 型行列とするとき, AB の階数は A, B の階数を超えないことを示せ.

50. 次にあげた集合 V は, 実線形空間になるか. また, 複素線形空間になるか. 理由をつけて答えよ.

(1) $V=\left\{\begin{pmatrix} x \\ yi \\ 1 \end{pmatrix} \mid x,y\in\mathbf{R}\right\}$ (2) $\left\{\begin{pmatrix} xi \\ y \\ z+zi \\ w-wi \end{pmatrix} \mid x,y,z,w\in\mathbf{R}\right\}$

(3) $\left\{\begin{pmatrix} x+yi \\ x-yi \end{pmatrix} \mid x,y\in\mathbf{R}\right\}$ (4) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} \mid x,y\in\mathbf{C}\right\}$

50.1 $\mathsf{0}$ を含むベクトルたちは, 線形従属になることを示せ.

50.2 少なくとも 2 つの同じベクトルを含むベクトルたちは, 線形従属になることを示せ.

50.3 次の 2 つの条件 (i),(ii) が同値であることを示せ.:

(i) $\mathsf{a}_1,\mathsf{a}_2,\ldots,\mathsf{a}_n$ は線形従属である.

(ii) $\mathsf{a}_1,\mathsf{a}_2,\ldots,\mathsf{a}_n$ のうちのある 1 つのベクトルが他のベクトルたちの線形結合で表される.

50.4 ベクトルたち $\mathsf{a}_1,\mathsf{a}_2,\ldots,\mathsf{a}_n$ が線形独立とすれば, この中からいくつか選んで得た $\mathsf{a}_{i_1},\mathsf{a}_{i_2},\ldots,\mathsf{a}_{i_s}$ もまた線形独立となることを示せ.

51. 次のうちで, $V^3(=\mathbf{R}^3)$ の基底となるものはどれか. 理由をつけて答えよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

52. 次のうちで, V^3 の部分空間となるものはどれか. 理由をつけて答えよ.

(1) $x+2y-3z=0$ で表される平面. (2) $x+2y-3z=-4$ で表される平面.
(3) $2x-y-z=0$ で表される平面.
(4) $x-3=y-1=z/2$ で表される直線.
(5) $x/2=-y/3=-z$ で表される直線. (6) $\{\mathsf{0}\}$ (7) V^3

53. [52.] (1),(3),(5) に示された部分空間をそれぞれ W_1,W_2,W_3 とする.

(1) W_1 の基底を 1 組求めよ. (2) W_2 の基底を 1 組求めよ.
(3) W_3 の基底を 1 組求めよ.

54. 以下のように $V^3(=\mathbf{R}^3)$ の部分空間 W, X, Y を与えるとき, (1) W, (2) X, (3) Y, (4) $W+X$, (5) $X+Y$, (6) $Y+W$, (7) $W\cap X$, (8) $X\cap Y$, (9) $Y\cap W$ の基底を 1 組ずつ求めよ.

(10) (4)(5)(6) のうち直和となるのはどれか.

$$W=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in V^3 \mid \begin{array}{l} x+y=0\\ x+y+z=0\end{array}\right\},\ X=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in V^3 \mid x+2y-z=0\right\},$$

$$Y=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in V^3 \mid \begin{array}{l} 2x+y-z=0\\ x-y=0\end{array}\right\}.$$

55. 以下の $\mathbf{C}^4$ の部分空間 W の基底を 1 組求めよ.

$$(1)\ \left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix} \mid x+iy=z+iw\right\} \quad (2)\ \left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x+iy=z+iw\\ x=2iy+3z+4iw\end{array}\right\}$$

56.* 空間ベクトル $\mathtt{a}=\begin{pmatrix} 1\\ 3\\ 5\end{pmatrix}$, $\mathtt{b}=\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, $\mathtt{c}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 4\end{pmatrix}$, $\mathtt{d}=\begin{pmatrix} 2\\ 3\\ -1\end{pmatrix}$ を取る.

$\mathtt{a}$ と $\mathtt{b}$ で生成される部分空間を V, $\mathtt{c}$ と $\mathtt{d}$ で生成される部分空間を W とするとき, $V\cap W$ の基底を求めよ.

57. (1) $V=V^3$, $W=\{$ 実 2 次行列全体 $\}$ とすると, V, W は実線形空間とみなせる. 写像 $T: V\longrightarrow W$ を $T\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y\\ y & z\end{pmatrix}$ で定義するとき, T は線形写像になることを示せ.

(2) $Y=\{$ 実 2 次対称行列全体 $\}$ とすると, Y は W の部分空間になることを示せ.

(3) (1) で定義される $T: V\longrightarrow Y$ は同型写像になることを示せ.

58. 線型写像 T と S の合成 ST はまた線型写像になることを示せ.

59. 線形写像 $T: V\longrightarrow V'$ に対して, その (1) 像と (2) 核は, 各々 V', V の部分空間となることを示せ.

59.1 線形写像 $T: V\longrightarrow V'$ は, V の基底に含まれるすべてのベクトルの像を定めれば, 決定することを示せ.

60. 線形空間 V, V' の間の同型写像 T に対して, その逆写像は V', V の間の同型写像であることを示せ.

（線形写像が 1 対 1 対応でもあるとき同型写像という. その逆写像が 1 対 1 対応であることは明らかとしてよい.）

61. 次の行列が定める線形写像の (a) 像の基底と (b) 核の基底を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

62. V^3 において, 各点を次の平面 S に関して対称な点に移すような線形変換 T を表す行列 A を求めよ. (1) $x + 2y - 2z = 0$. (2) $y = x$.

63. V^3 の元 ${}^t(x, y, z)$ で, $x + y + z = 0$ をみたすもの全体が作る V^3 の 2 次元部分空間を W とおく. $\mathbf{E} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\mathbf{F} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ はともに W の基底である.

(1) 基底の取替え $\mathbf{E} \to \mathbf{F}$ の行列 P を求めよ.

(2) W の線形変換 T を $T\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ で定義する.

(a) $\mathbf{E}$ に関する T の行列 A を求めよ.

(b) $\mathbf{F}$ に関する T の行列 B を求めよ.

(c) P, A, B はどのような関係式をみたすか.

64. V を 3 次以下の t の実係数多項式全体からなる線形空間, W を 2 次以下の t の実係数多項式全体からなる線形空間とする. V の基底 $\mathbf{E} = \langle 1, t, t^2, t^3 \rangle$ と W の基底 $\mathbf{F} = \langle 1, t, t^2 \rangle$ を取る.

(1) 写像 $T : V \longrightarrow W$ を $T(p(t)) = -p'(1 - t)$ で定めるとき, T は線形写像となることを示せ.

(2) $\mathbf{E}, \mathbf{F}$ に関する T の行列 A を求めよ.

(3) V の線形変換 $\tilde{T}$ を $\tilde{T}(p(t)) = (t + b)p'(t + a)$（$a, b$ は定数）で定めるとき, $\mathbf{E}$ に関する $\tilde{T}$ の行列 B を求めよ.

65. $V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \mid x, y, z, w \in \mathbf{C} \right\}$ とおくと V は複素線形空間となる. 2 次行列 $S = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ を取り, V の変換 T を $TX = SXS$ で定める.

(1) T は V の線形変換となることを示せ.

(2) V の基底 $\mathbf{E} = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ を取るとき, $\mathbf{E}$ に関する T の行列 A を求めよ.

(3) T_A の像の基底 $\mathbf{H}$ と T_A の核の基底 $\mathbf{G}$ を求めることにより, T の像の基底 $\tilde{\mathbf{H}}$ と T の核の基底 $\tilde{\mathbf{G}}$ を求めよ.

66.* (m, n) 型行列 A, B に対して $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$ を示せ.

67. ${}^tA = -A$ をみたす行列 A を交代行列という．4 次交代行列全体のなす線形空間の基底を 1 つ求めよ．

68. V の 1 つの基底を $\mathbf{E} = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ とする．このとき，

(1) $\mathbf{F} = \langle e_1, e_2 - e_3, e_3, e_3 + e_4 \rangle$, $\mathbf{G} = \langle e_1 + e_4, 2e_3, e_4, 3e_2 \rangle$ もまた, V の基底となることを示せ.

(2) 基底の取替え $\mathbf{F} \to \mathbf{G}$ の行列 P を求めよ.

ヒント : (1) は, 基底の取替え $\mathbf{E} \to \mathbf{F}$ および $\mathbf{E} \to \mathbf{G}$ の行列がともに正則であることをいえばよい.

69. 複素ベクトル $a = {}^t(1, i, -i)$, $b = {}^t(i, i, -i+1)$, $c = {}^t(1+i, 1, 1)$ に対して, 内積 (a, b), (b, c), (c, a) を計算せよ.

70. シュミットの直交化法により, 次のベクトルから正規直交系を作れ.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

71. 次の線形空間の基底を 1 組ずつ求めよ.

(1) $\{{}^t(1,2,3)$ に直交する空間ベクトル全体$\}$

(2) $\{{}^t(1,2,0,1), {}^t(-1,0,2,1)$ に直交する 4 項ベクトル全体$\}$

(3) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathsf{0} \right\}$

(4) $\left\{ A \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathsf{0} \right.$ をみたす実 2 次行列 A 全体$\left.\right\}$

72. 次の各集合によって生成される線形空間 V の $\mathbf{R}^4$ における直交補空間 $V^\perp$ を求めよ.

$$(1)\ \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad (2)\ \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

73. 2 次対称ユニタリ行列をすべて求めよ.

74.* $M_n(\mathbf{R})$（n 次実行列全体からなる線形空間）から $\mathbf{R}$ への任意の線形写像 T は, ある n 次行列 A によって, $T(X) = \mathrm{tr}(XA)$ の形にかけることを示せ.

75.* A を (l,m) 型行列, B を (m,n) 型行列とする. このとき次を示せ.

$$r(A) + r(B) - m \leq r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$$

76.* (Frenet の公式)

何度でも微分可能な実関数 $x(t), y(t), z(t)$ を取る. これらを成分とするベクトル $\xi(t) = {}^t(x(t), y(t), z(t))$ は, 空間曲線 C を表している. $\xi(t)$ の n 次導関数は $\xi^{(n)}(t) = {}^t(x^{(n)}(t), y^{(n)}(t), z^{(n)}(t))$ で与えられる. いま, $\xi'(t)/\|\xi'(t)\| = e_1(t)$, $e_1'(t)/\|e_1'(t)\| = e_2(t)$ とおく. 次を示せ.

(1) $(e_1'(t), e_1(t)) = 0$.

(2) $e_2'(t) = -\kappa e_1(t) + \tau e_3(t)$ $(\tau > 0)$ となるような, $e_1(t), e_2(t)$ に直交する単位ベクトル $e_3(t)$ が存在する.

(3) $e_3'(t) = -\tau e_2$.

(4) いかなる t に対しても, $e' = \langle e_1'(t), e_2'(t), e_3'(t)\rangle$ は, $\mathbf{R}^3$ の基底にはならない. （ヒント: $e = (e_1(t), e_2(t), e_3(t))$ とするとき, $e' = eP$ とかいてみよ.）

（κ,τ を各々 空間曲線 C の曲率, ねじれ率という）

77.* V の線形変換 T に対して, $T(T(x)) = T^2(x)$ とかく. $T^2(V) = \mathrm{Ker}\, T$ がなりたつとき, V の次元は 3 の倍数となることを示せ.

78. $V=\mathbf{C}^4$ とする. 次の各部分空間 W に対して, その直交補空間 $W^{\perp}$（の基底）を求めよ.

$$(1)\ W=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\i\\-i\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\1+i\\-i\\i-1\end{pmatrix}\right\},\quad (2)\ W=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\i\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i-1\\2+i\\1-i\\2i\end{pmatrix}\right\}$$

79. $v_1,\dots,v_k$ を, n 次元計量空間 V のベクトルとする. V の変換 T を,

$$T(x)=(x,v_1)v_1+(x,v_2)v_2+\ldots+(x,v_k)v_k \qquad (x\in V)$$

で定めるとき,

(1) T は, V の線形変換となることを示せ.

(2) $v_1,\dots,v_k$ が正規直交系のとき, T は, $W=\mathrm{span}\{v_1,\dots,v_k\}$ によって決まってしまうことを示せ. また, それはどういう線形変換か.

80. シュミットの直交化法により, 次のベクトルから $\mathbf{C}^4$ の正規直交系を作れ.

$$(1)\ \begin{pmatrix}1\\i\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\i\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\\i\end{pmatrix}\qquad (2)\ \begin{pmatrix}i\\1\\-1\\i\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\-1+i\\1+i\\-2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1\\0\\i\\2i\end{pmatrix}$$

81. $\mathbf{C}^n$ の正規直交基底の各ベクトルを横に並べてできた行列はどういう行列か.

82. 次の行列のうちのどれが直交行列か.

$$(1)\ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\quad (2)\ \begin{pmatrix}1/\sqrt{5}&2/\sqrt{5}\\-2/\sqrt{5}&1/\sqrt{5}\end{pmatrix}\quad (3)\ \frac{1}{a}\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\-1&1&1&1\\1&1&1&-1\\-1&-1&b&c\end{pmatrix}$$

83.* 計量空間 $\mathbf{R}^n$ において, 与えられた $n-1$ 個のベクトル $u_1,\dots,u_{n-1}$ に対して, あるベクトル v がただ1つ存在して, 任意の $\mathbf{R}^n$ のベクトル u に対して, 次をみたすことを示せ.（このような v を $u_1\times\cdots\times u_{n-1}$ で表す.）

$$(u,v)=\det(u_1,u_2,\dots,u_{n-1},u)$$

84.* [83.] で定めた $u_1\times\cdots\times u_{n-1}$ について, 次がなりたつことを示せ.

(1) $u_{\sigma(1)}\times\cdots\times u_{\sigma(n-1)}=\mathrm{sgn}(\sigma)\ u_1\times\cdots\times u_{n-1}$

(2) $u_1\times\cdots\times(cu_i+u_i')\times\cdots\times u_{n-1}=c(u_1\times\cdots\times u_i\times\cdots\times u_{n-1})+u_1\times\cdots\times u_i'\times\cdots\times u_{n-1}$

85. 次の行列のすべての固有値 α 並びにそれらに対応する固有空間 W_α の基底を求めよ．ただし, $a \neq 0$, $a+b+c+d \neq 0$ とする．固有値が複素数になるときは, 複素線形空間において考えよ．

(1) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} c & -1 \\ 0 & c \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (10) $\begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (11)* $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$

86. [80.] において, 行列 (1),(2),(3),(5),(6),(7),(8),(9),(11) は対角化される．各行列 A に対し, 適当な正則行列 P を取って, $P^{-1}AP$ を対角行列にせよ．

87. 2 次行列 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ が対角化されないような実数 a の値を求めよ．

88. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の固有方程式を求め, 対角化せよ．またこの行列に対して, $(A-2E)(A-5E)$ を計算せよ．

89. 2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a & -a^2 \\ a^2 & -a^3 \end{pmatrix}$ が対角化されないような実数 a の値を求めよ．また, 対角化される a に対して, 適当な正則 2 次行列 P を取って, $P^{-1}AP$ を対角行列にせよ．

90. V を 4 次元複素線形空間, $e = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ をその基底, T を次で定義される V の線形変換とする．

$$Te_1 = 2e_2, \quad Te_2 = -2e_2, \quad Te_3 = e_1 + e_4, \quad Te_4 = e_1 - e_3$$

このとき, T の固有値と, 各固有空間 W_α の基底を求めよ．

91. 行列 A に対して, その随伴行列を $A^* = {}^t(\overline{A})$ で定義する. 次を示せ.

(1) $(A+B)^* = A^* + B^*$ (2) $(A^*)^* = A$
(3) $(kA)^* = \overline{k}A^*$ (4) $(AB)^* = B^*A^*$

92. T を V の正規変換（$TT^* = T^*T$ をみたす線形変換）とする. V の正規直交基底 $e = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ を取る. T の e に関する行列 A に対して, $AA^* = A^*A$ がなりたつことを示せ.

93. エルミート行列 $(A^* = A)$ の固有値はすべて実数となることを示せ.

94. ユニタリ行列 $(A^* = A^{-1})$ の固有値は, すべて絶対値 1 の複素数となることを示せ.

95. 2 次行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ be^{i\theta} & a \end{pmatrix}$ が正規行列であることを示せ.

96. 2 次正規行列は, 次のいずれかの形に限ることを示せ. ただし, a, b, k, p は複素数, θ は実数である.

$$\begin{pmatrix} a & kp \\ \overline{k}p & a+p \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ be^{i\theta} & a \end{pmatrix}$$

97. 次の行列のうち, 正規行列はどれか言え.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1+i & -1-i \\ 1+i & 1+i \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$$

98. [97.](1),(2) をユニタリ行列によって対角化せよ.

99. 以下の行列を, ユニタリ行列によって対角化せよ. ただし, a, λ は実数とする.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & \lambda i \\ -\lambda i & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -1 & 1-i \\ 1+i & -2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} a & i \\ i & a \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} -i & i \\ i & i \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (6) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(8) \begin{pmatrix} 0 & i & -1 \\ -i & 2 & i \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad (9) \begin{pmatrix} 4 & -2i & 4i \\ 2i & 1 & -2 \\ -4i & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (10) \begin{pmatrix} 0 & -2i & 2i \\ 2i & -1 & 0 \\ -2i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

100. 次の二次形式 F の行列を求めよ.

$$(1)\ F = x^2 + 3xy + y^2 \qquad (2)\ F = x^2 + y^2 + 2xy + 2yz + 3zw + 3wx$$

101. ラグランジュの方法により, [100.] の二次形式の符号を求めよ.

102. $F = xy + xz + xw + yz + yw + zw$ の符号を次のようにして求めよ.
(1) まず, $x + y = x'$, $x - y = y'$ とおき, F を x', y', z, w で表す.
(2) (1) の結果に対して, ラグランジュの方法を用いる.

103. $V = \mathbf{C}^3$ とする. 次の V の各部分空間 W への射影子を表す行列 P を求めよ.

$$(1)\ W = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}\right\} \qquad (2)\ W = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

104. ある k に対して, $T^k = O$ となる線形変換 T を, 巾零変換という. V を n 次元線形空間とするとき, T が V の巾零変換であるための必要十分条件は, $T^n = O$ であることを示せ.

105. $v = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ を V の基底とする. $(T - 2E)v_1 = 0$, $(T - E)v_2 = v_3$, $(T - E)v_3 = v_4$, $(T - E)v_4 = 0$ のとき, v に関する T の行列を求めよ.

106. 対角化可能な行列 A の固有値（特性根）が k のみとする. このとき, $A = kE$ を示せ.

107. (a) 次の行列の最小多項式を求めよ. (b) また, 対角化可能なものは対角化せよ.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (4)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(5)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (6)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$$

$$(8)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (9)\ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

108. エルミート行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & i & -1 \\ -i & 2 & i \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix}$ をスペクトル分解せよ.

109. $V = \mathbf{C}^3$ とする．次の V の各部分空間 W への射影子を表す行列 P を求めよ．

$$(1)\ W = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \qquad (2)\ W = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

110. (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求め, 正則行列 P と対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ．(2) また, A の最小多項式を求めよ．

111. (1) $\dfrac{1}{k}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が射影子を表す行列となるように, k, a, b を定めよ．

(2) また, その射影子は, どの部分空間への射影子か．その空間の基底を求めよ．

112. P をエルミート行列とする．その固有値が 1 と 0 のみならば, P が射影子を表す行列となることを示せ．（$P^* = P$, $P^2 = P$ となることを示す．）

113. 次の行列 A を対角行列 S と巾零行列 N の和で表せ．また $SN = NS$ を示せ．N^2 を求めよ．これらを利用して, $(S+N)^k$ を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

114. 正方行列 A に対して,

$$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

と定める．[113.] の結果を用いて, $\exp\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ を計算せよ．