線形代数I 演習問題の答え (1)

by K. Asai

1. (1) $S=(x,y,z)$ とおく．$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{RS}$ より $\begin{pmatrix} 4-1 \\ -4+2 \\ 1-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-2 \end{pmatrix}$．ゆえに $x=4$，$y=-2$，$z=0$． すなわち $S=(4,-2,0)$．

(2) 原点を O とする．$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}\right)=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$．ゆえに $G=(2,-2,2)$．

(3)

$$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS}\right)-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OP}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{PS}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1.1* $\triangle ABC$，$\triangle OBC$ の重心をそれぞれE，F とし，$\overrightarrow{OA}=\mathsf{a}$，$\overrightarrow{OB}=\mathsf{b}$，$\overrightarrow{OC}=\mathsf{c}$ とおく．

$$t\,\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+u\,\overrightarrow{AF} \tag{11}$$

となるような，$0\leq t,u\leq 1$ なる t,u があれば，2 つの線分 OE と AF は交わる．そこでこのような t,u を見つけてみる．

$$t\,\overrightarrow{OE}=\tfrac{t}{3}(\mathsf{a}+\mathsf{b}+\mathsf{c}),\quad \overrightarrow{OA}+u\,\overrightarrow{AF}=\mathsf{a}+u\left(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA}\right)=\mathsf{a}+u\left[\tfrac{1}{3}(\mathsf{b}+\mathsf{c})-\mathsf{a}\right]$$

なので，(11) より，

$$\begin{aligned} & \tfrac{t}{3}(\mathsf{a}+\mathsf{b}+\mathsf{c})=\mathsf{a}+u\left[\tfrac{1}{3}(\mathsf{b}+\mathsf{c})-\mathsf{a}\right] \\ \iff\ & \left(\tfrac{t}{3}-1+u\right)\mathsf{a}+\left(\tfrac{t}{3}-\tfrac{u}{3}\right)\mathsf{b}+\left(\tfrac{t}{3}-\tfrac{u}{3}\right)\mathsf{c}=0 \\ \iff\ & \tfrac{t}{3}-1+u=0,\ \tfrac{t}{3}-\tfrac{u}{3}=0 \iff t=u=\tfrac{3}{4}. \end{aligned}$$

したがって，OE と AF は 1 点で交わる．その点を G とすると，$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}(\mathsf{a}+\mathsf{b}+\mathsf{c})$．この式は $\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c}$ について対称的になっているので，OE と他の（重心と頂点を結ぶ）線分も全く同じ点 G で交わることは明らかである．ゆえに題意の線分は 1 点 G で交わる． (q.e.d.)

2. (1) $||\mathsf{a}||\cdot||\mathsf{b}||-|(\mathsf{a},\mathsf{b})|=||\mathsf{a}||\cdot||\mathsf{b}||-|\,||\mathsf{a}||\cdot||\mathsf{b}||\cdot\cos\theta\,|=||\mathsf{a}||\cdot||\mathsf{b}||-||\mathsf{a}||\cdot||\mathsf{b}||\cdot|\cos\theta|=||\mathsf{a}||\cdot||\mathsf{b}||(1-|\cos\theta|)\geq 0.$ $\quad\therefore\ |(\mathsf{a},\mathsf{b})|\leq||\mathsf{a}||\cdot||\mathsf{b}||$． (q.e.d.)

(2) $||\mathsf{a}+\mathsf{b}||^2-||\mathsf{a}-\mathsf{b}||^2=(\mathsf{a}+\mathsf{b},\mathsf{a}+\mathsf{b})-(\mathsf{a}-\mathsf{b},\mathsf{a}-\mathsf{b})=(\mathsf{a},\mathsf{a})+2(\mathsf{a},\mathsf{b})+(\mathsf{b},\mathsf{b})-[(\mathsf{a},\mathsf{a})-2(\mathsf{a},\mathsf{b})+(\mathsf{b},\mathsf{b})]=4(\mathsf{a},\mathsf{b})$． (q.e.d.)

(3) $||k\mathsf{a}||^2=(k\mathsf{a},\,k\mathsf{a})=k^2(\mathsf{a},\mathsf{a})=k^2||\mathsf{a}||^2$. ゆえに $||k\mathsf{a}||=|k|\,||\mathsf{a}||$． (q.e.d.)

（別解）$\mathsf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とおくと，$||k\mathsf{a}|| = \sqrt{(ka)^2 + (kb)^2 + (kc)^2} = |k|\sqrt{a^2+b^2+c^2} = |k|\,||\mathsf{a}||$. (q.e.d.)

(4) 両辺とも非負なので，両辺を 2 乗して $||\mathsf{a}+\mathsf{b}||^2 \le (||\mathsf{a}|| + ||\mathsf{b}||)^2$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}&(||\mathsf{a}|| + ||\mathsf{b}||)^2 - ||\mathsf{a}+\mathsf{b}||^2 = (||\mathsf{a}|| + ||\mathsf{b}||)^2 - (\mathsf{a}+\mathsf{b}, \mathsf{a}+\mathsf{b})\\ &= ||\mathsf{a}||^2 + 2||\mathsf{a}||\cdot||\mathsf{b}|| + ||\mathsf{b}||^2 - [||\mathsf{a}||^2 + 2(\mathsf{a},\mathsf{b}) + ||\mathsf{b}||^2] = 2[||\mathsf{a}||\cdot||\mathsf{b}|| - (\mathsf{a},\mathsf{b})]\\ &= 2\,(||\mathsf{a}||\cdot||\mathsf{b}|| - ||\mathsf{a}||\cdot||\mathsf{b}||\cos\theta) = 2||\mathsf{a}||\cdot||\mathsf{b}||(1-\cos\theta) \ge 0. \qquad \text{(q.e.d.)}\end{aligned}$$

(5) $||\mathsf{a}+\mathsf{b}+\mathsf{c}||^2 - ||\mathsf{a}||^2 - ||\mathsf{b}||^2 - ||\mathsf{c}||^2 = (\mathsf{a}+\mathsf{b}+\mathsf{c},\, \mathsf{a}+\mathsf{b}+\mathsf{c}) - ||\mathsf{a}||^2 - ||\mathsf{b}||^2 - ||\mathsf{c}||^2 = ||\mathsf{a}||^2 + ||\mathsf{b}||^2 + ||\mathsf{c}||^2 + 2(\mathsf{a},\mathsf{b}) + 2(\mathsf{b},\mathsf{c}) + 2(\mathsf{c},\mathsf{a}) - ||\mathsf{a}||^2 - ||\mathsf{b}||^2 - ||\mathsf{c}||^2 = 2[(\mathsf{a},\mathsf{b}) + (\mathsf{b},\mathsf{c}) + (\mathsf{c},\mathsf{a})]$. (q.e.d.)

3. (1) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -\dfrac{3}{2}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = -\dfrac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \dfrac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

これは，与えられたベクトルが同一平面内にあることを示す．ゆえに線形従属．

（別解）与えられたベクトルが張る平行 6 面体の体積 V を計算すると，$V = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$．ゆえに線形従属．

(2) 与えられたベクトルが張る平行 6 面体の体積 V を計算すると，$V = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$.

ゆえに線形独立．

4. $\mathsf{e}_1 = \mathsf{a} + \mathsf{c}$，$\mathsf{e}_2 = -\mathsf{b} - \mathsf{c}$，$\mathsf{e}_3 = -\mathsf{b} - 2\mathsf{c}$ なので，

(1) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3(\mathsf{a}+\mathsf{c}) + 2(-\mathsf{b}-\mathsf{c}) + (-\mathsf{b}-2\mathsf{c}) = 3\mathsf{a} - 3\mathsf{b} - \mathsf{c}$.　　(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathsf{a}$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathsf{a} + \mathsf{c} - 3(-\mathsf{b}-\mathsf{c}) + 2(-\mathsf{b}-2\mathsf{c}) = \mathsf{a} + \mathsf{b}$.　　(4) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathsf{0}$ (0 ベクトル).

4.1 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと，t, u, v についての 1 次方程式系:

$$\begin{cases} t + u + v = x \\ 2t + u = y \\ 3t + u + v = z \end{cases}$$

が得られる．これを解いて，$t = \frac{z-x}{2}$，$u = y - (z-x) = x + y - z$，$v = x - t - u = x - \frac{z-x}{2} - (x+y-z) = \frac{x-2y+z}{2}$．ゆえに，$\mathsf{x} = \frac{z-x}{2}\mathsf{a} + (x+y-z)\mathsf{b} + \frac{x-2y+z}{2}\mathsf{c}$.

（別解）$\mathsf{e}_1 = -\frac{1}{2}(\mathsf{a} - 2(\mathsf{b}-\mathsf{c}) - 3\mathsf{c})$，$\mathsf{e}_2 = \mathsf{b} - \mathsf{c}$，$\mathsf{e}_3 = \frac{1}{2}(\mathsf{a} - 2(\mathsf{b}-\mathsf{c}) - \mathsf{c})$．これより，

$\mathsf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\mathsf{e}_1 + y\mathsf{e}_2 + z\mathsf{e}_3 = -x\frac{1}{2}(\mathsf{a} - 2(\mathsf{b}-\mathsf{c}) - 3\mathsf{c}) + y(\mathsf{b}-\mathsf{c}) + z\frac{1}{2}(\mathsf{a} - 2(\mathsf{b}-\mathsf{c}) - \mathsf{c})$

$= \frac{z-x}{2}\mathsf{a} + (x+y-z)\mathsf{b} + \frac{x-2y+z}{2}\mathsf{c}$.

5. (1) 与式を変形して $9x = 5 - 4y$．この式を t とおけば，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{9} \\ \frac{5}{4} - \frac{t}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} +$

$t\begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$. ($t \longrightarrow 36t$ とおきかえて，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}$.)

(2) $-x-3 = 2y = z = t$ とおいて，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t-3 \\ \frac{t}{2} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. ($t \longrightarrow 2t$ とおきかえて，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.)

(3) $4x+3 = 6y+5 = -2z+1 = t$ とおいて，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{4} - \frac{3}{4} \\ \frac{t}{6} - \frac{5}{6} \\ -\frac{t}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. ($t \longrightarrow 12t$ とおきかえて，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$.)

6. 1 つ 1 つの方程式で表される各平面の法線ベクトルはそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ であり，これらに垂直なベクトル $\mathtt{v}$ は，与えられた直線 l の方向ベクトルである．$\mathtt{v}$ を求めると $\mathtt{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$．あとは l 上の点 P を 1 つ求めるためにたとえば $P = (x, y, 0)$ とおけば $x = 3$，$y = 2$．よって l のベクトル表示は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

7. 2 平面の法線ベクトル $\mathtt{u}$，$\mathtt{v}$ の交角 θ に対し，$0 \leq \theta \leq \pi$ となるから，$\sin\theta \geq 0$．そこで，$\sin^2\theta$ を求めると，

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{||\mathtt{u}||^2||\mathtt{v}||^2\cos^2\phi}{||\mathtt{u}||^2||\mathtt{v}||^2} = 1 - \frac{(\mathtt{u}, \mathtt{v})^2}{||\mathtt{u}||^2||\mathtt{v}||^2} = \frac{13}{28}.$$
$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{7}}.$$

8. (1) 平面の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に垂直なので，$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ と求まる．またこの平面は原点を通る．これより平面の方程式は，$2x + y - 4z = 0$.

(2) 平面の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ に垂直なので，$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 17 \\ -6 \end{pmatrix}$．またこの平面は $(-1, 1, 3)$ を通るので，平面の方程式は，$-8(x+1) + 17(y-1) - 6(z-3) = 0$．すなわち，$-8x + 17y - 6z = 7$.

(3) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2t \\ 1+t \\ 2+4t \end{pmatrix}$．ゆえに $t = \dfrac{x+1}{2}$，$t = y - 1$，$t = \dfrac{z-2}{4}$．これより求める方程式は，$\dfrac{x+1}{2} = y - 1 = \dfrac{z-2}{4}$.

(4) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ -2 \\ -3+9t \end{pmatrix}$．$t$ を消去して $x - 1 = \dfrac{z+3}{9}$，$y = -2$．（このように，方向ベクトルに 0 が含まれているときは，式が 2 つに分かれるので注意）

(5) 平面の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ に垂直なので，$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ -15 \end{pmatrix}$．またこの平面は $(3,4,5)$ を通るので，平面の方程式は，$3(x-3)-10(y-4)-15(z-5)=0$．すなわち，$3x-10y-15z=-106$．

9. (1) 平面の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ で，これに垂直なベクトルとして，たとえば $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を取ることができる.（それらは 1 通りには決まらない）またこの平面は $(1,1,0)$ を通る．これらより平面のベクトル表示 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を得る．

(2) 平面の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で，これに垂直なベクトルとして，$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を取れる．またこの平面は原点を通る．これらより平面のベクトル表示 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を得る．

(3) 平面の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$ で，これに垂直なベクトルとして，$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を取れる．またこの平面は $(5,0,0)$ を通る．これらより平面のベクトル表示 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を得る．

10. (1) $\begin{pmatrix} 5 & 15 & 10 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix}$.　（行の入れ替え）

(3) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{pmatrix}$.　（列の入れ替え）

11.* 空間ベクトル a, a' の張る平行四辺形 P の面積 S は，$S = ||\mathsf{a} \times \mathsf{a}'||$ で表される．したがって

$$S^2 = (bc'-b'c)^2 + (ca'-c'a)^2 + (ab'-a'b)^2 \tag{12}$$

となる．一方 P の xy 平面への正射影 P_1 は $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ 0 \end{pmatrix}$ で張られる平行四辺形となる．その面積は $S_1 = |ab'-a'b|$ となる．同様に $S_2 = |bc'-b'c|$，$S_3 = |ac'-a'c|$ を得る．このことと (12) より $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ を得る．(q.e.d.)

12. (1) $\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (*) である． $\therefore\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$． (*) より，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} = A^3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{13}$$

(13) において $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は任意のベクトルなので，$A^3 = E_3$ であることがわかる．同様にして，$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を得る．ゆえに，

$$A^{3m} = E_3, \quad A^{3m+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{3m+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

メモ: A^2，A^3 を直接計算してももちろんよい．

(2)

$$T\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 5x - 2y + 3z \\ 3x + 5y - 2z \\ -2x + 3y + 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\mathrm{x}. \qquad \therefore\ A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(3)

$$T\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -x + 2y - z \\ -x - y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\mathrm{x}. \qquad \therefore\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = 3A.$$

$$\therefore\ A^n = 3A^{n-1} = 3^2 A^{n-2} = \cdots = 3^{n-1} A = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

13. (1) $T\mathrm{x} = P\mathrm{x}$ とおくと，$P = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ となり，$S\mathrm{x} = Q\mathrm{x}$ とおくと，$Q = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ となる． $\therefore\ (ST)\mathrm{x} = S(T\mathrm{x}) = Q(P\mathrm{x}) = (QP)\mathrm{x} = A\mathrm{x}$．

$$\therefore\ A = QP = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & -13 \\ 5 & -8 & -13 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) $(TS)\mathrm{x} = T(S\mathrm{x}) = P(Q\mathrm{x}) = (PQ)\mathrm{x} = B\mathrm{x}$．

$$\therefore\ B = PQ = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 2 \\ 8 & -2 & 3 \\ -3 & -8 & 3 \end{pmatrix}.$$

14. (1) $\dfrac{x}{3} = -y - 2 = \dfrac{z+1}{2} = t$ とおけば，l のベクトル表示は，

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 3t \\ -t - 2 \\ 2t - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ゆえに，l' のベクトル表示は，

$$\mathrm{x}' = A\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

ここから t を消去して，l' の方程式: $\dfrac{x-1}{14}=\dfrac{y+4}{12}=\dfrac{z+5}{9}$ を得る．

(2) $-\dfrac{x+2}{10}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-3}{12}=t$ とおけば，l のベクトル表示は，

$$\mathrm{x}=\begin{pmatrix}-10t-2\\3t+3\\12t+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-10\\3\\12\end{pmatrix}.$$

ゆえに，l' のベクトル表示は，

$$\mathrm{x}'=A\mathrm{x}=\begin{pmatrix}2&-2&3\\3&1&2\\3&2&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-2\\3\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-10\\3\\12\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}10\\-3\\-12\end{pmatrix}.$$

これより l' の方程式は，$\dfrac{x+1}{10}=-\dfrac{y-3}{3}=-\dfrac{z-3}{12}$.

(3) S の法線ベクトルは $\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix}$ で，これに垂直なベクトルとして，$\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}$ を取れる．また S は $(1,-1,0)$ を通る．ゆえに S のベクトル表示は，

$$\mathrm{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}.$$

ゆえに，S' のベクトル表示は，

$$\mathrm{x}'=A\mathrm{x}=\begin{pmatrix}2&-2&3\\3&1&2\\3&2&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-8\\0\\3\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}17\\18\\15\end{pmatrix}.$$

これを方程式に直す．S' の法線ベクトルは $\begin{pmatrix}-8\\0\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}17\\18\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\times18\\3\times57\\-8\times18\end{pmatrix}\xrightarrow{\times(-1/9)}\begin{pmatrix}6\\-19\\16\end{pmatrix}$ とできる．また S' は $(4,2,1)$ を通る．ゆえに，S' の方程式は $6(x-4)-19(y-2)+16(z-1)=0$，すなわち，$6x-19y+16z=2$.

(4) S の法線ベクトルは $\begin{pmatrix}2\\-3\\3\end{pmatrix}$ で，これに垂直なベクトルとして，$\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$ を取れる．また S は $(0,0,1)$ を通る．ゆえに S のベクトル表示は，

$$\mathrm{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}.$$

ゆえに，S' のベクトル表示は，

$$\mathrm{x}'=A\mathrm{x}=\begin{pmatrix}2&-2&3\\3&1&2\\3&2&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\11\\13\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}0\\-5\\-7\end{pmatrix}.$$

これを方程式に直す．S' の法線ベクトルは，$\begin{pmatrix}2\\11\\13\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\5\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\-14\\10\end{pmatrix}\xrightarrow{\times1/2}\begin{pmatrix}6\\-7\\5\end{pmatrix}$．また S' は $(3,2,1)$ を通る．ゆえに，S' の方程式は $6(x-3)-7(y-2)+5(z-1)=0$，すなわち，$6x-7y+5z=9$.

(5) S の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ で，これに垂直なベクトルとして，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を取れる．また S は $(0,d,0)$ を通る．ゆえに S のベクトル表示は，

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ゆえに，S' のベクトル表示は，

$$\mathrm{x}' = A\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -2d \\ d \\ 2d \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

これを方程式に直す．S' の法線ベクトルは，$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-1/3)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$．$S'$ が $(-2d,d,2d)$ を通ることに注意すれば，S' の方程式は $y-d-(z-2d)=0$，すなわち，$y-z=-d$.（これは原点に関して S と対称な平面になる）

15. メモ: [14.] と同様ですが，本問では直線，平面とも原点を通っているので，これらはどんな行列を使ったとしても必ず原点を通る像に移されることに注意します．また，一般に元の図形が原点を通るかどうかにかかわらず，直線が点に，平面が直線や点に移ってしまうこともあります．(2) 参照.

15. (1) $2x=-y=3z=t$ とおいて，直線 l のベクトル表示 $\mathrm{x} = \begin{pmatrix} t/2 \\ -t \\ t/3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ を得る．ここで t を $6t$ とおき直せば $\mathrm{x} = t\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ のように分母を払える．ゆえに，l' のベクトル表示は，

$$\mathrm{x}' = A\mathrm{x} = t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 5 \\ -15 \\ -10 \end{pmatrix} = t'\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad (5t = t' \text{ とおいた})$$

これより l' の方程式は，$x = -\dfrac{y}{3} = -\dfrac{z}{2}$.

(2) 平面 S の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ で，これに垂直なベクトルとして，$\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ を取れる． また S は原点を通る．これらより S のベクトル表示 $\mathrm{x} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ を得る．ゆえに S' のベクトル表示は

$$\mathrm{x}' = A\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\left[t\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right] = t\begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

これらのベクトルは平行だから $2t+u=t'$ とおくとまとめることができて，$\mathrm{x}' = t'\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ (*)．これより S' は直線となることがわかる．(*) を方程式に直すと $-x = y/6 = z/5$.

16. 平面 S_d の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で，これに垂直なベクトルとして，$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

を取れる．また S_d は $(d,0,0)$ を通る．ゆえに S_d のベクトル表示は，

$$\mathrm{x}=\begin{pmatrix} d\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

ゆえに，$T_A(S_d)=S'_d$ のベクトル表示は，

$$\begin{aligned}\mathrm{x}'=A\mathrm{x}=k\begin{pmatrix} 2&1&1\\ 1&2&1\\ 1&1&2\end{pmatrix}&\left[\begin{pmatrix} d\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right]\\ =k\begin{pmatrix} 2d\\ d\\ d\end{pmatrix}+kt\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}&+ku\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

これを方程式に直す．S'_d の法線ベクトルは明らかに $\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ であり，S'_d が $(2kd,kd,kd)$ を通ることに注意すれば，S'_d の方程式は $x-2kd+y-kd+z-kd=0$，すなわち $x+y+z=4kd$．これが S_d の方程式と一致するので，$k=\frac{1}{4}$ となる．

17. (1) は (2) の特別な場合なので，(2) の解を示す．(2) 特殊な点を T_A で移した結果を式にすれば A を求められる．まず T_A は $l:y=mx$ に関する折り返しをあらわすのだから l 上の点の位置ベクトル $\begin{pmatrix} 1\\ m\end{pmatrix}$ は T_A によって動かない．また $\begin{pmatrix} m\\ -1\end{pmatrix}$ を l に関して折り返すと $\begin{pmatrix} -m\\ 1\end{pmatrix}$ に移る．よって $A\begin{pmatrix} 1&m\\ m&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&-m\\ m&1\end{pmatrix}$．これを解いて $A=\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} 1-m^2&2m\\ 2m&m^2-1\end{pmatrix}$．(1) は $m=2$ の場合だから $A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3&4\\ 4&3\end{pmatrix}$．

（別解）(2) 平面上の点 P の位置ベクトルを $\mathrm{x}=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$，$l:y=mx$ に関して P と対称の位置にある点 P' の位置ベクトルを $\mathrm{x}'=\begin{pmatrix} x'\\ y'\end{pmatrix}$ とおく．すると，P と P' の中点は l 上にあるので，$(\mathrm{x}+\mathrm{x}')/2=\begin{pmatrix} x_0\\ y_0\end{pmatrix}$ とすれば $y_0=mx_0$．すなわち，$\frac{y+y'}{2}=m\frac{x+x'}{2}$．
$\therefore\ y+y'=m(x+x')$ (*)．線分 PP' は l と直交するから，$\frac{y'-y}{x'-x}=-\frac{1}{m}$ (**)． (*)，(**) を連立させて解くと，
$x'=\frac{1}{m^2+1}[(1-m^2)x+2my]$，$y'=\frac{1}{m^2+1}[2mx+(m^2-1)y]$．すなわち，
$\mathrm{x}'=\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} 1-m^2&2m\\ 2m&m^2-1\end{pmatrix}\mathrm{x}$．ゆえに，$A=\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} 1-m^2&2m\\ 2m&m^2-1\end{pmatrix}$．

18. (1) 2 次行列のときに示す．$A=\begin{pmatrix} a&b\\ c&d\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} p&q\\ r&s\end{pmatrix}$ とおく．

$$\begin{aligned}|AB|&=\begin{vmatrix} ap+br&aq+bs\\ cp+dr&cq+ds\end{vmatrix}=(ap+br)(cq+ds)-(aq+bs)(cp+dr)\\ &=apds+brcq-aqdr-bscp.\\ |A||B|&=(ad-bc)(ps-qr)=adps-adqr-bcps+bcqr.\\ &\therefore\ |AB|=|A||B|.\end{aligned}$$

(2) 3 次行列のときに示す．$A=\begin{pmatrix} a&b&c\\ d&e&f\\ g&h&i\end{pmatrix}$ とおく．サラスの公式より，

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg.$$
$$|{}^tA| = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ahf - dbi - gec.$$
$$\therefore\ |A| = |{}^tA|.$$

メモ: [18.](1)(2) の公式は，n 次行列でもなりたつ．

19. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} x & y \\ x+z & y+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & y \\ z+w & w \end{pmatrix}$．

ゆえに次の１次方程式系をみたすことが必要十分である: $\begin{cases} y = 0 \\ x = w \end{cases}$．この条件より求める行列は $\begin{pmatrix} x & 0 \\ z & x \end{pmatrix}$（$x, z$ は任意）．

20. (1)（左辺）$= yz^2 + zx^2 + xy^2 - zy^2 - xz^2 - yx^2$.
（右辺）$= -(x-y)(z^2 - xz - yz + xy) = -xz^2 + x^2z + xyz - x^2y + yz^2 - xyz - y^2z + xy^2$
$= -xz^2 + x^2z - x^2y + yz^2 - y^2z + xy^2$． ゆえに （左辺）=（右辺）． (q.e.d.)

（別解 I）（左辺）$= yz^2 + zx^2 + xy^2 - zy^2 - xz^2 - yx^2 = (z-y)x^2 + (y^2 - z^2)x + yz^2 - zy^2 = -(y-z)[x^2 - (y+z)x + yz] = -(y-z)(x-y)(x-z) =$（右辺）． (q.e.d.)

（別解 II）両辺を x についての多項式と思って等式を示す．まず左辺は x については２次式であり x^2 の係数は $(z-y)$ である．次に左辺において $x = y$，$x = z$ を各々代入すると０になる．このことから 因数定理より左辺は $(x-y)$，$(x-z)$ で割り切れるので，結局 （左辺）$= (z-y)(x-y)(x-z) =$（右辺）． (q.e.d.)

(2) $\omega^3 = 1$，$\omega + \omega^2 = -1$ に注意しながら両辺を計算すれば
（左辺）$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$,
（右辺）$= (a+b+c)[a^2 + (\omega b + \omega^2 c + \omega^2 b + \omega c)a + (\omega b + \omega^2 c)(\omega^2 b + \omega c)]$
$= (a+b+c)[a^2 + (-b-c)a + (b^2 - bc + c^2)] = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.
ゆえに （左辺）=（右辺）． (q.e.d.)

（別解）両辺を a についての多項式と思って等式を示す．まず左辺は a については３次式であり a^3 の係数は１である．次に左辺において $a = -b-c$，$a = -\omega b - \omega^2 c$，$a = -\omega^2 b - \omega c$ を各々代入する．$a = -b-c$ を代入した場合は２行と３行を１行に加えることで１行が０ベクトルになり，行列式 $= 0$ がわかる．$a = -\omega b - \omega^2 c$ の場合は $\omega^2 \times$（２行）と $\omega \times$（３行）を１行に加えることで１行が０ベクトルになり，行列式 $= 0$ がわかる．$a = -\omega^2 b - \omega c$ の場合は $\omega \times$（２行）と $\omega^2 \times$（３行）を１行に加えることで１行が０ベクトルになり，行列式 $= 0$ がわかる．したがって，因数定理より行列式は右辺のように分解される． (q.e.d.)

21. (1) $\mathrm{x}\,{}^t\mathrm{y} = (1 + 2t + 3t^2 + \cdots + nt^{n-1})$ $(*)$．ゆえに $t \neq 1$ のとき $(*) = ((t + t^2 + \cdots + t^n)')$ $= \left((\frac{t - t^{n+1}}{1-t})'\right) = \left(\frac{1-(n+1)t^n + nt^{n+1}}{(1-t)^2}\right)$． $t = 1$ のとき $(*) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$．

(2) ${}^t\mathrm{x}\mathrm{y} = \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & t^{n-1} \\ 2 & 2t & \dots & 2t^{n-1} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ n & nt & \dots & nt^{n-1} \end{pmatrix}$． (3) $\mathrm{x}\,{}^t\mathrm{x} = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$．

(4) ${}^t\mathrm{y}\mathrm{y} = \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & t^{n-1} \\ t & t^2 & \dots & t^n \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ t^{n-1} & t^n & \dots & t^{2n-2} \end{pmatrix}$．

(5) 素直に計算してもよいが，ここでは以下のように変形する．${}^t\mathrm{x}\mathrm{y}\,{}^t({}^t\mathrm{x}\mathrm{y}) = {}^t\mathrm{x}\mathrm{y}({}^t\mathrm{y}\mathrm{x}) =$

${}^t\mathtt{x}(\mathtt{y}{}^t\mathtt{y})\mathtt{x} = (\mathtt{y}{}^t\mathtt{y}$ はスカラーゆえ$) = (\mathtt{y}{}^t\mathtt{y})({}^t\mathtt{x}\mathtt{x}) = (1+t^2+\cdots+t^{2n-2})\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 2 & 4 & \ldots & 2n \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ n & 2n & \ldots & n^2 \end{pmatrix}$ $(*)$.

$t \neq \pm 1$ ならば $(*) = \dfrac{1-t^{2n}}{1-t^2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 2 & 4 & \ldots & 2n \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ n & 2n & \ldots & n^2 \end{pmatrix}$. $t = \pm 1$ ならば $(*) = n\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 2 & 4 & \ldots & 2n \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ n & 2n & \ldots & n^2 \end{pmatrix}$.

21.1 $({}^t\mathtt{a}\mathtt{b})^n = \underbrace{({}^t\mathtt{a}\mathtt{b})({}^t\mathtt{a}\mathtt{b})\ldots({}^t\mathtt{a}\mathtt{b})}_{n} = {}^t\mathtt{a}\underbrace{(\mathtt{b}{}^t\mathtt{a})(\mathtt{b}{}^t\mathtt{a})\ldots(\mathtt{b}{}^t\mathtt{a})}_{n-1}\mathtt{b}$ $(*)$. ここで $(\mathtt{b}{}^t\mathtt{a})$ はスカラーだから， $(*) = (\mathtt{b}{}^t\mathtt{a})^{n-1}({}^t\mathtt{a}\mathtt{b}) = (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^{n-1}\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \ldots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \ldots & a_2b_n \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \ldots & a_nb_n \end{pmatrix}$.

22. (1) $\left(\begin{array}{|cc|c|} \hline 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ \hline \end{array}\right)\left(\begin{array}{|cc|c|} \hline 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ \hline \end{array}\right)$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 0 \\ 15 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) $\left(\begin{array}{|ccc|c|} \hline 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline \end{array}\right)\left(\begin{array}{|ccc|c|} \hline 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}\right)$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{pmatrix} A & -E \\ E & A^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & E-A^{-1} & -E \\ -E & E+A & -A \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} AA^{-1}+E & A(E-A^{-1})-(E+A) & -A+A \\ A^{-1}-A^{-1} & E-A^{-1}+A^{-1}(E+A) & -E-A^{-1}A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2E & -2E & O \\ O & 2E & -2E \end{pmatrix}.$$

23.* $A = (a_{ij})$，$B = (b_{ij})$ とする．${}^t(AB)$ の (i,j) 成分は AB の (j,i) 成分であり，それは

$$\sum_{k=1}^{m} a_{jk}b_{ki} \tag{14}$$

で表される．一方，${}^tA = (\tilde{a}_{ij})$，${}^tB = (\tilde{b}_{ij})$ とおくと，${}^tB{}^tA$ の (i,j) 成分は

$$\sum_{k=1}^{m} \tilde{b}_{ik}\tilde{a}_{kj} = \sum_{k=1}^{m} b_{ki}a_{jk}. \tag{15}$$

(14),(15) より，${}^t(AB)$ と ${}^tB{}^tA$ の各成分が一致したから，${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$． (q.e.d.)

24. メモ: [24.] の証明では，“正方行列 M に対して X が存在して $MX = E$ または $XM = E$ のどちらか一方がなりたてば M は正則になる” という定理をつかっています．

24. （必要性）$A=\begin{pmatrix} P & Q \\ O & S \end{pmatrix}$ が正則であるとすると，逆行列 $X=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$ を持つ．（ただし X_{11}，X_{22} はそれぞれ r,s 次行列とする．） ここで

$$AX=\begin{pmatrix} PX_{11}+QX_{21} & PX_{12}+QX_{22} \\ SX_{21} & SX_{22} \end{pmatrix}=E$$

より $SX_{22}=E_s$ を得て，S は正則となる．そのことと $SX_{21}=O$ より，左から S^{-1} をかけて $X_{21}=O$ を得る．これを $PX_{11}+QX_{21}=E_r$ に代入して $PX_{11}=E_r$ を得る．よって P も正則である．ゆえに P,S は共に正則となる．($XA=\begin{pmatrix} X_{11}P & X_{11}Q+X_{12}S \\ X_{21}P & X_{21}Q+X_{22}S \end{pmatrix}=E$ を用いれば $X_{11}P=E_r$，$X_{22}S=E_s$ が得られる．)

（十分性）P,S が共に正則とする．このとき $X=\begin{pmatrix} P^{-1} & -P^{-1}QS^{-1} \\ O & S^{-1} \end{pmatrix}$ とおくと $AX=XA=E$ がなりたち，X は A の逆行列となる．ゆえに A は正則となる． (q.e.d.)

25.* $\Theta_\theta\Theta_\phi=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi & -\cos\theta\sin\phi-\sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi & -\sin\theta\sin\phi+\cos\theta\cos\phi \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(\theta+\phi) & -\sin(\theta+\phi) \\ \sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{pmatrix}=\Theta_{\theta+\phi}$

となることに注意すると，

与式$=\begin{pmatrix} (\cos\alpha\cos\beta)\Theta_\theta\Theta_\phi-(\sin\alpha\sin\beta)\Theta_\theta\Theta_\phi & -(\cos\alpha\sin\beta)\Theta_\theta\Theta_\phi-(\sin\alpha\cos\beta)\Theta_\theta\Theta_\phi \\ (\sin\alpha\cos\beta)\Theta_\theta\Theta_\phi+(\cos\alpha\sin\beta)\Theta_\theta\Theta_\phi & -(\sin\alpha\sin\beta)\Theta_\theta\Theta_\phi+(\cos\alpha\cos\beta)\Theta_\theta\Theta_\phi \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} (\cos(\alpha+\beta))\Theta_\theta\Theta_\phi & -(\sin(\alpha+\beta))\Theta_\theta\Theta_\phi \\ (\sin(\alpha+\beta))\Theta_\theta\Theta_\phi & (\cos(\alpha+\beta))\Theta_\theta\Theta_\phi \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\cos(\alpha+\beta))\Theta_{\theta+\phi} & -(\sin(\alpha+\beta))\Theta_{\theta+\phi} \\ (\sin(\alpha+\beta))\Theta_{\theta+\phi} & (\cos(\alpha+\beta))\Theta_{\theta+\phi} \end{pmatrix}.$

26. 各行列を A とおく．以下，いくらかの基本変形をまとめて行っているところもある．はじめのうちは，変形の内容も簡潔に矢印に付記することが望ましい．

(1) $\begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \\ 8 & 1 & 1 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & -7 & -7 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & -7 & -7 \end{pmatrix}\longrightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -7 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\quad\therefore\ r(A)=2.$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -2 & -3 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -2 & -3 \end{pmatrix}\longrightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 17 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 17 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 17 \end{pmatrix}\longrightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{pmatrix}\longrightarrow E_4.\quad\therefore\ r(A)=4.$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\therefore\ r(A) = 3.$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} E_3 & O \end{pmatrix}. \quad \therefore\ r(A) = 3.$

(5) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 17 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 17 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 17 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 17 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 18 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 18 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 80 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 80 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 80 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \therefore\ r(A) = 4.$$

(6) (i) $x \neq 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & x & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & x & \dots & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & x \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1/x \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1/x \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1/x \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & x \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1/x \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1/x \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1/x \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x-(n-1)/x \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & x-(n-1)/x \end{pmatrix}.$$

ここで $x-(n-1)/x = 0$ すなわち $x = \pm\sqrt{n-1}$ のとき，$r(A) = n-1$.
$x-(n-1)/x \neq 0$ すなわち $x \neq \pm\sqrt{n-1}$ のとき，$r(A) = n$.

(ii) $x = 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} E_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}. \quad \therefore\ r(A) = 2.$$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{n-1}$ のとき $r(A) = n-1$，$x = 0$ のとき $r(A) = 2$，それ以外のとき $r(A) = n$.

27. (1) $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/9 & O \\ O & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$

(2) $\begin{pmatrix} -4 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} & O \\ O & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} & O \\ O & \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$ ゆえ，(3) の結果を利用して，

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{matrix} & E \\ O & \begin{matrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{matrix} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} & -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \\ O & \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{matrix} & -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ O & \begin{matrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 13 \\ -3 & -2 & 8 & -21 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(5) $\begin{pmatrix} A & O \\ B & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}$ ゆえ，(3) の結果を利用して，

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{matrix} & O \\ E & \begin{matrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{matrix} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} & O \\ -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{matrix} & O \\ -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ -5 & 13 & 2 & 1 \\ 8 & -21 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

(6) $\begin{pmatrix} E & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & P \end{pmatrix}$ の形になると予想し計算してみると，

$$\begin{pmatrix} E & A \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & B^{-1} + AP \\ O & E \end{pmatrix}.$$

これが $E = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & E_s \end{pmatrix}$ となればよいので，$P = -A^{-1}B^{-1}$ を得る．またこのとき，
$\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}B^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & A \\ B & O \end{pmatrix} = E$ となる． $\therefore$ $\begin{pmatrix} E & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}B^{-1} \end{pmatrix}$.

（もちろん，$\begin{pmatrix} E & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$ とおいて解いてもよい）

28. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 5/2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$． ゆえに $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 5/2 & -2 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ a & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & a & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -a \\ 0 & a & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -a \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & a & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -a & -a^2 \\ 0 & 0 & a & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -a & -a^2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & a & a^2 & a^3 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -a & -a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -a & -a^2 & -a^3 \end{pmatrix}. \quad \text{ゆえに} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -a \\ 0 & -1 & -a & -a^2 \\ -1 & -a & -a^2 & -a^3 \end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{pmatrix} 7 & -8 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -8 & 8 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & -13 & 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1/3 & -4/3 \\ 0 & 6 & -13 & 1 & 0 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2/3 & -5/3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2/3 & -5/3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -8/3 & -8/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -13/3 & -10/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

ゆえに $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -8/3 & -8/3 \\ -2 & -13/3 & -10/3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$

(4)* $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 & b-a & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a & b & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 & b-a & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a-b & b-a & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{a-b} & 0 & 0 & \frac{-1}{a-b} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{a-b} & \frac{-1}{a-b} & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{a-b} & 0 & 0 & \frac{-1}{a-b} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{a-b} & \frac{-1}{a-b} & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+b & \frac{-b}{a-b} & 0 & 0 & \frac{a}{a-b} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{a-b} & 0 & 0 & \frac{-1}{a-b} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{a-b} & \frac{-1}{a-b} & 0 \\ 0 & 0 & a+b & 0 & 0 & \frac{-b}{a-b} & \frac{a}{a-b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+b & \frac{-b}{a-b} & 0 & 0 & \frac{a}{a-b} \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{a-b} & 0 & 0 & \frac{-1}{a-b} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{a-b} & \frac{-1}{a-b} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-b}{a^2-b^2} & \frac{a}{a^2-b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-b}{a^2-b^2} & 0 & 0 & \frac{a}{a^2-b^2} \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{a-b} & 0 & 0 & \frac{-1}{a-b} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{a^2-b^2} & \frac{-b}{a^2-b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-b}{a^2-b^2} & \frac{a}{a^2-b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-b}{a^2-b^2} & 0 & 0 & \frac{a}{a^2-b^2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{a^2-b^2} & 0 & 0 & \frac{-b}{a^2-b^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{a^2-b^2} & \frac{-b}{a^2-b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-b}{a^2-b^2} & \frac{a}{a^2-b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-b}{a^2-b^2} & 0 & 0 & \frac{a}{a^2-b^2} \end{pmatrix}.$$

ゆえに $A^{-1} = \dfrac{1}{a^2-b^2} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & -b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ -b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$

29. $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = E$ を示せばよい.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E.$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E. \qquad \text{(q.e.d.)}$$

30. $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ の各辺の転置を取って，${}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = E$.
$\therefore\ {}^t(A^{-1})\,{}^tA = {}^tA\,{}^t(A^{-1}) = E$. $\quad\therefore\ ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$. (q.e.d.)

31.* 1 列から $(n-1)$ 列までを n 列に加えると，

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x & \dots & x \\ x & 1 & x & \dots & x \\ x & x & 1 & \dots & x \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ x & x & x & \dots & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x & x & \dots & 1+(n-1)x \\ x & 1 & x & \dots & 1+(n-1)x \\ x & x & 1 & \dots & 1+(n-1)x \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ x & x & x & \dots & 1+(n-1)x \end{pmatrix} \tag{16}$$

ここで $1+(n-1)x \neq 0$，すなわち $x \neq -\frac{1}{n-1}$ のとき，

$$(16) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x & x & \dots & 1 \\ x & 1 & x & \dots & 1 \\ x & x & 1 & \dots & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ x & x & x & \dots & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1-x & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & \dots & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

さらに $x \neq 1$ のとき，

$$(17) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow E_n. \qquad \therefore\ r(A) = n. \tag{18}$$

また (17) で $x = 1$ のとき，

$$(17) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow F_{nn}(1). \qquad \therefore\ r(A) = 1. \tag{19}$$

(16) にもどって，$x = -\frac{1}{n-1}$ のとき，$x \neq 1, 0$ に注意して，

$$(16) = \begin{pmatrix} 1 & x & x & \dots & 0 \\ x & 1 & x & \dots & 0 \\ x & x & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ x & x & x & \dots & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1-x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 1-x & 0 \\ x & x & \dots & x & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow F_{nn}(n-1)$. $\quad\therefore\ r(A) = n-1$.

以上まとめて，$x = 1$ のとき $r(A) = 1$，$x = -\frac{1}{n-1}$ のとき $r(A) = n-1$，それ以外のとき $r(A) = n$.

32. 以下，$\alpha, \beta, \gamma, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ は任意定数である．

(1) 拡大係数行列 $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & -a & -a & a \end{pmatrix}$ は基本変形の必要なし．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) $\widetilde{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & 0 & -5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w & y & z & x \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 & a & 4 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -a & -4 \end{pmatrix}.$

$$\therefore\ \begin{pmatrix} w \\ y \\ z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}.$$