線形代数I 演習問題の答え (1)

by K. Asai

1. (1) $S = (x, y, z)$ とおく．$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ より $\begin{pmatrix} 4-1 \\ -4+2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-2 \end{pmatrix}$．ゆえに $x = 4$，$y = -2$，$z = 0$． すなわち $S = (4, -2, 0)$．

(2) 原点を O とする．$\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$．ゆえに $G = (2, -2, 2)$．

(3)

$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS}\right) - \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\,\overrightarrow{PS} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1.1* $\triangle ABC$，$\triangle OBC$ の重心をそれぞれE，F とし，$\overrightarrow{OA} = \mathsf{a}$，$\overrightarrow{OB} = \mathsf{b}$，$\overrightarrow{OC} = \mathsf{c}$ とおく．

$$t\,\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + u\,\overrightarrow{AF} \tag{11}$$

となるような，$0 \leq t, u \leq 1$ なる t, u があれば，2 つの線分 OE と AF は交わる．そこでこのような t, u を見つけてみる．

$$t\,\overrightarrow{OE} = \tfrac{t}{3}(\mathsf{a} + \mathsf{b} + \mathsf{c}),\ \ \overrightarrow{OA} + u\,\overrightarrow{AF} = \mathsf{a} + u\left(\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA}\right) = \mathsf{a} + u\left[\tfrac{1}{3}(\mathsf{b} + \mathsf{c}) - \mathsf{a}\right]$$

なので，(11) より，

$$\begin{aligned} & \tfrac{t}{3}(\mathsf{a} + \mathsf{b} + \mathsf{c}) = \mathsf{a} + u\left[\tfrac{1}{3}(\mathsf{b} + \mathsf{c}) - \mathsf{a}\right] \\ \Longleftrightarrow\ \ & \left(\tfrac{t}{3} - 1 + u\right)\mathsf{a} + \left(\tfrac{t}{3} - \tfrac{u}{3}\right)\mathsf{b} + \left(\tfrac{t}{3} - \tfrac{u}{3}\right)\mathsf{c} = \mathsf{0} \\ \Longleftrightarrow\ \ & \tfrac{t}{3} - 1 + u = 0,\ \tfrac{t}{3} - \tfrac{u}{3} = 0 \iff t = u = \tfrac{3}{4}. \end{aligned}$$

したがって，OE と AF は 1 点で交わる．その点を G とすると，$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\mathsf{a} + \mathsf{b} + \mathsf{c})$．この式は $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}$ について対称的になっているので，OE と他の（重心と頂点を結ぶ）線分も全く同じ点 G で交わることは明らかである．ゆえに題意の線分は 1 点 G で交わる． (q.e.d.)

2. (1) $||\mathsf{a}|| \cdot ||\mathsf{b}|| - |(\mathsf{a}, \mathsf{b})| = ||\mathsf{a}|| \cdot ||\mathsf{b}|| - |\,||\mathsf{a}|| \cdot ||\mathsf{b}|| \cdot \cos\theta\,| = ||\mathsf{a}|| \cdot ||\mathsf{b}|| - ||\mathsf{a}|| \cdot ||\mathsf{b}|| \cdot |\cos\theta| = ||\mathsf{a}|| \cdot ||\mathsf{b}||(1 - |\cos\theta|) \geq 0$． $\therefore\ |(\mathsf{a}, \mathsf{b})| \leq ||\mathsf{a}|| \cdot ||\mathsf{b}||$． (q.e.d.)

(2) $||\mathsf{a} + \mathsf{b}||^2 - ||\mathsf{a} - \mathsf{b}||^2 = (\mathsf{a} + \mathsf{b}, \mathsf{a} + \mathsf{b}) - (\mathsf{a} - \mathsf{b}, \mathsf{a} - \mathsf{b}) = (\mathsf{a}, \mathsf{a}) + 2(\mathsf{a}, \mathsf{b}) + (\mathsf{b}, \mathsf{b}) - [(\mathsf{a}, \mathsf{a}) - 2(\mathsf{a}, \mathsf{b}) + (\mathsf{b}, \mathsf{b})] = 4(\mathsf{a}, \mathsf{b})$． (q.e.d.)

(3) $||k\mathsf{a}||^2 = (k\mathsf{a},\ k\mathsf{a}) = k^2(\mathsf{a}, \mathsf{a}) = k^2||\mathsf{a}||^2$. ゆえに $||k\mathsf{a}|| = |k|\,||\mathsf{a}||$． (q.e.d.)

（別解）$\mathsf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とおくと，$||k\mathsf{a}|| = \sqrt{(ka)^2 + (kb)^2 + (kc)^2} = |k|\sqrt{a^2+b^2+c^2} = |k|\,||\mathsf{a}||$. (q.e.d.)

(4) 両辺とも非負なので，両辺を 2 乗して $||\mathsf{a}+\mathsf{b}||^2 \le (||\mathsf{a}|| + ||\mathsf{b}||)^2$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}&(||\mathsf{a}|| + ||\mathsf{b}||)^2 - ||\mathsf{a}+\mathsf{b}||^2 = (||\mathsf{a}|| + ||\mathsf{b}||)^2 - (\mathsf{a}+\mathsf{b}, \mathsf{a}+\mathsf{b})\\ &= ||\mathsf{a}||^2 + 2||\mathsf{a}||\cdot||\mathsf{b}|| + ||\mathsf{b}||^2 - [||\mathsf{a}||^2 + 2(\mathsf{a},\mathsf{b}) + ||\mathsf{b}||^2] = 2[||\mathsf{a}||\cdot||\mathsf{b}|| - (\mathsf{a},\mathsf{b})]\\ &= 2\,(||\mathsf{a}||\cdot||\mathsf{b}|| - ||\mathsf{a}||\cdot||\mathsf{b}||\cos\theta) = 2||\mathsf{a}||\cdot||\mathsf{b}||(1-\cos\theta) \ge 0. \qquad \text{(q.e.d.)}\end{aligned}$$

(5) $||\mathsf{a}+\mathsf{b}+\mathsf{c}||^2 - ||\mathsf{a}||^2 - ||\mathsf{b}||^2 - ||\mathsf{c}||^2 = (\mathsf{a}+\mathsf{b}+\mathsf{c},\, \mathsf{a}+\mathsf{b}+\mathsf{c}) - ||\mathsf{a}||^2 - ||\mathsf{b}||^2 - ||\mathsf{c}||^2 = ||\mathsf{a}||^2 + ||\mathsf{b}||^2 + ||\mathsf{c}||^2 + 2(\mathsf{a},\mathsf{b}) + 2(\mathsf{b},\mathsf{c}) + 2(\mathsf{c},\mathsf{a}) - ||\mathsf{a}||^2 - ||\mathsf{b}||^2 - ||\mathsf{c}||^2 = 2[(\mathsf{a},\mathsf{b}) + (\mathsf{b},\mathsf{c}) + (\mathsf{c},\mathsf{a})]$. (q.e.d.)

3. (1) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -\dfrac{3}{2}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = -\dfrac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \dfrac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

これは，与えられたベクトルが同一平面内にあることを示す．ゆえに線形従属．

（別解）与えられたベクトルが張る平行 6 面体の体積 V を計算すると，$V = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$．ゆえに線形従属．

(2) 与えられたベクトルが張る平行 6 面体の体積 V を計算すると，$V = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \ne 0$. ゆえに線形独立．

4. $\mathsf{e}_1 = \mathsf{a}+\mathsf{c}$，$\mathsf{e}_2 = -\mathsf{b}-\mathsf{c}$，$\mathsf{e}_3 = -\mathsf{b}-2\mathsf{c}$ なので，

(1) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3(\mathsf{a}+\mathsf{c}) + 2(-\mathsf{b}-\mathsf{c}) + (-\mathsf{b}-2\mathsf{c}) = 3\mathsf{a} - 3\mathsf{b} - \mathsf{c}$. (2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathsf{a}$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathsf{a}+\mathsf{c} - 3(-\mathsf{b}-\mathsf{c}) + 2(-\mathsf{b}-2\mathsf{c}) = \mathsf{a}+\mathsf{b}$. (4) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathsf{0}$ (0 ベクトル).

4.1 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと，t, u, v についての 1 次方程式系:

$$\begin{cases} t+u+v = x \\ 2t+u = y \\ 3t+u+v = z \end{cases}$$

が得られる．これを解いて，$t = \frac{z-x}{2}$，$u = y-(z-x) = x+y-z$，$v = x-t-u = x - \frac{z-x}{2} - (x+y-z) = \frac{x-2y+z}{2}$．ゆえに，$\mathsf{x} = \frac{z-x}{2}\mathsf{a} + (x+y-z)\mathsf{b} + \frac{x-2y+z}{2}\mathsf{c}$.

（別解）$\mathsf{e}_1 = -\frac{1}{2}(\mathsf{a} - 2(\mathsf{b}-\mathsf{c}) - 3\mathsf{c})$，$\mathsf{e}_2 = \mathsf{b}-\mathsf{c}$，$\mathsf{e}_3 = \frac{1}{2}(\mathsf{a} - 2(\mathsf{b}-\mathsf{c}) - \mathsf{c})$．これより，

$\mathsf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\mathsf{e}_1 + y\mathsf{e}_2 + z\mathsf{e}_3 = -x\frac{1}{2}(\mathsf{a} - 2(\mathsf{b}-\mathsf{c}) - 3\mathsf{c}) + y(\mathsf{b}-\mathsf{c}) + z\frac{1}{2}(\mathsf{a} - 2(\mathsf{b}-\mathsf{c}) - \mathsf{c})$

$= \frac{z-x}{2}\mathsf{a} + (x+y-z)\mathsf{b} + \frac{x-2y+z}{2}\mathsf{c}$.

5. (1) 与式を変形して $9x = 5-4y$．この式を t とおけば，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{9} \\ \frac{5}{4} - \frac{t}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} +$

$t\begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$. $(t \longrightarrow 36t$ とおきかえて，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}$.)

(2) $-x-3 = 2y = z = t$ とおいて，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t-3 \\ \frac{t}{2} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. $(t \longrightarrow 2t$ とおきかえて，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.)

(3) $4x+3 = 6y+5 = -2z+1 = t$ とおいて，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{4} - \frac{3}{4} \\ \frac{t}{6} - \frac{5}{6} \\ -\frac{t}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. $(t \longrightarrow 12t$ とおきかえて，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$.)

6. 1 つ 1 つの方程式で表される各平面の法線ベクトルはそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ であり，これらに垂直なベクトル $\mathtt{v}$ は，与えられた直線 l の方向ベクトルである．$\mathtt{v}$ を求めると $\mathtt{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$. あとは l 上の点 P を 1 つ求めるためにたとえば $P = (x, y, 0)$ とおけば $x = 3$，$y = 2$. よって l のベクトル表示は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

7. 2 平面の法線ベクトル $\mathtt{u}$，$\mathtt{v}$ の交角 θ に対し，$0 \leq \theta \leq \pi$ となるから，$\sin\theta \geq 0$. そこで，$\sin^2\theta$ を求めると，

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{||\mathtt{u}||^2||\mathtt{v}||^2\cos^2\phi}{||\mathtt{u}||^2||\mathtt{v}||^2} = 1 - \frac{(\mathtt{u}, \mathtt{v})^2}{||\mathtt{u}||^2||\mathtt{v}||^2} = \frac{13}{28}.$$
$$\therefore\ \sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{7}}.$$

8. (1) 平面の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に垂直なので，$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ と求まる．またこの平面は原点を通る．これより平面の方程式は，$2x + y - 4z = 0$.

(2) 平面の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ に垂直なので，$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 17 \\ -6 \end{pmatrix}$. またこの平面は $(-1, 1, 3)$ を通るので，平面の方程式は，$-8(x+1) + 17(y-1) - 6(z-3) = 0$. すなわち，$-8x + 17y - 6z = 7$.

(3) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2t \\ 1+t \\ 2+4t \end{pmatrix}$. ゆえに $t = \dfrac{x+1}{2}$，$t = y - 1$，$t = \dfrac{z-2}{4}$. これより求める方程式は，$\dfrac{x+1}{2} = y - 1 = \dfrac{z-2}{4}$.

(4) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ -2 \\ -3+9t \end{pmatrix}$. t を消去して $x - 1 = \dfrac{z+3}{9}$，$y = -2$. （このように，方向ベクトルに 0 が含まれているときは，式が 2 つに分かれるので注意）

(5) 平面の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ に垂直なので，$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ -15 \end{pmatrix}$．またこの平面は $(3, 4, 5)$ を通るので，平面の方程式は，$3(x-3) - 10(y-4) - 15(z-5) = 0$．すなわち，$3x - 10y - 15z = -106$．

9. (1) 平面の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ で，これに垂直なベクトルとして，たとえば $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を取ることができる.（それらは1通りには決まらない）またこの平面は $(1, 1, 0)$ を通る．これらより平面のベクトル表示 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を得る．

(2) 平面の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で，これに垂直なベクトルとして，$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を取れる．またこの平面は原点を通る．これらより平面のベクトル表示 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を得る．

(3) 平面の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$ で，これに垂直なベクトルとして，$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を取れる．またこの平面は $(5, 0, 0)$ を通る．これらより平面のベクトル表示 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を得る．

10. (1) $\begin{pmatrix} 5 & 15 & 10 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix}$.　（行の入れ替え）

(3) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{pmatrix}$.　（列の入れ替え）

11.* 空間ベクトル a, a' の張る平行四辺形 P の面積 S は，$S = ||\mathsf{a} \times \mathsf{a}'||$ で表される．したがって

$$S^2 = (bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2 + (ab' - a'b)^2 \tag{12}$$

となる．一方 P の xy 平面への正射影 P_1 は $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ 0 \end{pmatrix}$ で張られる平行四辺形となる．その面積は $S_1 = |ab' - a'b|$ となる．同様に $S_2 = |bc' - b'c|$，$S_3 = |ac' - a'c|$ を得る．このことと (12) より $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ を得る．(q.e.d.)

12. (1) $\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (*) である． $\therefore\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$． (*) より，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} = A^3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{13}$$

(13) において $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は任意のベクトルなので，$A^3 = E_3$ であることがわかる．同様にして，$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を得る．ゆえに，

$$A^{3m} = E_3, \quad A^{3m+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{3m+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

メモ: A^2，A^3 を直接計算してももちろんよい．
(2)

$$T\mathtt{x} = \begin{pmatrix} 5x - 2y + 3z \\ 3x + 5y - 2z \\ -2x + 3y + 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\mathtt{x}. \qquad \therefore\ A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(3)

$$T\mathtt{x} = \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -x + 2y - z \\ -x - y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\mathtt{x}. \qquad \therefore\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = 3A.$$

$$\therefore\ A^n = 3A^{n-1} = 3^2A^{n-2} = \cdots = 3^{n-1}A = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

13. (1) $T = T_P$ とおくと，$P = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ となり，$S = T_Q$ とおくと，$Q = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ となる．$ST = T_QT_P = T_{QP} = T_A$ なので，

$$\therefore\ A = QP = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & -13 \\ 5 & -8 & -13 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) $TS = T_PT_Q = T_{PQ} = T_B$ なので，

$$\therefore\ B = PQ = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 2 \\ 8 & -2 & 3 \\ -3 & -8 & 3 \end{pmatrix}.$$

14. (1) $\dfrac{x}{3} = -y - 2 = \dfrac{z+1}{2} = t$ とおけば，l のベクトル表示は，

$$\mathtt{x} = \begin{pmatrix} 3t \\ -t - 2 \\ 2t - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ゆえに，l' のベクトル表示は，

$$\mathrm{x}' = A\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

ここから t を消去して，l' の方程式: $\dfrac{x-1}{14} = \dfrac{y+4}{12} = \dfrac{z+5}{9}$ を得る．

(2) $-\dfrac{x+2}{10} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-3}{12} = t$ とおけば，l のベクトル表示は，

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} -10t-2 \\ 3t+3 \\ 12t+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

ゆえに，l' のベクトル表示は，

$$\mathrm{x}' = A\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

これより l' の方程式は， $\dfrac{x+1}{10} = -\dfrac{y-3}{3} = -\dfrac{z-3}{12}$.

(3) S の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ で，これに垂直なベクトルとして，$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ を取れる．また S は $(1,-1,0)$ を通る．ゆえに S のベクトル表示は，

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

ゆえに，S' のベクトル表示は，

$$\mathrm{x}' = A\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 17 \\ 18 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

これを方程式に直す．S' の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 17 \\ 18 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\times 18 \\ 3\times 57 \\ -8\times 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-1/9)} \begin{pmatrix} 6 \\ -19 \\ 16 \end{pmatrix}$ とできる．また S' は $(4,2,1)$ を通る．ゆえに，S' の方程式は $6(x-4)-19(y-2)+16(z-1)=0$，すなわち，$6x-19y+16z=2$.

(4) S の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ で，これに垂直なベクトルとして，$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ を取れる．また S は $(0,0,1)$ を通る．ゆえに S のベクトル表示は，

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ゆえに，S' のベクトル表示は，

$$\mathrm{x}' = A\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

これを方程式に直す．S' の法線ベクトルは，$\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -14 \\ 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 1/2} \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$．また S' は $(3,2,1)$ を通る．ゆえに，S' の方程式は $6(x-3)-7(y-2)+5(z-1)=0$，すなわち，$6x-7y+5z=9$.

(5) S の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ で，これに垂直なベクトルとして，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を取れる．また S は $(0, d, 0)$ を通る．ゆえに S のベクトル表示は，

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ゆえに，S' のベクトル表示は，

$$\mathrm{x}' = A\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -2d \\ d \\ 2d \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

これを方程式に直す．S' の法線ベクトルは，$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-1/3)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$．$S'$ が $(-2d, d, 2d)$ を通ることに注意すれば，S' の方程式は $y - d - (z - 2d) = 0$，すなわち，$y - z = -d$.（これは原点に関して S と対称な平面になる）

15. メモ: [14.] と同様ですが，本問では直線，平面とも原点を通っているので，これらはどんな行列を使ったとしても必ず原点を通る像に移されることに注意します．また，一般に元の図形が原点を通るかどうかにかかわらず，直線が点に，平面が直線や点に移ってしまうこともあります．(2) 参照.

15. (1) $2x = -y = 3z = t$ とおいて，直線 l のベクトル表示 $\mathrm{x} = \begin{pmatrix} t/2 \\ -t \\ t/3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ を得る．ここで t を $6t$ とおき直せば $\mathrm{x} = t\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ のように分母を払える．ゆえに，l' のベクトル表示は，

$$\mathrm{x}' = A\mathrm{x} = t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 5 \\ -15 \\ -10 \end{pmatrix} = t'\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad (5t = t' \text{ とおいた})$$

これより l' の方程式は，$x = -\dfrac{y}{3} = -\dfrac{z}{2}$.

(2) 平面 S の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ で，これに垂直なベクトルとして，$\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ を取れる． また S は原点を通る．これらより S のベクトル表示 $\mathrm{x} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ を得る．ゆえに S' のベクトル表示は

$$\mathrm{x}' = A\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\left[t\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right] = t\begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

これらのベクトルは平行だから $2t + u = t'$ とおくとまとめることができて，$\mathrm{x}' = t'\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ (*)．これより S' は直線となることがわかる．(*) を方程式に直すと $-x = y/6 = z/5$.

16. 平面 S_d の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で，これに垂直なベクトルとして，$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

を取れる．また S_d は $(d,0,0)$ を通る．ゆえに S_d のベクトル表示は,

$$\mathtt{x} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ゆえに，$T_A(S_d) = S'_d$ のベクトル表示は,

$$\begin{aligned} \mathtt{x}' = A\mathtt{x} &= k\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= k\begin{pmatrix} 2d \\ d \\ d \end{pmatrix} + kt\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + ku\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

これを方程式に直す．S'_d の法線ベクトルは明らかに $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であり，S'_d が $(2kd, kd, kd)$ を通ることに注意すれば，S'_d の方程式は $x-2kd+y-kd+z-kd=0$，すなわち $x+y+z=4kd$. これが S_d の方程式と一致するので，$k=\frac{1}{4}$ となる．

17. (1) は (2) の特別な場合なので，(2) の解を示す．(2) 特殊な点を T_A で移した結果を式にすれば A を求められる．まず T_A は $l : y = mx$ に関する折り返しをあらわすのだから l 上の点の位置ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ は T_A によって動かない．また $\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$ を l に関して折り返すと $\begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}$ に移る．よって $A\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{pmatrix}$. これを解いて $A = \frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$. (1) は $m=2$ の場合だから $A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

（別解）(2) 平面上の点 P の位置ベクトルを $\mathtt{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$l : y = mx$ に関して P と対称の位置にある点 P' の位置ベクトルを $\mathtt{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とおく．すると，P と P' の中点は l 上にあるので，$(\mathtt{x}+\mathtt{x}')/2 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ とすれば $y_0 = mx_0$．すなわち，$\frac{y+y'}{2} = m\frac{x+x'}{2}$.
$\therefore\ y+y' = m(x+x')$ (*)．線分 PP' は l と直交するから，$\frac{y'-y}{x'-x} = -\frac{1}{m}$ (**)． (*)，(**) を連立させて解くと，
$x' = \frac{1}{m^2+1}[(1-m^2)x+2my]$，$y' = \frac{1}{m^2+1}[2mx+(m^2-1)y]$．すなわち，
$\mathtt{x}' = \frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}\mathtt{x}$．ゆえに，$A = \frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$.

18. (1) 2 次行列のときに示す．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおく．

$$\begin{aligned} |AB| &= \begin{vmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{vmatrix} = (ap+br)(cq+ds)-(aq+bs)(cp+dr) \\ &= apds+brcq-aqdr-bscp. \\ |A||B| &= (ad-bc)(ps-qr) = adps-adqr-bcps+bcqr. \\ &\therefore\ |AB| = |A||B|. \end{aligned}$$

(2) 3 次行列のときに示す．$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ とおく．サラスの公式より,

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg.$$

$$|{}^tA| = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ahf - dbi - gec.$$

$$\therefore\ |A| = |{}^tA|.$$

メモ: [18.](1)(2) の公式は，n 次行列でもなりたつ．

19. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} x & y \\ x+z & y+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & y \\ z+w & w \end{pmatrix}$.

ゆえに次の 1 次方程式系をみたすことが必要十分である: $\begin{cases} y = 0 \\ x = w \end{cases}$．この条件より求める行列は $\begin{pmatrix} x & 0 \\ z & x \end{pmatrix}$（$x, z$ は任意）．

20. (1)（左辺）$= yz^2 + zx^2 + xy^2 - zy^2 - xz^2 - yx^2$.
（右辺）$= -(x-y)(z^2 - xz - yz + xy) = -xz^2 + x^2z + xyz - x^2y + yz^2 - xyz - y^2z + xy^2$
$= -xz^2 + x^2z - x^2y + yz^2 - y^2z + xy^2$． ゆえに （左辺）=（右辺）． (q.e.d.)

（別解 I）（左辺）$= yz^2 + zx^2 + xy^2 - zy^2 - xz^2 - yx^2 = (z-y)x^2 + (y^2 - z^2)x + yz^2 - zy^2 = -(y-z)[x^2 - (y+z)x + yz] = -(y-z)(x-y)(x-z) =$（右辺）． (q.e.d.)

（別解 II）両辺を x についての多項式と思って等式を示す．まず左辺は x については 2 次式であり x^2 の係数は $(z-y)$ である．次に左辺において $x = y$，$x = z$ を各々代入すると 0 になる．このことから 因数定理より左辺は $(x-y)$，$(x-z)$ で割り切れるので，結局（左辺）$= (z-y)(x-y)(x-z) =$（右辺）． (q.e.d.)

(2) $\omega^3 = 1$，$\omega + \omega^2 = -1$ に注意しながら両辺を計算すれば
（左辺）$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$，
（右辺）$= (a+b+c)[a^2 + (\omega b + \omega^2 c + \omega^2 b + \omega c)a + (\omega b + \omega^2 c)(\omega^2 b + \omega c)]$
$= (a+b+c)[a^2 + (-b-c)a + (b^2 - bc + c^2)] = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.
ゆえに （左辺）=（右辺）． (q.e.d.)

（別解）両辺を a についての多項式と思って等式を示す．まず左辺は a については 3 次式であり a^3 の係数は 1 である．次に左辺において $a = -b-c$，$a = -\omega b - \omega^2 c$，$a = -\omega^2 b - \omega c$ を各々代入する．$a = -b-c$ を代入した場合は 2 行と 3 行を 1 行に加えることで 1 行が 0 ベクトルになり，行列式 $= 0$ がわかる．$a = -\omega b - \omega^2 c$ の場合は $\omega^2 \times$（2 行）と $\omega \times$（3 行）を 1 行に加えることで 1 行が 0 ベクトルになり，行列式 $= 0$ がわかる．$a = -\omega^2 b - \omega c$ の場合は $\omega \times$（2 行）と $\omega^2 \times$（3 行）を 1 行に加えることで 1 行が 0 ベクトルになり，行列式 $= 0$ がわかる．したがって，因数定理より行列式は右辺のように分解される． (q.e.d.)

21. (1) $\mathrm{x}{}^t\mathrm{y} = (1 + 2t + 3t^2 + \cdots + nt^{n-1})$ $(*)$．ゆえに $t \neq 1$ のとき $(*) = ((t + t^2 + \cdots + t^n)')$
$= \left((\frac{t - t^{n+1}}{1-t})'\right) = \left(\frac{1-(n+1)t^n + nt^{n+1}}{(1-t)^2}\right)$． $t = 1$ のとき $(*) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$.

(2) ${}^t\mathrm{x}\mathrm{y} = \begin{pmatrix} 1 & t & \ldots & t^{n-1} \\ 2 & 2t & \ldots & 2t^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & nt & \ldots & nt^{n-1} \end{pmatrix}$.　(3) $\mathrm{x}{}^t\mathrm{x} = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$.

(4) ${}^t\mathrm{y}\mathrm{y} = \begin{pmatrix} 1 & t & \ldots & t^{n-1} \\ t & t^2 & \ldots & t^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t^{n-1} & t^n & \ldots & t^{2n-2} \end{pmatrix}$.

(5) 素直に計算してもよいが，ここでは以下のように変形する．${}^t\mathrm{x}\mathrm{y}{}^t({}^t\mathrm{x}\mathrm{y}) = {}^t\mathrm{x}\mathrm{y}({}^t\mathrm{y}\mathrm{x}) =$

${}^t\mathtt{x}(\mathtt{y}^t\mathtt{y})\mathtt{x} = (\mathtt{y}^t\mathtt{y}$ はスカラーゆえ$) = (\mathtt{y}^t\mathtt{y})({}^t\mathtt{x}\mathtt{x}) = (1+t^2+\cdots+t^{2n-2})\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 2 & 4 & \ldots & 2n \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ n & 2n & \ldots & n^2 \end{pmatrix} (*)$.

$t \neq \pm 1$ ならば $(*) = \dfrac{1-t^{2n}}{1-t^2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 2 & 4 & \ldots & 2n \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ n & 2n & \ldots & n^2 \end{pmatrix}$. $t = \pm 1$ ならば $(*) = n\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 2 & 4 & \ldots & 2n \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ n & 2n & \ldots & n^2 \end{pmatrix}$.

21.1 $({}^t\mathtt{a}\mathtt{b})^n = \underbrace{({}^t\mathtt{a}\mathtt{b})({}^t\mathtt{a}\mathtt{b})\ldots({}^t\mathtt{a}\mathtt{b})}_{n} = {}^t\mathtt{a}\,\underbrace{(\mathtt{b}^t\mathtt{a})(\mathtt{b}^t\mathtt{a})\ldots(\mathtt{b}^t\mathtt{a})}_{n-1}\,\mathtt{b}\ (*)$. ここで $(\mathtt{b}^t\mathtt{a})$ はスカラーだから，$(*) = (\mathtt{b}^t\mathtt{a})^{n-1}({}^t\mathtt{a}\mathtt{b}) = (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^{n-1}\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \ldots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \ldots & a_2b_n \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \ldots & a_nb_n \end{pmatrix}$.

22. (1) $\left(\begin{array}{|cc|c|} \hline 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ \hline \end{array}\right)\left(\begin{array}{|cc|c|} \hline 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ \hline \end{array}\right)$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 0 \\ 15 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) $\left(\begin{array}{|ccc|c|} \hline 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline \end{array}\right)\left(\begin{array}{|ccc|c|} \hline 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}\right)$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{pmatrix} A & -E \\ E & A^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & E-A^{-1} & -E \\ -E & E+A & -A \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} AA^{-1}+E & A(E-A^{-1})-(E+A) & -A+A \\ A^{-1}-A^{-1} & E-A^{-1}+A^{-1}(E+A) & -E-A^{-1}A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2E & -2E & O \\ O & 2E & -2E \end{pmatrix}.$$

23.* $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ とする．${}^t(AB)$ の (i,j) 成分は AB の (j,i) 成分であり，それは

$$\sum_{k=1}^{m} a_{jk}b_{ki} \tag{14}$$

で表される．一方，${}^tA=(\tilde{a}_{ij})$，${}^tB=(\tilde{b}_{ij})$ とおくと，${}^tB{}^tA$ の (i,j) 成分は

$$\sum_{k=1}^{m} \tilde{b}_{ik}\tilde{a}_{kj} = \sum_{k=1}^{m} b_{ki}a_{jk}. \tag{15}$$

(14),(15) より，${}^t(AB)$ と ${}^tB{}^tA$ の各成分が一致したから，${}^t(AB)={}^tB{}^tA$．(q.e.d.)

24. メモ: [24.] の証明では，“正方行列 M に対して X が存在して $MX=E$ または $XM=E$ のどちらか一方がなりたてば M は正則になる” という定理をつかっています．

24. （必要性）$A=\begin{pmatrix} P & Q \\ O & S \end{pmatrix}$ が正則であるとすると，逆行列 $X=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$ を持つ．（ただし X_{11}，X_{22} はそれぞれ r, s 次行列とする．） ここで

$$AX=\begin{pmatrix} PX_{11}+QX_{21} & PX_{12}+QX_{22} \\ SX_{21} & SX_{22} \end{pmatrix}=E$$

より $SX_{22}=E_s$ を得て，S は正則となる．そのことと $SX_{21}=O$ より，左から S^{-1} をかけて $X_{21}=O$ を得る．これを $PX_{11}+QX_{21}=E_r$ に代入して $PX_{11}=E_r$ を得る．よって P も正則である．ゆえに P, S は共に正則となる．($XA=\begin{pmatrix} X_{11}P & X_{11}Q+X_{12}S \\ X_{21}P & X_{21}Q+X_{22}S \end{pmatrix}=E$ を用いれば $X_{11}P=E_r$，$X_{22}S=E_s$ が得られる．)

（十分性）P, S が共に正則とする．このとき $X=\begin{pmatrix} P^{-1} & -P^{-1}QS^{-1} \\ O & S^{-1} \end{pmatrix}$ とおくと $AX=XA=E$ がなりたち，X は A の逆行列となる．ゆえに A は正則となる． (q.e.d.)

25.* $\Theta_\theta\Theta_\phi=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi & -\cos\theta\sin\phi-\sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi & -\sin\theta\sin\phi+\cos\theta\cos\phi \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(\theta+\phi) & -\sin(\theta+\phi) \\ \sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{pmatrix}=\Theta_{\theta+\phi}$

となることに注意すると，

与式 $=\begin{pmatrix} (\cos\alpha\cos\beta)\Theta_\theta\Theta_\phi-(\sin\alpha\sin\beta)\Theta_\theta\Theta_\phi & -(\cos\alpha\sin\beta)\Theta_\theta\Theta_\phi-(\sin\alpha\cos\beta)\Theta_\theta\Theta_\phi \\ (\sin\alpha\cos\beta)\Theta_\theta\Theta_\phi+(\cos\alpha\sin\beta)\Theta_\theta\Theta_\phi & -(\sin\alpha\sin\beta)\Theta_\theta\Theta_\phi+(\cos\alpha\cos\beta)\Theta_\theta\Theta_\phi \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} (\cos(\alpha+\beta))\Theta_\theta\Theta_\phi & -(\sin(\alpha+\beta))\Theta_\theta\Theta_\phi \\ (\sin(\alpha+\beta))\Theta_\theta\Theta_\phi & (\cos(\alpha+\beta))\Theta_\theta\Theta_\phi \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\cos(\alpha+\beta))\Theta_{\theta+\phi} & -(\sin(\alpha+\beta))\Theta_{\theta+\phi} \\ (\sin(\alpha+\beta))\Theta_{\theta+\phi} & (\cos(\alpha+\beta))\Theta_{\theta+\phi} \end{pmatrix}.$

26. 各行列を A とおく．以下，いくらかの基本変形をまとめて行っているところもある．はじめのうちは，変形の内容も簡潔に矢印に付記することが望ましい．

(1) $\begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \\ 8 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & -7 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & -7 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\quad \therefore\ r(A)=2.$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 17 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 17 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 17 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{pmatrix} \longrightarrow E_4.\quad \therefore\ r(A)=4.$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\therefore\ r(A) = 3.$

(4) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} E_3 & O \end{pmatrix}. \quad \therefore\ r(A) = 3.$$

(5) $$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 17 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 17 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 17 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 17 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 18 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 18 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 80 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 80 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 80 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \therefore\ r(A) = 4.$$

(6) (i) $x \neq 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & x & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & x & \dots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & x \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1/x \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1/x \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1/x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & x \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1/x \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1/x \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1/x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x-(n-1)/x \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & x-(n-1)/x \end{pmatrix}.$$

ここで $x-(n-1)/x = 0$ すなわち $x = \pm\sqrt{n-1}$ のとき，$r(A) = n-1$.
$x-(n-1)/x \neq 0$ すなわち $x \neq \pm\sqrt{n-1}$ のとき，$r(A) = n$.

(ii) $x = 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} E_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}. \quad \therefore\ r(A) = 2.$$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{n-1}$ のとき $r(A) = n-1$，$x = 0$ のとき $r(A) = 2$，それ以外のとき $r(A) = n$.

27. (1) $$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/9 & O \\ O & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) $\begin{pmatrix} -4 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} & O \\ O & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} & O \\ O & \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$ ゆえ，(3) の結果を利用して，

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{matrix} & E \\ O & \begin{matrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{matrix} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} & -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \\ O & \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{matrix} & -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ O & \begin{matrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 13 \\ -3 & -2 & 8 & -21 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(5) $\begin{pmatrix} A & O \\ B & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}$ ゆえ，(3) の結果を利用して，

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{matrix} & O \\ E & \begin{matrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{matrix} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} & O \\ -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{matrix} & O \\ -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ -5 & 13 & 2 & 1 \\ 8 & -21 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

(6) $\begin{pmatrix} E & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & P \end{pmatrix}$ の形になると予想し計算してみると，

$$\begin{pmatrix} E & A \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & B^{-1} + AP \\ O & E \end{pmatrix}.$$

これが $E = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & E_s \end{pmatrix}$ となればよいので，$P = -A^{-1}B^{-1}$ を得る．またこのとき，
$\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}B^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & A \\ B & O \end{pmatrix} = E$ となる． $\therefore$ $\begin{pmatrix} E & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}B^{-1} \end{pmatrix}$.

（もちろん，$\begin{pmatrix} E & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$ とおいて解いてもよい）

28. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 5/2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$． ゆえに $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 5/2 & -2 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ a & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & a & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -a \\ 0 & a & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -a \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & a & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -a & -a^2 \\ 0 & 0 & a & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -a & -a^2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & a & a^2 & a^3 \end{pmatrix}
$$

$$
\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -a & -a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -a & -a^2 & -a^3 \end{pmatrix}. \quad \text{ゆえに} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -a \\ 0 & -1 & -a & -a^2 \\ -1 & -a & -a^2 & -a^3 \end{pmatrix}.
$$

(3) $\begin{pmatrix} 7 & -8 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -8 & 8 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & -13 & 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

$$
\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1/3 & -4/3 \\ 0 & 6 & -13 & 1 & 0 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2/3 & -5/3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2/3 & -5/3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -8/3 & -8/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -13/3 & -10/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.
$$

ゆえに $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -8/3 & -8/3 \\ -2 & -13/3 & -10/3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(4)* $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 & b-a & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a & b & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$$
\begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 & b-a & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a-b & b-a & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{a-b} & 0 & 0 & \frac{-1}{a-b} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{a-b} & \frac{-1}{a-b} & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{a-b} & 0 & 0 & \frac{-1}{a-b} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{a-b} & \frac{-1}{a-b} & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+b & \frac{-b}{a-b} & 0 & 0 & \frac{a}{a-b} \end{pmatrix} \longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{a-b} & 0 & 0 & \frac{-1}{a-b} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{a-b} & \frac{-1}{a-b} & 0 \\ 0 & 0 & a+b & 0 & 0 & \frac{-b}{a-b} & \frac{a}{a-b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+b & \frac{-b}{a-b} & 0 & 0 & \frac{a}{a-b} \end{pmatrix}
$$

$$
\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{a-b} & 0 & 0 & \frac{-1}{a-b} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{a-b} & \frac{-1}{a-b} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-b}{a^2-b^2} & \frac{a}{a^2-b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-b}{a^2-b^2} & 0 & 0 & \frac{a}{a^2-b^2} \end{pmatrix} \longrightarrow
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{a-b} & 0 & 0 & \frac{-1}{a-b} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{a^2-b^2} & \frac{-b}{a^2-b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-b}{a^2-b^2} & \frac{a}{a^2-b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-b}{a^2-b^2} & 0 & 0 & \frac{a}{a^2-b^2} \end{pmatrix} \longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{a^2-b^2} & 0 & 0 & \frac{-b}{a^2-b^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{a^2-b^2} & \frac{-b}{a^2-b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-b}{a^2-b^2} & \frac{a}{a^2-b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-b}{a^2-b^2} & 0 & 0 & \frac{a}{a^2-b^2} \end{pmatrix}.
$$

ゆえに $A^{-1} = \dfrac{1}{a^2-b^2} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & -b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ -b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

29. $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = E$ を示せばよい.

$$
\begin{aligned}
(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E. \\
(B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E. \qquad \text{(q.e.d.)}
\end{aligned}
$$

30. $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ の各辺の転置を取って，${}^t(AA^{-1})={}^t(A^{-1}A)=E$.

$\therefore\ {}^t(A^{-1})\,{}^tA={}^tA\,{}^t(A^{-1})=E$.　$\therefore\ ({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1})$.　(q.e.d.)

31.* 1 列から $(n-1)$ 列までを n 列に加えると，

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x & \dots & x \\ x & 1 & x & \dots & x \\ x & x & 1 & \dots & x \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ x & x & x & \dots & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x & x & \dots & 1+(n-1)x \\ x & 1 & x & \dots & 1+(n-1)x \\ x & x & 1 & \dots & 1+(n-1)x \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ x & x & x & \dots & 1+(n-1)x \end{pmatrix} \tag{16}$$

ここで $1+(n-1)x\neq 0$，すなわち $x\neq -\frac{1}{n-1}$ のとき，

$$(16)\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x & x & \dots & 1 \\ x & 1 & x & \dots & 1 \\ x & x & 1 & \dots & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ x & x & x & \dots & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1-x & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & \dots & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

さらに $x\neq 1$ のとき，

$$(17)\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow E_n. \qquad \therefore\ r(A)=n. \tag{18}$$

また (17) で $x=1$ のとき，

$$(17)\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow F_{nn}(1). \qquad \therefore\ r(A)=1. \tag{19}$$

(16) にもどって，$x=-\frac{1}{n-1}$ のとき，$x\neq 1,0$ に注意して，

$$(16)=\begin{pmatrix} 1 & x & x & \dots & 0 \\ x & 1 & x & \dots & 0 \\ x & x & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ x & x & x & \dots & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1-x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & \dots & 1-x & 0 \\ x & x & \dots & x & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow F_{nn}(n-1)$.　$\therefore\ r(A)=n-1$.

以上まとめて，$x=1$ のとき $r(A)=1$，$x=-\frac{1}{n-1}$ のとき $r(A)=n-1$，それ以外のとき $r(A)=n$.

32. 以下，$\alpha,\beta,\gamma,\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma}$ は任意定数である．

(1) 拡大係数行列 $\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & a & -a & -a & a \end{pmatrix}$ は基本変形の必要なし．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) $\widetilde{A}=\begin{array}{c} x\quad\ y\quad\ z\quad\ w \\ \begin{pmatrix} a & 0 & -5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} w\quad\ y\quad\ z\quad\ x \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 & a & 4 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -a & -4 \end{pmatrix}$.

$$\therefore\ \begin{pmatrix} w \\ y \\ z \\ x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}.$$

(3) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 & -4/3 \end{pmatrix}$.

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{\alpha}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{\beta}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{\gamma}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

33. 以下，$\alpha, \beta, \gamma, \tilde{\alpha}$ は任意定数である．

(1) $\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. $\quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) $\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 10 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 10 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -14 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -14 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 14 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3) $\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(4) $\widetilde{A}=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 1 & -8 \\ -2 & -2 & -2 & 3 & -12 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & 12 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 1 & -8 \\ 1 & -3 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & 12 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & -1 & 1 & -8 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & 12 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & -1 & 1 & -8 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & -8 & -4 & 7 & -20 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{\alpha}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(5) $\tilde{\mathtt{x}} = \begin{pmatrix} v \\ x \\ z \\ u \\ w \\ y \end{pmatrix}$ とおくと 与式は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\tilde{\mathtt{x}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. ゆえに

$$\tilde{\mathtt{x}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \therefore \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ b \\ 0 \\ c \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$\gamma\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ -1\\ 1\\ -1 \end{pmatrix}.$$

(6) $A=\begin{pmatrix} 0&1&1&2\\ 2&4&6&8\\ 2&0&2&0 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 2&0&2&0\\ 0&1&1&2\\ 2&4&6&8 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 2&0&2&0\\ 0&1&1&2\\ 0&4&4&8 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 0&1&1&2\\ 0&4&4&8 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow\begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 0&1&1&2\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}.\quad \therefore\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} -1\\ -1\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 0\\ -2\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}.$

(7) $A=\begin{pmatrix} 0&0&1&2\\ 1&2&0&0 \end{pmatrix}\longrightarrow \begin{array}{c} x\quad y\quad z\quad w\\ \begin{pmatrix} 1&2&0&0\\ 0&0&1&2 \end{pmatrix}\end{array}\longrightarrow \begin{array}{c} x\quad z\quad y\quad w\\ \begin{pmatrix} 1&0&2&0\\ 0&1&0&2 \end{pmatrix}\end{array}.$

$\therefore\ \begin{pmatrix} x\\ z\\ y\\ w \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} -2\\ 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 0\\ -2\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}.\quad \therefore\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} -2\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ -2\\ 1 \end{pmatrix}.$

(8) $\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 2&3&-5&-2&9\\ -2&2&3&-5&-18\\ -5&-2&2&3&-7\\ 3&-5&-2&2&4 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 2&3&-5&-2&9\\ 0&5&-2&-7&-9\\ -5&-2&2&3&-7\\ 3&-5&-2&2&4 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 2&3&-5&-2&9\\ 0&5&-2&-7&-9\\ 0&-4&-5&3&6\\ 3&-5&-2&2&4 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow\begin{pmatrix} 2&3&-5&-2&9\\ 0&5&-2&-7&-9\\ 0&-4&-5&3&6\\ 1&-8&3&4&-5 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 0&19&-11&-10&19\\ 0&5&-2&-7&-9\\ 0&-4&-5&3&6\\ 1&-8&3&4&-5 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1&-8&3&4&-5\\ 0&5&-2&-7&-9\\ 0&-4&-5&3&6\\ 0&19&-11&-10&19 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow\begin{pmatrix} 1&-8&3&4&-5\\ 0&5&-2&-7&-9\\ 0&-4&-5&3&6\\ 0&4&-5&11&46 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1&0&13&-2&-17\\ 0&1&-7&-4&-3\\ 0&-4&-5&3&6\\ 0&0&-10&14&52 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1&0&13&-2&-17\\ 0&1&-7&-4&-3\\ 0&0&-33&-13&-6\\ 0&0&-10&14&52 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow\begin{pmatrix} 1&0&3&12&35\\ 0&1&3&-18&-55\\ 0&0&-3&-55&-162\\ 0&0&-10&14&52 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1&0&3&12&35\\ 0&1&3&-18&-55\\ 0&0&-3&-55&-162\\ 0&0&-5&7&26 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1&0&0&-43&-127\\ 0&1&0&-73&-217\\ 0&0&-3&-55&-162\\ 0&0&1&117&350 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow\begin{pmatrix} 1&0&0&-43&-127\\ 0&1&0&-73&-217\\ 0&0&0&296&888\\ 0&0&1&117&350 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1&0&0&-43&-127\\ 0&1&0&-73&-217\\ 0&0&0&1&3\\ 0&0&1&117&350 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1&0&0&-43&-127\\ 0&1&0&-73&-217\\ 0&0&1&117&350\\ 0&0&0&1&3 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow\begin{pmatrix} 1&0&0&0&2\\ 0&1&0&0&2\\ 0&0&1&0&-1\\ 0&0&0&1&3 \end{pmatrix}.\quad \therefore\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\\ 2\\ -1\\ 3 \end{pmatrix}.$（この場合は解が 1 つに確定する）

(8) （他の変形の例）$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 2&3&-5&-2&9\\ -2&2&3&-5&-18\\ -5&-2&2&3&-7\\ 3&-5&-2&2&4 \end{pmatrix}\xrightarrow[①+④]{①+②\quad ①+③}\begin{pmatrix} -2&-2&-2&-2&-12\\ -2&2&3&-5&-18\\ -5&-2&2&3&-7\\ 3&-5&-2&2&4 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow\begin{pmatrix} 1&1&1&1&6\\ -2&2&3&-5&-18\\ -5&-2&2&3&-7\\ 3&-5&-2&2&4 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1&1&1&1&6\\ 0&4&5&-3&-6\\ 0&3&7&8&23\\ 0&-8&-5&-1&-14 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1&1&1&1&6\\ 0&4&5&-3&-6\\ 0&3&7&8&23\\ 0&0&5&-7&-26 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow\begin{pmatrix} 1&1&1&1&6\\ 0&1&-2&-11&-29\\ 0&3&7&8&23\\ 0&0&5&-7&-26 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1&0&3&12&35\\ 0&1&-2&-11&-29\\ 0&0&13&41&110\\ 0&0&5&-7&-26 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1&0&3&12&35\\ 0&1&-2&-11&-29\\ 0&0&3&55&162\\ 0&0&5&-7&-26 \end{pmatrix}$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -43 & -127 \\ 0 & 1 & -2 & -11 & -29 \\ 0 & 0 & 3 & 55 & 162 \\ 0 & 0 & -1 & -117 & -350 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -43 & -127 \\ 0 & 1 & 0 & 223 & 671 \\ 0 & 0 & 0 & -296 & -888 \\ 0 & 0 & -1 & -117 & -350 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -43 & -127 \\ 0 & 1 & 0 & 223 & 671 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 117 & 350 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -43 & -127 \\ 0 & 1 & 0 & 223 & 671 \\ 0 & 0 & 1 & 117 & 350 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

34—35: 解答中の $\alpha, \beta, \gamma, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ は任意定数である.

34. (1) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & a \\ 1 & 2 & 1 & b \\ 3 & 5 & -1 & c \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & b \\ 2 & 5 & 6 & a \\ 3 & 5 & -1 & c \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & b \\ 0 & 1 & 4 & a-2b \\ 0 & -1 & -4 & c-3b \end{pmatrix} \longrightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & -2a+5b \\ 0 & 1 & 4 & a-2b \\ 0 & 0 & 0 & a-5b+c \end{pmatrix}$. ゆえに解を持つための必要十分条件は $r(\widetilde{A}) = r(A)$ より,

$a - 5b + c = 0$. このとき解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a+5b \\ a-2b \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a & -b & 0 & c \\ 0 & b & -c & a \\ -a & 0 & c & b \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & -b & 0 & c \\ 0 & b & -c & a \\ 0 & -b & c & b+c \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & -c & a+c \\ 0 & b & -c & a \\ 0 & 0 & 0 & a+b+c \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c/a & \frac{a+c}{a} \\ 0 & 1 & -c/b & a/b \\ 0 & 0 & 0 & a+b+c \end{pmatrix}$. 解を持つための必要十分条件は $r(\widetilde{A}) = r(A)$ より,

$a + b + c = 0$. このとき,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+c}{a} \\ a/b \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} c/a \\ c/b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b/a \\ a/b \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{\alpha} \begin{pmatrix} 1/a \\ 1/b \\ 1/c \end{pmatrix}. \qquad (\tilde{\alpha} = c\alpha)$$

35. (1) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 & -2 & b \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & b \\ 0 & 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2-b \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & b \\ 0 & 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a-b \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & b \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & a/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a-b \end{pmatrix}$.

ゆえに $2 - a - b \neq 0$ のとき解なし.　$2 - a - b = 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a \\ a/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{\alpha} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{\beta} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(2) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -8 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & w & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -8 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(3) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & b & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x & \quad y & \quad\quad z & \quad w & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1-a & -2 & b+1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow$

$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & \quad z & \quad\quad y & \quad\quad w & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1-a & b+1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{a+1}{2} & -\frac{b+1}{2} & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a-1}{2} & \frac{b-1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & \frac{a+1}{2} & -\frac{b+1}{2} & -1 \end{pmatrix}$. $\quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -\frac{a-1}{2} \\ -\frac{a+1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -\frac{b-1}{2} \\ \frac{b+1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{\alpha} \begin{pmatrix} -a+1 \\ 2 \\ -a-1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{\beta} \begin{pmatrix} -b+1 \\ 0 \\ b+1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

(4) $\tilde{\mathtt{x}} = \begin{pmatrix} v \\ x \\ z \\ u \\ w \\ y \end{pmatrix}$ として与方程式を $A\tilde{\mathtt{x}} = \mathtt{c}$ とかくと $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} & b & c & 0 & a \\ E & 0 & c & a & b \\ & b & 0 & a & c \end{pmatrix}.$

$\therefore \tilde{\mathtt{x}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ -b \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -c \\ -c \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ -a \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$\therefore \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ b \\ 0 \\ c \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -b \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ 1 \\ -c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -a \\ 1 \\ -a \end{pmatrix}.$

36. $\widetilde{A}$ の 2 列目を 2 倍した時点で方程式を変えないためには，変数ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y/2 \\ z \end{pmatrix}$ と変換すればよい．その後の変形には誤りがないのでひとみの得た解は $\begin{pmatrix} x \\ y/2 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ となる．ゆえに 正しい解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$

37. 以下余因子展開をしているところでは，i 行（j 列）に関する余因子展開を i 行展開（j 列展開）と略記する．

(1) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & 15 & 15 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & 15 & 15 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & -4 \\ 2 & 7 & 2 \end{vmatrix} =$

$15 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 15 \cdot 24 = 360.$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{1\text{ 列展開}}{=}$