

－ 線形代数I 授業コンテンツ －

by K. Asai

#1 1章 空間ベクトルの基礎

- 1 -

線形代数では主にベクトルと行列の勉強をします。この『ベクトル』は後々線形空間へと発展し、『行列』は線形変換、線形写像へと発展します。

ここからは、テキストを参照しながら進んでいってください。- 1 - (1節)においては、空間ベクトルの定義について説明しています。ベクトルは向きと大きさのみを持つ量として定義されます。その初歩的な例として平面ベクトルと空間ベクトルがありますが、ほぼ並行して説明できるので、空間ベクトルを中心に説明していきます。

空間ベクトル \overrightarrow{AB} とは、空間内の2点 A, B に対して A から B へ向かうまっすぐな矢印です。この \overrightarrow{AB} の向きとは、文字通り A から B へ向かう向きで、 \overrightarrow{AB} の大きさ (長さ) とは、線分 AB の長さです。また、 A をこのベクトルの始点、 B を終点といいます。

以下簡単のため、空間ベクトルを単にベクトルということもあります。さて、これで定義が終わりならば簡単なのですが、少し厄介なことに、

平行移動で互いに移り合える (平行移動でぴったり重なる) ベクトルは同じものとみなす

ことになっています。したがって、ベクトルの位置の違いはベクトルの違いとはみなしません。これがベクトルで最も重要なことです。

以下、テキストでは平行移動で互いに移り合う2つのベクトルについて、終点と始点の座標の差 (3つある) を考えています。平行移動で移り合えば3つの座標の差はそれぞれが等しくなります (テキスト (1) 式)。

逆に、2つのベクトルにおいて座標の差が等しいならば、平行移動で移り合います (テキスト (2) 式)。これらより、2つのベクトルが等しいことと、座標の差が等しいことが同値になります (テキスト (3) 式)。

このことから、ベクトルを数式で表示するのに、3つの座標の差を縦に並べてやれば十分だとわかります。こうしてベクトルの成分表示が得られました (テキスト (4) 式)。この表示では、縦に数字を並べていることに注意してください。高校とは並べ方が違いますが、計算の都合上、通常このように定義します。

- 2 - においては、空間ベクトルたちに対して和（加法）という演算を定義します。そこで、ベクトルを1つの文字で表示すると便利なので、 $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{BC} = b$ のような記号で表すことにします。これらはゴシック体のアルファベットです。手書きするときは、縦線のどれか1つを2重線にして書くか、文字の上に矢印を乗せます。



さて、2つのベクトル a, b に対して、和 $a+b$ は、 a と b のどちらかを平行移動してつなぐことで求められます。つなぐときは、 a の終点と b の始点を重ねるようにします。こうしてつながったベクトルにおいて a の始点から b の終点へ向かうベクトルが $a+b$ です。テキストでは2ページの左の図を見てください。この図によると、 a と b をつなぐ順序を逆にしても同じ結果になることがわかります。すなわち、交換律: $a+b = b+a$ がなりたちます。ちなみに、この図から、 a, b を2辺とする平行四辺形を描いても $a+b$ が求まります。右の図では、結合律: $(a+b)+c = a+(b+c)$ を示しています。

次に、ベクトルの和と成分表示について考えています。 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ を成分表示して (8) 式を得、書き直して (9) 式を得ます。(9) 式は和の定義として与えてもいいのですが、ここでは、和を図形的に定義してから (9) 式を導きました。

特別なベクトル 0 (0ベクトル) や逆ベクトルの定義はテキストを見てください。

ブレイク: (ex1) を解く。

ベクトルの和に続いてベクトルのスカラー倍を定義します。スカラーとは英語で scalar で数を意味します。スカラー倍の定義は (13) 式を見てください。たとえば $3a$ は a の向きを変えずに大きさを3倍にしたベクトルで、 $-3a$ は、 a を逆向きにして大きさを3倍にしたベクトルです。4ページの上の図より、スカラー倍について、(14) 式がなりたつことがわかります。

ベクトルの和とスカラー倍については、(15) 式がなりたちます。これについては成分表示を用いて証明することができます。また、(16) 式は数学的帰納法で証明できます。

ブレイク: (ex2) (1): (15) 第1式を示す。(3) (16) 第1式を示す。

ベクトル a の大きさを $\|a\|$ で表します。4ページの左下の図を見ると、3平方の定理より、(17) 式が示せます。大きさが1のベクトルを単位ベクトルといいます。右下の図は、原点中心半径1の球面を考えると、単位ベクトルは、原点からその球面上の点へ向かうベクトルとして表せることを示しています。

2つのベクトル a と b のなす角とは、平行移動により a と b の始点を重ねたときの、これらのベクトルの間の角のことです。 a と b のなす角が $\pi/2$ (90°) であるとき、 a と b は直交するまたは垂直であるといい、 $a \perp b$ とかきます。直交といっても、必ずしもベクトルが交わっている必要はありません。 a と b のなす角が 0 (0°) または π (180°) (すなわち、向きが同じか逆) であるとき、 a と b は平行であるといい、 $a \parallel b$ とかきます。 0 ベクトルについては、便宜上、任意のベクトルに対して直交し、かつ平行であると考えます。

a と b の内積は、

$$(a, b) = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos \theta$$

(θ は a と b のなす角) で定義されます。高校で習った書き方 $a \cdot b$ でも問題ありませんが、テキストではこの書き方を採用します。

内積を考えるメリットは、内積によってベクトルが直交しているかどうかはわかることです。すなわち、(20) 式がなりたちます。内積を成分表示するには、5 ページの3角形に余弦定理を適用して、(19) 式のように計算します。その結果、 $(a, b) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ を得ます。(21) - (23) 式については、目を通しておいてください。

ブレイク: (21) 第3式を示す。

- 6 - - 7 - では空間内の直線の表示式について勉強します。- 6 - では直線のベクトル表示を扱います。空間内の点 P に対して、 \overrightarrow{OP} を P の位置ベクトルといいます。空間内の直線 l に対して、 l に平行なベクトル a を l の方向ベクトルといいます。ここで、 a の大きさは 0 でなければ何でもよく、向きも正逆どちらでもいいです。

直線 l のベクトル表示とは、 l 上にある任意の点 P の位置ベクトルを表示した式のことです。6 ページの図より、 l 上に1つの点 P_0 を取るとき、実数 t を用いて

$$\overrightarrow{P_0P} = ta$$

とかけるので、(25) 式を得ます。これが l のベクトル表示で、具体例では、成分表示でかかれたベクトル表示 (26) 式がよく使われます。

ブレイク: (ex6) を解く。(答えは (30) 式)

直線の方程式とは、直線上の任意の点 $P(x, y, z)$ の座標 x, y, z がみたすべき方程式のことです。この節では、直線 l のベクトル表示を用いて、 l の方程式を導いていきます。この導出については、テキストをよく見てください。(26) \Rightarrow (27) \Rightarrow (28) と (28) 式が導かれ、また逆に、(28) \Rightarrow (27) \Rightarrow (26) と戻することもできるので、(28) 式は l の方程式だといえます。

(28) 式の形を見ると、変数 x, y, z から定点の座標 x_0, y_0, z_0 を引き、方向ベクトルの成分で割ったものを、2つの等号で結んでいることがわかります。したがって、方程式が2つあることになります。

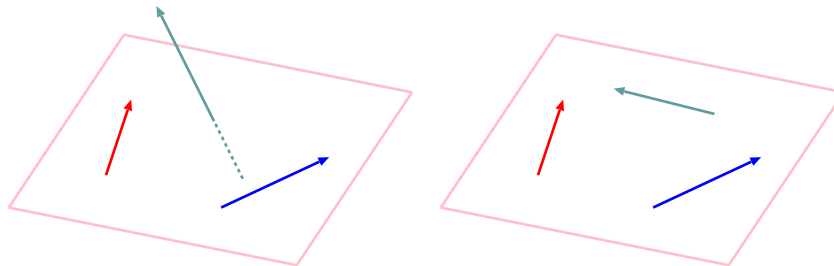
ただし、この公式は、前提として a_1, a_2, a_3 がどれも 0 でないとしています。 a_1, a_2, a_3 のどれかが 0 のときは、(29) 式のようになりますので、注意してください。

空間ベクトル a_1, a_2, \dots, a_n があつたとき，それらをスカラー倍して和を作つた (32) 式を a_1, a_2, \dots, a_n の線形結合といいます．あるベクトルを他のベクトルたちで表すときは，(32) の形になります．

テキストにあるように，1ヶ所だけ1であとは0のベクトル e_1, e_2, e_3 を基本ベクトルといいます．それらを用いることで，(33) 式のように，任意の空間ベクトルを基本ベクトルの線形結合で表すことができます．

3つの空間ベクトルが，どのように平行移動しても，同一平面内に収まりきれないとき，これら3つのベクトルを線形独立であるといいます．下の図の左のような場合です．さきほどの3つの基本ベクトルは，この条件にあてはまりますので，線形独立です．他にも線形独立なベクトルはたくさんあります．3つの線形独立な空間ベクトルは，任意の空間ベクトルを線形結合で表せることがわかっています．

線形独立でないときは，線形従属であるといいます．すなわち線形従属とは，3つの空間ベクトルをうまく平行移動した結果，同一平面内に収まることです．このことは，3つのうちのある1つのベクトルが，他の2つのベクトルの線形結合で表されるということと同じです．これは下の図の右のような場合です．3つの線形従属な空間ベクトルでは，すべての空間ベクトルを表すことはできません．



ブレイク: (ex8) を解く．

2

2章 空間内の平面とその方程式

- 1 -

ここでは空間内の平面について勉強します. 1章の - 6 -, - 7 - で扱った直線の場合と同様に, 平面に対しても, ベクトル表示と方程式を考えます.

- 1 - ではまずベクトル表示を考えます. 空間内に平面 S があるとします. S のベクトル表示とは, S 上の任意の点 $P(x, y, z)$ の位置ベクトル $\overrightarrow{OP} = \mathbf{x}$ を表示する式のことです. これを構成するために, S 上の1つの点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ を取り, その位置ベクトルを $\overrightarrow{OP_0} = \mathbf{x}_0$ とします. また, S 内の (S に含まれる) 平行でない2つのベクトル \mathbf{b}, \mathbf{c} を適当に取ります. このとき, $\overrightarrow{P_0P}$ は S 内にあるので, 1ページの図より,

$$\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{b} + u\mathbf{c} \quad (t, u \text{ は実数})$$

とかけることがわかります. (ここで, \mathbf{R} は実数全体の集合を表しますので, テキストの『 $t, u \in \mathbf{R}$ 』は, 『 t, u は実数』という意味になります.) これより, (1) 式がなりたちます. これを S のベクトル表示といいます, 具体例では成分表示でかかれたベクトル表示 (2) 式がよく使われます.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

この式で, t, u は独立にすべての実数の範囲を動きます. これらをパラメータなどと呼びますが, 直線の場合はパラメータが1つ, 平面の場合はパラメータが2つになっていますね.

ブレイク: (ex1) を解く.

- 2 -

平面の方程式とは, 平面上の任意の点 $P(x, y, z)$ の座標 x, y, z がみたすべき方程式のことです. 平面の方程式を求めるには, 内積を利用します. まず平面 S に垂直なベクトルを法線ベクトルといいます. 大きさは0でなければ何でもかまいません. また, 向きは正逆2通りありえます. S の法線ベクトル \mathbf{a} を取ると, 図より, つねに $\mathbf{a} \perp \overrightarrow{P_0P}$ なので, (3) 式がなりたちます. そこで, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とおいて, (3) 式を成分表示で書き直せば, (4) 式から (5) 式を得ます. これが S の方程式です. この式は, 定数項をまとめて,

$$ax + by + cz = d$$

の形にかかれることが多いです. この方程式の左辺は変数の1次式であって, 係数が法線ベクトルの成分になっていることがわかります. すなわち, a, b, c によって平面の傾き具合が決定し, d が変わることで, 平面が平行移動していきます.

次に、平面 S のベクトル表示が与えられたとき、これを S の方程式に直すことを考えます。

(5) 式より、 S の方程式を求めるには、 S の法線ベクトルと S 上の 1 点がわかれば十分です。法線ベクトルは、もちろん S に垂直なのですが、それは、平面内の 2 つの (平行でない) ベクトルに直交するベクトルとして求められます。そこで、 S のベクトル表示 (1) または (2) の、 b と c の両方に直交するように a を求めれば、それが法線ベクトルになります。あとは S 上の 1 点がわかればよく、それはベクトル表示の x_0 としてすでに答えがかいてあります。以上を (5) 式にあてはめれば、 S の方程式が得られ、定数項をまとめれば、(7) 式の形になります。

ただ、2 つのベクトルの両方に直交するベクトルを求めるのは結構面倒なので、それを機械的に計算できる、外積を利用すると便利です。外積の正確な定義は次回に譲りますが、 b と c の外積を $b \times c$ とかき、これは b と c の両方に直交するベクトルになります。その公式については 3 章 (2) 式にかいてあります。

ブレイク: (ex2) を解く。

- 3 -

最後に、平面 S の方程式が与えられたとき、これを S のベクトル表示に直すことを考えます。

S の方程式 $ax + by + cz = d$ には、法線ベクトル $a = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ が現れていますので、これから S に含まれるベクトルを 2 つ求めることが鍵になります。さて、 a に垂直なベクトルは、 a のまわりにぐるりと無数に描くことができます。その中のどれでも 1 つ取れば、それは平行移動によって S 内に収めることができます。すなわち、 a に垂直なベクトルで互いに平行でないものを 2 つ取って、それらを $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とすれば、ベクトル表示の重要な材料は得られます。あとは、 $ax + by + cz = d$ をみたす点 (x_0, y_0, z_0) をどれでもいいから 1 つ取って、 S のベクトル表示 (2) 式を得ることができます。

上のステップ中、 a に垂直なベクトルを求める部分がありましたが、それには、 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ から作った $\begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ のうちのどれか 2 つを選んでやれば簡単です。これらは a の 1 つの成分を 0 にして、残りを交換の上、片方の符号を変えたものになっています。これらが元の a と垂直であることは簡単に確認できます。

以上、平面の方程式とベクトル表示の間の変換について見てきましたが、これが自由にできるように練習してください。

あと、テキスト 3 ページの (note) にあるように、平面の方程式 $ax + by + cz = d$ は、両辺を定数倍することを除けば、式は 1 通りに決定します。しかし、平面のベクトル表示は、平面内にあるベクトルの選び方が無数にあるので、見かけ上全く異なる式になることがあります。それらはどれも正解です。

ブレイク: (ex3) を解く。

3

3章 空間ベクトルの線形独立性と平行6面体の体積

- 1 -

この章では、空間ベクトルの線形独立性を平行6面体の体積で判定する方法を考えます。1章 - 8 - で導入された線形独立と線形従属の概念は、3つの空間ベクトルが同一平面上に存在できるかどうかで定義されました。それは、3つの空間ベクトル a, b, c の始点を揃えることで、より明快になります。このとき、すでに平行移動する必要はなく、これらが平面上になれば線形独立、平面上にあれば線形従属となります。テキストではさらに線形従属であることと、3つのうちある1つのベクトルが他の2つの線形結合で表されることが同値であることにも注意しています。

- 2 -

次に1ページの図を見てください。このような、向かい合う面が平行な6面体を平行6面体といいます。各面は必然的に平行4辺形になります。図のように、3つのベクトル a, b, c が3辺をなしているとき、これを a, b, c の張る平行6面体といいます。さて、さきほどの線形独立性について考えると、 a, b, c が線形独立というのは、これらが平面上にないわけですから、この平行6面体がつぶれていない、すなわち体積が0でないということと同値になります。また、 a, b, c が線形従属というのは、この平行6面体がつぶれている、すなわち体積が0だということと同値になります。このようにして、判定が難しい線形独立性を、平行6面体の体積が0かどうかで見分けることができます。

- 3 -

そこで、平行6面体の体積を求めることになるのですが、なかなか一筋縄ではいきません。まず、ベクトルの外積を導入します。

- (i) 外積 $a \times b$ を図に示すような底面に垂直なベクトルとして定義する。ただし、大きさは底面積 S に等しいとする。
- (ii) 底面積 S を a と b を用いて計算する。((1) 式)
- (iii) (i),(ii) より、 $a \times b$ の成分表示を得る。((2) 式)

テキストでは、外積の成分表示の詳しい導出のほか、外積がみたす法則 ((4) 式) をまとめていますので、ざっと目を通しておいてください。とりあえず、外積の定義 (上の (i)) とその成分表示 ((2) 式) を理解できればよいでしょう。

外積の成分表示はやや複雑ですが、次のように考えるとよいでしょう。 a と b を並べた $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$ を作り、この第 i 行を隠して残りの部分からたすきがけのように計算すると外積の第 i 成分がでてきます。ただし、第2成分は符号が逆なので注意してください。

ブレイク: (ex2) を解く。

さて、おまじかねの平行6面体の体積を求めましょう。図の平行6面体の体積を V 、底面積を S 、高さを h とします。 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と \mathbf{c} のなす角を φ とすれば、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は底面と垂直なので、 $h = \|\mathbf{c}\| \cdot \cos \varphi$ 。したがって、

$$V = S \cdot h = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \cdot h = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \cdot \|\mathbf{c}\| \cdot \cos \varphi = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

となり、 V を外積と内積を組合せた形で表せました。ここで、 φ が $\pi/2 < \varphi \leq \pi$ のときは、平行6面体は底面の下側に現れ、高さ $h = \|\mathbf{c}\| \cdot \cos \varphi$ には $-$ の符号がつき、体積にも $-$ がついてしまいます。すなわち、上の V の式（テキスト (6) 式）は符号付きの体積になります。しかしながら、 $V = 0$ かどうかの判定には全く影響がないので、(6) 式をそのまま利用できます。

テキストでは、この後やや強引に3次行列式が導入されています。行列式は後に本格的に学びますが、ここでは先行して3次の場合を扱っています。というのも、(6) 式が3次行列式と一致するからです。3次行列式は(7)式で定義されます。これは、9個の数字を四角く並べて両側をまっすぐな縦線で囲んだ形をしています。

このようなかき方をするメリットとして、計算のしやすさがあります。 V を計算するのに(6)のままでは、面倒な展開をしなければなりません。 (7) の3次行列式では、サラスの公式という覚えやすく簡単な展開法があります。詳しくはテキスト3ページの (note) を見てください。

この章で得られた結果は、テキスト (T1) にある通りで、3つの空間ベクトルの線形独立性が3次行列式で判定できることがわかりました。

ブレイク: (ex4) を解く。(はじめは答えを見ないでね)

4

4章 3次行列と V^3 の線形変換

- 1 -

この章では、3次行列を使って空間ベクトルを動かすことを考えます。また、その応用として、空間内の平面や直線を3次行列を使って動かすことを考えます。

そこで3次行列ですが、それはテキスト (1) 式にあるような数の配列のことです。ここでは、特に数は実数に限定します。簡単のため、このような行列を通常大文字で A と表示します。これは行列の中の数字（成分という）が a を使って表されているからで、文字が b なら行列は B で表されるのが普通です。この行列と前回の行列式とは、外見上は括弧の違い（(行列) と |行列式| の違い）で区別します。（行列 A に対して行列式を $\det A$ で表すこともあります。）

ただし、行列と行列式の本当の違いは、単に括弧の形の違いではありません。行列とは、(1) 式のように四角く並んだ配列そのもののことです。しかし行列式は、前回習ったように、ある規則的な計算の結果決まる、何らかの値を意味しています。これらは全く異なるものです。

さて、3次行列を導入して早速ですが、(2) 式のように、3次行列 掛ける 空間ベクトルという計算（積、乗法）を定義します。この積の結果は、(2) 式右辺のような空間ベクトルになります。この計算は決して簡単ではないですが、そのやり方を見ると、行列の成分の左から順に x, y, z を掛けて + で結んでいるように見えます。つまり、積は3つの成分が x, y, z の1次式であって、その係数が行列の成分と一致しています。このように、行列で1次式を使ったベクトルを要領よく表すことができます。

(3) 式では、3次行列同士の積を定義しています。2つの3次行列の積は、(3) 式右辺のような3次行列になります。それにしても、結構複雑ですね。これを(2)式と比較するとどうなるのでしょうか？

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

このように、 B を3色に分けてやると、各色について、(2) 式と同じ規則で計算していることがわかります。

こうして、行列とベクトルや行列同士の積が定義できました。このような計算については、(4) 式のような法則がなりたちます。ただし、はじめの2式の確認は大変でしょう。後に、より一般的な設定で証明することにします。

ブレイク: (4) 第3式を示す。ただし便宜上、 $A(x + x') = Ax + Ax'$ を示すこととし、 $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $x' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ とする。

ここでは、すべての空間ベクトルの集合 V^3 を導入します。それに属するベクトルたちの始点をすべて原点にとると、これらのベクトルは、その終点と 1 対 1 に対応します。この対応で、ベクトルから点、あるいは点からベクトルへの対応ができます。後者は点から位置ベクトルを対応させていることになります。

そこで、空間図形を考えたとき、それは点の集合なので、それを位置ベクトルの集合で表すことができます。その意味で、空間全体は V^3 で表せます。すでにできた、直線や空間のベクトル表示は、この考え方によるものです。

ここから、関数や写像の概念が必要になります。 V^3 の (V^3 に属する) ベクトルから V^3 のベクトルへの関数 (写像) を V^3 の変換といいます。ここで、写像は関数とほぼ同じ意味で使われ、どちらも対応という意味です。ただし、ここでの関数は、数から数への対応 (数の関数) ではなく、ベクトルからベクトルへの対応 (ベクトルの関数) になっています。

数の関数は $f(x)$ などの記号で表しました。ベクトルの関数は、 $T(\mathbf{x})$ と表します。この記号については、本によってまちまちですが、このテキストではこのような大文字で表します。 $T(\mathbf{x})$ は簡単に $T\mathbf{x}$ とかきます。ただし、 $T(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ などの場合は括弧を取ると意味が違ってしまいますので注意してください。

さて、 V^3 の変換はベクトルの関数なので、 $T(\mathbf{x})$ とかきますが、これを単に T とかくことがよくあります。 $f(x)$ を f とかくのと同様です。もちろん、 V^3 の変換がたくさんでくるときは、 T, S, \dots など色々な文字を使います。

前置きはこれくらいにして、テキストでは、 V^3 の変換 T が線形性を持つとき、 T を (V^3 の) 線形変換というの旨がかいてあります。その線形性とは (6) 式で定義されます。すなわち、(6) 式をみたすとき、線形変換というのです。ここで (6) 式は、後ろの括弧内を言葉にして、

V^3 の任意のベクトル \mathbf{x}, \mathbf{y} および、任意の実数 k に対して、

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= T\mathbf{x} + T\mathbf{y} \\ T(k\mathbf{x}) &= k(T\mathbf{x}) \end{aligned}$$

のようにもかかれます。はじめの部分は、任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V^3$ および $k \in \mathbf{R}$ に対して、などとかくこともあります。線形変換は、(7),(8) 式をみたすことがわかります。

次に 2 つの線形変換 T, S に対して、その合成 $S \circ T$ (ST とかく) を (9) 式で定義しています。これは通常関数の合成と同じ定義です。この合成に関する重要な定理として、(T1) の『線形変換の合成はまた線形変換になる』というものがあります。証明についてはテキストを見てください。

A を 3 次行列とします. (11) 式 $T_A(x) = Ax$ ($x \in V^3$) によって, V^3 の線形変換 T_A を定義します. T_A は, ベクトルの左から A を掛けるという線形変換で. これを, A が表す (で表される, が定める) 線形変換などといいます.

T_A がなぜ線形変換かということ, 行列の積の計算法則 (4) の第 3,4 式から, 線形性の条件 (6) がみたされることがわかるからです. 実はこの逆もなり立ちます. それが (T2) で, 線形変換であればどんなものでも, ある行列 A を用いて T_A とかけるというものです. それはすなわち, 線形変換であれば, 行列で表されるということです. 証明はやや難しいですが, 見ておくといいでしょう.

ブレイク: (ex2) を解く.

(T3) では, $T_A T_B = T_{AB}$ が述べられています. これは, 行列で表される線形変換の合成は, 行列の積で表されることを意味しています. 証明は, (16) 式にあるように比較的容易になされます.

ここでは, (17) 式が対象の中心になります. それは, S を平面または直線としたとき, S 上の点の位置ベクトル x たちを行列 A で移した (動かした) ベクトル Ax たちの集合で, これを $T_A(S)$ とかきます. こういうとわかりにくいですが, 4 ページの図のように, S を A で移した (動かした) 図形が $T_A(S)$ です. $T_A(S)$ は, S の T_A による像とか, S が T_A によって移される図形などといいます.

以下, (ex3),(ex4) では, 平面 (または直線) S の方程式と, 行列 A が与えられたとき, $T_A(S) = S'$ の方程式を求める例題とその解答が与えてあります. この例題は, これまでに学んだことの集大成になりますので, よく習得してください. 解答の流れは次のようになります.

$$\begin{array}{ccc} S \text{ の 方 程 式} & & S' \text{ の 方 程 式} \\ \nabla & & \Delta \\ S \text{ の ベ ク ト ル 表 示} & \triangleright & S' \text{ の ベ ク ト ル 表 示} \end{array}$$

ブレイク: (ex3) を解く. (解答をよく理解した上で, 何も見ないで解く.)

5

5章 行列の演算と基本変形

- 1 -

いよいよ行列の本格的な理論が始まります。- 1 - では、 (m, n) 型行列（別名 $m \times n$ 行列）の定義や基本的な用語を説明しています。詳しい内容については、テキストにわかりやすくかいてあるのでよく読んでください。数や記号の横の並びを行、縦の並びを列というので、間違えないようにしましょう。あとは、成分や (i, j) 成分の説明があり、複素行列は成分が複素数の行列、実行列は成分が実数の行列として定義しています。 n 次行列や正方行列を定義し、行列の特別な場合として、列ベクトル（縦ベクトル）、行ベクトル（横ベクトル）を細長い行列として定義しています。数が1つだけからなる行列は通常の数（スカラー）とみなせます。

すでに習った空間ベクトル（や平面ベクトル）は列ベクトルの一種です。ただ、それらには幾何学的な描像（空間や平面内の矢印）がありますが、ここで述べた一般的な行列にはそのようなイメージはありません。純然たる数の配列として定義しています。

(1) 式を毎回かくのは大変なので、通常 A などの記号で表します。また、(2) 式のように (i, j) 成分を表示する方法によれば、簡単にかけます。(2) 式の後ろの括弧にある i, j の動く範囲は、行列が (m, n) 型と指定されているときなど、まぎれがないときは省略できます。

(3) 式を見ると、右辺は左辺の行列の行を列に、すなわち横並びを縦並びに変えていることがわかります。あるいは、列を行に、すなわち縦並びを横並びに変えているとも考えられます。行列に対するこのような操作を転置といいます。行列 A を転置してできた行列 B を A の転置行列といい、 $B = {}^t A$ または $B = A^T$ で表します。2 回転置すると元に戻るので、 ${}^t({}^t A) = A$ がなりたちます。

節の最後に、行列を列ベクトルや行ベクトルに分解することがかいてあります。たとえば、列ベクトルに分解する例をあげると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ の列ベクトルを } \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

とおくとき、行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} \right) = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3)$$

のように列に分けてかくことができるということです。行についても同様です。

ここでは行列の和（加法）とスカラー倍について述べています。 (m, n) 型行列 A, B に対して、その和を (6) 式で定義します。つまり、行列の和は各成分ごとに足すことで得られます。また、 k を数とするとき、行列のスカラー倍を、(7) 式で定義します。これも、各成分を k 倍することで得られます。これらの演算は空間ベクトルの場合と同様で、簡単な定義です。

和とスカラー倍については、(8) 式の法則がなりたちます。この法則については、特に疑問もなく納得できると思います。

すべての成分が 0 の (m, n) 型行列を 0 行列といい、 O_{mn} や O で表します。 $A+B=O$ をみたす行列 B を $-A$ で表します。すべての成分が 0 のベクトルは 0 ベクトルといい、 0 で表します。その他、テキスト 2 ページ下に簡単な公式がかいてあります。

ここでは、行列の演算で重要かつ難しい積（乗法）を扱っています。4 章で 3 次行列の積を考えましたが、ここではより一般的な設定で積を考えます。 $A = (a_{ij})$ を (m, n) 型行列、 $B = (b_{ij})$ を (n, p) 型行列とします。このとき、積 $AB = C = (c_{ij})$ は (m, p) 型行列で、その成分を (9) 式で定義します。これを理解するのに、まず行列の型を考えましょう。

3 ページの図を見てください。 A の型: (m, n) , B の型: (n, p) から、 AB の型: (m, p) が決まります。この、 A, B の型の中の n に注目してください。これらが一致していないと、積が作れないのです。すなわち、 A の横幅と B の縦幅が一致していなければなりません。たとえば、同じ $(2, 3)$ 型の行列同士では、和は作れますが、積は作れません。

このように、ある意味で相性がよい行列が積を作れるのです。そして A を父、 B を母とすると、その子 AB は縦幅は父と同じで、横幅は母と同じになり、形質を受け継ぎます。

行列が正方行列であれば話が単純になります。 n 次行列同士は和と積ともに作れて、結果は n 次行列になります。

型の話はこれくらいにして、積 $AB = C$ の成分 c_{ij} ですが、その定義の (9) 式は、その下の図のように、 A の i 行と B の j 列から、内積の形の式で計算されます。よく練習してみてください。

ブレイク: (ex2) を解く。

行列の積で注目すべきもう 1 つの点は、一般には $AB = BA$ がなりたないということです。もし、特別な A, B で $AB = BA$ がなりたつときは、 A と B は可換であるといえます。

さて、行列の和と積については、(11) 式の法則がなりたちます。その中の 1: と 2: の証明が与えてあります。機械的な計算ですが、添字がたくさんでてきてなかなか難しいと思います。これがすぐに理解できればなかなかのものでしょう。わからない場合は、後でひまなときに見るとして、先に進んでいいです。

(8),(11) 式によると、行列の和と積に関する結合律がなりたつことがわかります。結合律がなりたつときは、その演算を繰り返し行うとき、括弧のつけ方が結果に影響しないことがわかっています。したがって、(16) のような式については、どのように

括弧をつけても結果が変わらないので、普通括弧は省略されます。

また、(11) 式の分配律がなりたつので、(17) 式がなりたつことがわかります。

ブレイク: (ex4) を解く。ただし、(17) 式のどちらか一方だけでもよい。

積について明らかなことは、0 行列を掛けると 0 行列になってしまうということです。すなわち、 A を (m, n) 型とすると、 $AO_{np} = O_{mp}$, $O_{lm}A = O_{ln}$ がなりたちます。

ここから、テキストでは対角行列について説明しています。対角成分とは (i, i) 成分 (i は何でもよい) のことです。 n 次対角行列とは、対角成分以外はすべて 0 であるような、 n 次行列のことで、(18) 式のような行列です。このような、 n 次対角行列同士では、和だけではなく、積の計算も簡単になります。(18) 式を $\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ で略記するとき、(20) がなりたちます。特に積の場合をよく確認してみてください。なお、 $\text{diag}(\dots)$ のような記号はスペース削減のためのもので、通常対角行列は、(18) 式を簡素化して、(19) 式のように表示されることが多いです。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & O \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

この行列の中の 2ヶ所の O は 0 行列という意味ではなく、このエリア (この場合対角成分の右上側と左下側) の成分がすべて 0 ですよという意味です。

特別な対角行列として、単位行列があります。対角成分がすべて 1 の n 次対角行列を n 次単位行列といい、 E_n または E で表します。これは (21) 式の左にかいてある行列です。その右にある n 個のベクトル e_1, e_2, \dots, e_n を n 項基本ベクトルといい、重要なベクトルです。これらは E_n の列ベクトルをなしています。

さて、単位行列の最も重要な性質は (22) 式、すなわち、単位行列を右または左から掛けても何も変化しないということです。3 次行列ぐらいで確認してみるといいでしょう。

単位行列のスカラー倍で表される行列 kE_n のことをスカラー行列といいます。これはつまり、対角成分がすべて k であるような対角行列です。スカラー行列 kE_n を右または左から掛けると、元の行列を k 倍にする作用があります。このことは (23) 式のように簡単に示せます。逆に、任意の n 次行列に右または左から掛けた結果、同じスカラー倍にする作用がある行列は、スカラー行列に限ります。このことは、(少し言い換えて) (T1) にまとめてあります。その証明はやや難しいので飛ばしてかまいませんが、一応テキスト - 11 - にかいてあります。

この節の最後に、上または下三角行列について触れています。正確な定義はテキストの通りですが、要するに上三角行列とは、対角成分より下にある成分がすべて 0 であるような n 次行列のことで、下三角行列とは、対角成分より上にある成分がすべて 0 であるような n 次行列のことで、上三角行列同士の和と積はまた上三角行列になり、下三角行列同士の和と積はまた下三角行列になります。和については明らかですが、積については実際に 3 次行列ぐらいで確認してみるといいでしょう。

ブレイク: 適当に 2 つの同じ次数の上三角行列を選び、その積が上三角行列になることを確かめる。同様のことを下三角行列についても行う。

6

5章 行列の演算と基本変形 (続き)

- 4 -

この節では行列の区分けについて勉強します。まず区分けとは何でしょう。それは行列を縦横のまっすぐな線で仕切ることです。区分けされた行列をブロック行列ともいいます。区分けは複数の縦線、横線で仕切ってもよく、また、縦または横に仕切らない場合もありえます。テキスト (25) 式は区分けの一例で、一般には (26) 式のようになります。その中の A_{ij} のことを (i, j) ブロックといいます。ここで注意すべきことは、同じ行列をどのように区分けしても、元の行列と同じものとみなすということです。同じ行列を、区分けによって異なる表示で表すことができるということです。

区分けをしたからには、計算を考えなければなりません。和の場合は、 A, B が同じ型で、同じ区分けをされているときに計算できて、各ブロックごとに足せば和が得られます。たとえば、

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix}$$

のようになります。スカラー倍でも、

$$k \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kA_{11} & kA_{12} \\ kA_{21} & kA_{22} \end{pmatrix}$$

のようになり、比較的簡単な結果になります。形だけ見ると、普通の、成分で表された行列の場合と同じ式になっています。このことは、(T2) にまとめてあります。

次に積について考えます。積はただでさえ難しいので、区分けになるとさらに難しくなります。まず、積が可能なために、 A を (m, n) 型、 B を (n, p) 型とします。そして、 A, B の区分けをそれぞれ (25), (29) 式のようにします。これは可能な区分けの一例です。どのような区分けが可能なのかというと、まず、(25) 式を見ると、 A の仕切りの横幅が、 n_1, n_2, n_3 になっています。そして、(29) 式を見ると、 B の仕切りの縦幅が、 n_1, n_2, n_3 になっています。このように、 A の仕切りの横幅と、 B の仕切りの縦幅が順序を込めて一致しているのです。これが、積における区分けの条件です。これ以外の部分については、制限はありません。したがって、 A の仕切りの縦幅と、 B の仕切りの横幅は自由に変えて大丈夫です。さて、(25), (29) 式の区分けのもとで、 AB は (30) 式のようになります。以上はテキストの例ですが、もっと簡単な例でやってみると、次のようになります。

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

この計算は、各ブロックを普通の数と見たときの、積の計算に等しいことがわかります。つまり、結論から言えば、**ブロック行列も、普通の行列と同じように計算してよいこと**になります。ただし、これはブロックの計算なので、右辺の行列の中の積の順序を変えてはいけません。

この結果を一般的な設定で定理にまとめたものが (T2') です。その下に証明が続いていますが、やはり難しいですね。計算の仕方や手順を理解するのと、証明を理解

するのでは次元が違います。初心者は難しい証明がわからなくても、計算の仕方がわかれば大丈夫です。

ブレイク: (ex6) を参考にして、逆順の積（つまり、問題の積を AB とするときの BA ）を、同様の区分けで計算し、区分けしない普通の計算も行って、結果が一致することを確認する。

あとは、正方行列の対称区分けについて扱っています。定義はテキストを見てください。簡単にいうと、(36) 式で $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{tt}$ がすべて正方行列になるような区分けです。これらのブロック以外がすべて 0 行列になるときは、ブロック対角行列といいます。同じ区分けをしたブロック対角行列の積については、(37) 式がなりたちます。

- 5 -

この節では逆行列を学びます。テキストでは冒頭から定義がかかれています。逆行列は、正方行列（ n 次行列）に対して定義されることが大前提です。 A を n 次行列とすると、

$$AX = XA = E_n$$

をみたす n 次行列 X を、 A の逆行列といい、 $X = A^{-1}$ で表します。この定義が A, X について対称的になっているので、 A と X は互いに他の逆行列になっています。したがって、

$$A = X^{-1} = (A^{-1})^{-1}$$

となります。

ここで注意すべき点は、 n 次行列 A に対して必ずしも逆行列が存在するとは限らないということです。そして、逆行列が存在する行列を正則であるといいます。どういった場合に正則なのかはのちほど学びます。正則という言葉は大切なのでしっかり覚えましょう。また、 A の逆行列は、存在するとすればただ 1 つしかありません。その証明は (40) 式にあります。

逆行列の公式で最も基本的なものは、 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ です。ただし、 A, B は正則とします。積の順序が逆になることに注意してください。(41) 式に証明があります。逆行列であることの証明の典型的なパターンです。より一般には (42) 式がなりたちますが、これを言葉に変えた、いくらかの正則な行列の積はまた正則であるという事実が重要です。

次に、区分けでかかれた特殊な行列の逆行列の公式が、(43) 式にいくらかかいてあります。これらは、さきほど習った区分けの計算で証明できますので、やってみてください。証明は、(39) 式をみたすことを確認すれば十分です。すなわち、 $AX = E_n$ と $XA = E_n$ を示します。

ブレイク: (43) 第 1,2 式（1 行目の 2 つ）を示す。

ブレイク: 2 次行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が、 $ad - bc \neq 0$ をみたすとき、次を示す。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

行列の s 乗については、テキストの説明を読んでおいてください。行列は一般に可換でない（ $AB = BA$ がなりたない）ので、一般には $(AB)^s = A^s B^s$ とはならないことに注意しましょう。たとえば、 $(AB)^3 = ABABAB$ です。

節の終わりに (T3) がかいてあります。これは逆行列の定義に関わることで、 n 次行列 A, B に対して、 $AB = E_n$ ならば、 $BA = E_n$ であるというものです。逆行列の定義 (39) を分けてかくと、

$$AX = E_n \quad \text{かつ} \quad XA = E_n$$

となりますが、(T3) によれば、上のどちらか一方がなりたてば他方もなりたつことになり、したがって、どちらか一方を確認すれば十分になります。

しかしながら、(T3) の証明はかなり難しいので、特に断らない限り、証明問題にこの定理はあえて使わないことにします。これは、逆行列の本来の定義（上の式が両方なりたつこと）をしっかりと身につけるためと、簡単な証明を難しい定理を使って行うことは不自然だと思われるからです。

- 6 -

トレースとは、 n 次行列 A の対角成分の総和のことで、 $\text{tr}A$ で表します。これについては、テキストをざっと読んでおいてください。

7

5章 行列の演算と基本変形（続き）

- 7 -

この節からは、行列の基本変形を扱います。行列に対する操作で重要なのは今までやってきた演算（和、積、スカラー倍）とこれからやる基本変形なので、しっかり学んでください。基本変形は一般に (m, n) 型行列に対して定義され、行に関するものと列に関するものがあります。簡単のため、行に関する基本変形は行変形、列に関する基本変形は列変形ということにします。以下は6種類の基本変形をまとめたものです。

行/列	変形の内容	テキストでの記号
行変形	i 行と j 行を入れ替える変形	$\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{j}$
	i 行を c 倍する変形	$c \textcircled{i}$
	i 行に j 行の c 倍を加える変形	$\textcircled{i} + c \textcircled{j}$
列変形	i 列と j 列を入れ替える変形	$\boxed{i} \leftrightarrow \boxed{j}$
	i 列を c 倍する変形	$c \boxed{i}$
	j 列に i 列の c 倍を加える変形	$\boxed{j} + c \boxed{i}$

これらの基本変形はそのまま操作として理解できますが、別の解釈として、特殊な行列を掛けた結果起こることとして理解することもできます。その行列は基本行列といい、テキストの冒頭 (49) 式に大きく表示した行列で、それぞれ $P_n(i, j)$, $Q_n(i, c)$, $R_n(i, j; c)$ で表します。それらは、(48) にかかれたように、単位行列を少し変形して作ったものです。

そこで (51) 式を見ると、 (m, n) 型行列 A に基本行列を左から掛けた場合、掛けた基本行列の種類によって上の表の3つの行変形が起こることがわかります。同様に、(52) 式より、基本行列を右から掛けた場合、上の表の3つの列変形が起こります。

このように、基本変形は、**行**または**列**についての簡単な操作であって、それはまた、基本行列という、これまた割と簡単な行列を**左**または**右**から掛けることで実現可能なのです。その意味で、行変形は左基本変形、列変形は右基本変形ともいいます。

(53) 式に3次行列 A の基本変形の例がかいてありますので、これを確認してみてください。簡単のため、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

にしてありますが、一般の3次行列であっても同様です。ここで、以下の例のように、基本行列を左から掛けるときは、 A を行に分解し、基本行列を右から掛けるときは、 A を列に分解して、区分けで計算すると、積が行変形や列変形になる仕組みがわかる

と思います。

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right) \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} \right) = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} \right) \quad \textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}$$

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} \right) \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & c \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right) = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3+2c \\ \hline 4 & 5 & 6+5c \\ \hline 7 & 8 & 9+8c \\ \hline \end{array} \right) \quad \textcircled{3} + c \textcircled{2}$$

ブレイク: (53) 式を区分けを用いて確認する。

- 8 -

この節では、前節で出てきた基本行列の正則性について勉強します。(54) 式は行列の記号がやや面倒ですが、3種の基本行列がすべて正則で、その逆行列がまた基本行列になっていることを示しています。その式は、基本行列の性質、すなわち行列に掛けると基本変形を引き起こすことを利用して証明できます。詳細はテキストにありますので、見ておいてください。

(56) 左の式を見ると、 A に左から基本行列 P を掛けると行変形が施されて PA になり、逆に、 PA に左から P^{-1} (これも基本行列) を掛けると、逆の行変形が施されて A に戻ることがわかります。同様に、右の式では列変形と逆の列変形がかけられています。

- 9 -

いよいよ行列の階数についての説明になります。行列 A は一般に (m, n) 型とします。 A の階数またはランクとは、 A につけた点数のようなもので、最低で0から始まり、 $1, 2, 3, \dots$, と増えて最高で $\min(m, n)$ (m, n の小さい方) までありえます。機械的な定義はテキストにある通りで、まず (58) 式のような $F_{mn}(r)$ を考えます。これは、左上から対角成分の部分に1が r 個並び、残りの成分はすべて0であるような (m, n) 型行列で、標準形といいます。

$$F_{mn}(r) = \begin{pmatrix} E_r & O_{r, n-r} \\ O_{m-r, r} & O_{m-r, n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

右辺は O の添字を省略したもので、これでも大丈夫です。(ただし、同じ O でも型が違うことがあるので気をつけて) これは、(60) 式にあるように、 m, n, r の組合せによって、いろいろな形になるので注意しましょう。

さて、 A に基本変形を繰り返し行って、

$$A \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_{mn}(r)$$

のように標準形に到達できたとき、 A の階数またはランクは r であるといい、 $r(A)$ ($= A$ の階数) $= r$ とかきます。

行列 A の階数が何を意味するかは、今の段階では説明が難しいのですが、たとえば、 A の階数は、 A の線形独立な列 (または行) ベクトルの最大数などに等しいことがわかっています。ただし、線形独立の一般的な定義はずっと後になります。すごく

直感的に言えば，列（または行）ベクトルの向きがばらけている程，階数が大きくなります。

さて，実際に (59) の基本変形をどうするかという問題に入ります．そのための基本的なアルゴリズムはテキスト 11 ページの後半にかいてあるので，読んでみてください．ここでは，そのアルゴリズムを直感的にかいてみます．行列の中の * の記号は適当な数を表し，同じ記号でもばらばらの数でかまいません．また，1つの矢印でいくらかの基本変形をまとめてやっていることもあります．

$$\begin{aligned}
 A &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * \\ * & * & * & \dots & * \\ * & * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & \dots & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & * & * & \dots & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & * & * & \dots & * \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & * & * & \dots & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

以下繰り返すと標準形になるというわけです．ここで，1を左上の方に持ってくるステップが何度かありますが，そのとき基本変形を工夫して，行列になるべく分数が出てこないようにしましょう．分数が出てくると後々計算が厄介になります．また，1の下をすべて0にする（列の掃き出し）ステップは，一番計算が面倒な部分で，たとえば2番目の矢印の部分では，他の行から1行のスカラー倍を引くことで，1の下をすべて0にします．その次の，1の右をすべて0にする（行の掃き出し）ステップは，（すでに1の下がすべて0なので）楽なステップですね．(61) 式に階数計算の具体例がありますので，やり方を習得してください．

基本変形をするときは，= で変形してはいけません．変形の前後で明らかに行列は変わっているからです．このテキストでは，基本変形を \rightarrow で表します．そのとき，できるだけ矢印の上か下（または両方）に何の変形をしたかを記号でかいてください．これは，テキストでは（打ち込みが大変なため）省略していることが多いのですが，実際に解くときは記号をかく方が間違いを防ぎます．基本変形をまとめて行っているときは，まとめた分の変形をすべてかいておきます．(61) 式の場合は，次のようになります．

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -4 \\ 5 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & -5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)\textcircled{3}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 \\ 5 & 2 & -1 & -3 \\ 4 & -5 & -5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{3}} \\
 &\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 5 & -3 \\ -5 & -5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} + \textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 7 & -7 \\ 0 & 10 & 14 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{2} - 3\textcircled{1} \\ \textcircled{3} - 2\textcircled{1} \\ \textcircled{4} + 4\textcircled{1} \end{matrix}} \\
 &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & -7 \\ 0 & 10 & 14 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}\textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -7 \\ 0 & 2 & 14 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} - 2\textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{3} - 7\textcircled{2} \\ \textcircled{4} + 7\textcircled{2} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F_{34}(2). \quad \therefore r(A) = 2.
 \end{aligned}$$

今まで述べた行列の階数については、その定義が基本変形に依存しているので、注意深く読んでいる人は、もしかしたら、基本変形のやり方によって、得られる階数が変わってしまうのではないかという疑問を持つかもしれません。その心配を払拭するのが (T4) で、行列 A の階数は基本変形のやり方によらず A のみで決まることがかいてあります。証明は飛ばしてもいいですが、これにより、安心して階数が求められます。

- 10 -

この節では、 n 次行列の階数とその正則性などについて学びます。冒頭 (T5) として、 n 次行列が正則であるためには、階数が n であることが必要十分であることがかいてあります。正則性と階数という、行列において重要な2つの概念の関係が示されたわけですから。これは大切なところなので、証明も見ておくといいでしょう。

この証明の中で、(68) 式のような基本変形の繰り返しを、(69) 式のような基本行列の掛け算におきかえている部分がありますが、これが証明の鍵になります。基本変形は簡単な操作ですが、これを基本行列の積に書き直すことで、数学的に扱いやすくなるのです。これに加えて、証明には、基本行列の正則性や、正則行列の積がまた正則になることなどが使われます。

この証明をよく吟味すると、(T5) 以外にも面白い結果が出てきます。それは (T5⁺) にまとめてある通りで、 n 次行列 A についての次の5つの条件が同値になります。

- (i) A が正則である.
- (ii) $r(A) = n$.
- (iii) A がいくらかの基本行列の積になる.
- (iv) A を行変形のみで E_n に移せる.
- (v) A を列変形のみで E_n に移せる.

このうちの (iv) の結果を利用して、正則な行列の逆行列を求めることができます。これは基本変形を使った逆行列の計算で、掃き出し法などとも呼ばれます。やり方はテキストにかいてある通りで、 A を正則な n 次行列とするとき、**行変形**のみを繰り返して、

$$\left(A \ E_n \right) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left(E_n \ B \right)$$

とできたとき、 $B = A^{-1}$ になります。証明は (75) を見てください。ここで注意すべきことは、階数を求めるときはすべての基本変形を使えたのに対し、逆行列の計算では、行変形だけしか使えないということです。(ex10) のやり方を見てスキルを習得しましょう。

ブレイク: (ex10) を解く。(基本変形のやり方はいろいろあります)

- 11 - - 12 - - 13 -

- 11 - には後回しにした証明がかいてあります。- 12 - には一般のベクトルの内積についてかいてあります。- 13 - ではいろいろな行列の種類を説明しています。- 12 - - 13 - の内容は、この授業ではあまり使いませんが、後で役に立ちます。

8

6章 1次方程式系の解法

- 1 -

1次方程式系は連立1次方程式ともいいます。ここでは、これを行列を使って解くことを学びます。変数と式が3つずつぐらにある1次方程式系は今まで何度も解いてきたと思いますが、それは多分行列などは使わないやり方で解いていて、しかも、解がただ1つに決まっていたと思います。ここではより一般的な設定で1次方程式系を考え、それを行列を使ってどのように解くのかを見ていきましょう。

まずは、(1) 式のような1次方程式系を考えます。そこでは、変数の数 n と方程式の数 m は必ずしも一致していないことに注意してください。今、(2) 式のように A, x, c を決めると、(1) 式は、(3) 式、すなわち、

$$Ax = c$$

とかくことができます。 A, x, c はそれぞれ、係数行列、変数ベクトル、定数ベクトルといいます。

これを变形して解くためには、基本的に、両辺の左から正則行列 P を掛けることになります。すると、(4) 式、すなわち、

$$PAx = Pc$$

が得られます。もし A が正則ならば、 $P = A^{-1}$ を掛ければ、

$$x = A^{-1}c$$

のように一瞬で解けてしまいます。(もちろん A^{-1} を計算しなければなりません...) このように、両辺に P を掛けるというのは、とても強力な手段です。

そして(5) 式にあるように、(3) 式と(4) 式は (P が正則な限り) 同値であることがわかります。式を变形しても、劣化しないのです。

ここで、より効率化するために、拡大係数行列 $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & c \end{pmatrix}$ を考えます。これは、 A と c を並べた行列なので、 $Ax = c$ の情報を保持していて、いつでも $Ax = c$ を再現できます。そこで、 \tilde{A} に左から P を掛けると、 $\begin{pmatrix} PA & Pc \end{pmatrix}$ となり、 $PAx = Pc$ を再現できます。すなわち、 $Ax = c$ を变形する代わりに $\begin{pmatrix} A & c \end{pmatrix}$ の左から適当な正則行列 P を掛けて变形できます。

さて、5章 (T5+) によると、正則な行列 P はいくらかの基本行列の積で表されます。したがって、 \tilde{A} に P を左から掛けることは、基本行列を何度か左から掛けることになり、そのとき、それに対応する**行変形**がなされるはずで、言い換えれば、 \tilde{A} に**行変形**を繰り返すことで、目標となる $\begin{pmatrix} PA & Pc \end{pmatrix}$ を得られるのです。

そこで、目標の $(PA \ Pc)$ を (7) 式のように設定します。このようにすることで、その先の処理が簡単になるからです。なお (7) 式は、

$$(PA \ Pc) = \begin{pmatrix} E_r & B & d_1 \\ O & & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & B & d_1 \\ O & O & d_2 \end{pmatrix}$$

の右辺のようにかいた方が区分け表記としては普通でしょう。ただし、右辺の2つの O は一般には横幅が異なります。

次に、(7) 式を $PAx = Pc$ の形に戻して (8) 式を得ます。これを区分で計算して、(9) 式になります。この式の下半分は $d_2 = 0$ となり、これが、方程式 (3) が解けるための必要条件になります。 $d_2 \neq 0$ ならば、(3) は解を持ちません。

以下、 $d_2 = 0$ を仮定して、(9) 式の上半分を移項すると、(10) 式が得られます。これはもう、 x_1, \dots, x_r については解けた形です。右辺の残りの変数 x_{r+1}, \dots, x_n には他に条件はないわけですから、任意に値を与えてあげます。それが、(11) 式です。これを (10) 式に代入して少し変形すれば、 x_1, \dots, x_r の値が (13) 式で得られます。

今、 $d_2 = 0$ の仮定のもとで (3) が解けたので、 $d_2 = 0$ は (3) が解けるための必要十分条件だということになります。ただ、 d_2 は計算しないと出てこないもので、別の言い方にしたものが、(14) 式右辺の

$$r(A) = r(\tilde{A})$$

です。これは、(7) 式において、

$$r(A) = r \begin{pmatrix} E_r & B \\ O & O \end{pmatrix}; \quad r(\tilde{A}) = r \begin{pmatrix} E_r & B & d_1 \\ O & O & d_2 \end{pmatrix}$$

であることからわかります。

さて、話を (3) の解に戻すと、変数を2つに分けていて、 x_1, \dots, x_r については (13) 式、 x_{r+1}, \dots, x_n については (11) 式で解が与えられます。したがって、変数全体 x_1, \dots, x_n については、これらをまとめることで、(15) 式で解が与えられます。(15) 式は (3) のすべての解を表しているのので、一般解といいます。また、 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$ は任意定数で、パラメータといいます。パラメータの数は、 $n - r = (\text{変数の数}) - r(A)$ になります。

それにしても、(15) はあまりわかりやすい式ではないので、少し解説しましょう。まず、(15) 式右辺第1項は、(7) 式で出てきた d_1 の下にいくらか0を追加したベクトルです。この追加の量は、(7) 式の d_1 の下にある0 (解けるなら $d_2 = 0$) の数とは関係なく、 $n - r$ 個です。変数の数と同じになるまで d_1 の下に0を追加すると考えてください。

次に、パラメータ $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$ が掛かっているベクトルたちについてです。これらを列ベクトルとして横に並べて1つの行列を作ると、

$$\begin{pmatrix} -b_1 & -b_2 & \dots & -b_{n-r} \\ e_1 & e_2 & \dots & e_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B \\ E_{n-r} \end{pmatrix} \left(= \begin{pmatrix} -B \\ E \end{pmatrix} \right)$$

になりますね。ここで、 B は (7) 式で出てきた B で、 E_{n-r} はもちろん単位行列です。つまり、(7) 式まで変形できたら、

$$\begin{pmatrix} -B \\ E_{n-r} \end{pmatrix}$$

を作って、これを列ベクトルに分解して、(15) 式のパラメータ部分を完成できます。結局、(7) 式が得られれば、そこからは機械的に (15) の解が出てくるのです。また、 $E_{n-r} = E$ と簡略化して、 $n-r$ も覚える必要はありません。この E は $-B$ の横幅に合わせて作ればいいだけのことであります。

1 次方程式系の難しさは、その目標となる (7) 式 (右辺) が持つバリエーションです。つまり、(7) 式は変化に富んでおり、処理が難しくなるということです。これに慣れるには、例題や演習問題で練習することが必要ですが、ここではその前に、その (7) 式の持つバリエーションを具体的に見てみましょう。

まず、(7) 式は $m = r$ のとき、(16) 式の形になります。このときは、 d_2 が存在しないので、必ず解があり、それはやはり (15) 式で表されます。

さらに特殊な場合として、 $n = r$ または $m = n = r$ のときは、(7) 式は (17) 式の形になります。これはつまり、 B の部分が消え去っている場合で、したがって、(15) の解において、パラメータの部分がごっそりなくなって、

$$x = d_1$$

になる、すなわち、解がただ 1 つに決定します。ただし、(17) 式左の場合は、 $d_2 = 0$ のときに解があり、(17) 式右の場合は、つねに解があります。この、(17) 式右の場合は、実は A が正則な場合に相当し、はじめの方で、逆行列を掛けて一瞬で解けると言っていた場合になります。高校までで出てくるのは、ほとんどこの場合にあてはまります。

さて、テキストに例題 (ex1-3) がありますので、解き方をしっかり理解してください。 \tilde{A} の行変形のアルゴリズムは、行変形で逆行列を求めるときと同様ですが、あらためてかいておくと、以下の通りです。

- 1a: (1,1) 成分を 1 にする。
- 1b: (1,1) 成分の下にある成分をすべて 0 にする。(1 列を e_1 にした)
- 2a: (2,2) 成分を 1 にする。
- 2b: (2,2) 成分の上と下にある成分をすべて 0 にする。(2 列を e_2 にした)
- 3a: (3,3) 成分を 1 にする。
- 3b: (3,3) 成分の上と下にある成分をすべて 0 にする。(3 列を e_3 にした)
- 4: 以下繰り返す。

ただし、これは原則で、問題によって、多少順序を変えた方が効率がよい場合もあります。いずれにしても、大筋はこれに従ってください。

例題の解の最後の部分で、パラメータ α を $\tilde{\alpha}$ に変換している場合がありますが、これは分数をなくす工夫で、やらなくても大丈夫です。ただ、分数がないほうが、後で解をチェックするのに便利なことが多いです。

得られた解が正しいかどうかのチェックの方法は以下の通りです。パラメータのある項は、パラメータを外して代入していいです。

解の部分	チェック方法
第 1 項 パラメータのある項	方程式に代入するとすべてみたす 方程式に代入するとすべて 0 になる

ブレイク: (ex1),(ex2),(ex3) を解く.

- 2 -

この節は、斉次（同次）1次方程式系について扱っています。斉次（同次）というのは、定数項がすべて0の場合をいいます。したがって、それを行列でかけば、(18)式、すなわち、

$$Ax = 0$$

になります。これは(3)の特殊な場合なので、もちろん今まで説明したやり方で解けます。ただし、定数ベクトルが0ベクトルなので、拡大係数行列が、

$$\left(A \ 0 \right)$$

になり、これにどれだけ行変形を行っても、右端の列は0ベクトルのままで、 $d_1 = 0$, $d_2 = 0$ になります。したがって、(18)はつねに解を持ち、その一般解は(15)において第1項（パラメータのない部分）を除いた形になります。特に1つの解として $x = 0$ を持ちますが、これを自明な解といいます。また、行列を使って解くときは、拡大係数行列をかかずに、係数行列 A のみを行変形して、

$$A \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left(\begin{array}{cc} E_r & B \\ O & O \end{array} \right) \text{ または } \left(E_r \ B \right)$$

のようにすれば十分なことがわかります。特に、 $n = r (= r(A))$ のときは、右辺は B が消えて、 $\left(\begin{array}{c} E_n \\ O \end{array} \right)$ または E_n になります。このときは、- 1 - で見たのと同様、

$$x = 0$$

が唯一の解になります。 $n \neq r$ (必然的に $n > r$) のときは、(15)式より、自明でない（すなわち0以外の）解が存在します。こうして、(T2)が得られます。

最後に、(T3)として、 $Ax = c$ の一般解は、 $Ax = c$ の1つの解と $Ax = 0$ の一般解の和で表されることがかかれています。その証明はテキストを見てください。

- 3 -

ここでは、例外的な場合として、行変形だけでは拡大係数行列を(7)式右辺の形にできない場合を扱っています。このような場合は、特例として列の交換を行います。ただし、列交換は、 \tilde{A} の右端以外の列（すなわち A に当たる部分の列）にのみ許されます。 A の列は変数に対応しているので、列の交換を行うときは、対応する変数も同時に交換しなければなりません。この列交換については、行変形だけではできない場合や、列交換で特別なメリットがある場合にのみ行うようにしましょう。

(ex4)に具体例があります。この場合、変数は x, y, z, w の順で、したがって、 A の列は1列から順に x, y, z, w に対応しています。普通の行変形で4番目の行列まで変形できましたが、ここから行変形だけでは(3,3)成分を1にできないので、 $\boxed{3} \leftrightarrow \boxed{4}$ を行います。そのとき、変数の交換 $z \leftrightarrow w$ も行います。あとは行変形のみで完成できました。ただし、これから得られる解は x, y, w, z の順になるので、元の順 x, y, z, w に戻しておきます。

ブレイク: (ex4) を（答えを見ずに）解く。

9

7章 行列式とその応用

- 1 -

ここから行列式の話になります。この章には、行列式や、そこから得られる重要な応用についてかかれています。行列式とは、 n 次行列の成分たちの、規則的ではあるが、とても複雑な多項式です。重要な応用とは、行列の正則性を判定したり、逆行列の明示的な公式をつくることなどです。

すでに 3 次行列の行列式 (3 次行列式) は習いましたが、これは平行 6 面体の体積ということでした。ここでは、より一般に、 n 次行列の行列式 (n 次行列式) を定義します。 n 次行列 A に対して、 A の行列式を $|A|$ や $\det A$ で表します。このとき、 $A = (a_{ij})$ の行列式を、(1) 式で定義します。

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{j_1, \dots, j_n} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

ここでは、 a_{ij} の添字において、行番号 i を青、列番号 j を赤で書いて、2 つの添字を区別していますが、少しは見やすくなったでしょうか。(1) の定義に $=$ が 2 つありますが、これはかき方の違いで、内容は同じです。

$\operatorname{sgn}(\dots)$ の記号は、のちほど ± 1 のどちらかの値を持つことを習いますので、大雑把に言うと、 A の行列式とは、 a_{ij} たちを n 個掛けたものを $+$ か $-$ でつなげた式になるようですね。しかしながら、 S_n などわからない記号が使われていますので、そこから説明しなければなりません。

- 2 -

準備段階として、1 対 1 対応の説明がかいてあります。正確にはテキストを見てください。 A, B を集合とします。 f が A の各元を B の元に対応させるとき、 f を A から B への関数 (または写像) といい、

$$f : A \longrightarrow B$$

で表します。そして f が全射かつ単射であるとき、1 対 1 対応 (または全単射) といいます。直感的に言うと、 f が B 全体に、しかもかぶらずに対応させているとき、1 対 1 対応といいます。 f が 1 対 1 対応ならば、逆関数 (逆写像) f^{-1} が存在します。

やっとな置換の定義に入ります. 便宜上 $\{1, 2, \dots, n\} = [n]$ とかきます. そこで, $[n]$ から $[n]$ への1対1対応を n 文字の置換といいます. (4) 式に, 3文字の置換の例がかいてあります. それは, (5) 式のように表します. つまり, 上から下に対応するようになければいいのです. (5) 式においては上下の関係が重要なので, 形式的に列を入れ替えたものは, 同じ意味になります. すなわち,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ということになりますが, 普通は第1行を $1, 2, 3, \dots$ と並べます.

第1行を固定して第2行を変えれば異なる置換が得られます. その個数は, $1, 2, 3$ の並べ方 (順列) の数になるので, $3! = 6$ 個になります.

n 文字の置換も同様に表すことができ, 一般に (6) 式のようになります. n 文字の置換の総数は $n!$ になりますが, それらすべてからなる集合を, S_n で表します. (7) 式に, S_3 が具体的にかいてあります. その中の, はじめにかいてある置換は恒等置換または単位置換といって, なにも変えない置換です. これをよく e で表します. n 文字の恒等置換は (8) 式になります.

この節では置換の積について考えます. n 文字の置換 σ, τ に対して, 積 $\sigma\tau$ を合成 $\sigma \circ \tau$, すなわち (9) 式で定義します. いいかえると, $\sigma\tau$ はまず τ を行ってから σ を行うことを意味しています. この積については, 行列の場合と同様に, **一般には $\sigma\tau = \tau\sigma$ はなりたちません**. 具体例として (10) 式がかいてあります. 第1式をもう少し詳しく見てみると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

というように, 同じ色を追っていけば, 置換の積が自然に出てきます. 第2式も同様です.

以下, (T1) では, 置換の積について結合律がなりたつことを述べています. 結合律は, 関数の合成に関して一般になりたつことです. 結合律がなりたてば, その演算を繰り返した式では括弧が省略できることは, ご承知の通りです.

次に, 逆置換を (14) 式で定義しています. これも逆行列と似ていますが, こちらの方が簡単で, (15) 式のように, 逆置換は, 元の置換の上下を逆にして, 列を入れ替えばいいのです. (16),(18) 式の公式も行列の場合と同様です.

置換の話で難しいのはやはり符号です. 符号を定義するために, 互換という特殊な置換を導入します. すなわち互換とは, 2つの文字を入れ替える以外は何も変えない置換のことです. i と j を入れ替える互換を (i, j) または (j, i) で表します. 互換については (19) 式が確認できます.

一般に, n 文字の置換は互換の積で表せることがわかっています. その詳しい説明はテキストを見てください. ここでは, テキスト3ページのような図によって, 置換を互換の積で表す (互換に分解する) 方法を説明します. (20) 式の左の置換 σ に対して, その下の I のような図を描きます. これは, 置換を大きめにかいて, 同じ数字を線でつないだものです. そして, i をつないだ線と j をつないだ線の交点に互換 (i, j) を記入します. このとき, できた図の互換を下から上に読んで $(1, 3)(1, 2)$ と並べればこれが σ の互換への分解になります. (20) 式の右の置換 τ でも同様です. ただし, 数字をつなぐ線は曲線でもいいですが, 必ず上から下に単調に降りていて, 2つの線が接したり, 3つ以上の線が1点で交わることがないようにします.

なお, τ のような複雑な置換では, あらかじめ置換をうまく列交換してかき換えることで, 図や互換への分解が簡単になることもあります. 図 II の (i) と (ii) は同じ置換 τ を表しますが, ずいぶん違いますね. このようにして, (21) 式のような互換への分解が得られます. τ については, 2通りの分解が得られました.

ここで, 置換の図の中で, 水平に位置する互換については, これを積として並べる順序は, 他の互換との順序が正しい限り任意でいいです.

さて, 肝心の置換の符号を定義します. 1つの置換を互換に分解したとき, **互換の数が偶数ならば偶置換, 奇数ならば奇置換** といいます. そして, (23) 式で置換 σ の符号 $\text{sgn}(\sigma)$ を定義します. つまり, 置換の図を描いたとき, 交点の数が偶数なら符号は 1, 奇数ならば符号は -1 になります.

置換の符号については, $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_s$ のように置換を互換に分解したとき, 定義より,

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^s$$

とかけることがわかります. これを利用すると, (T3) すなわち (26) 式が証明できます. この証明はそれほど難しくないので, 見ておきましょう.

ブレイク: (ex1) を解く.

10

7章 行列式とその応用 (続き)

- 6 -

前節までで置換とその符号について学びました。これで、やっと行列式の定義 (1) の意味が理解できます。(1) には左と右の2つの定義がありますが、本質は同じなので、右の定義を見てみましょう。これは、 j_1, \dots, j_n を $1, 2, \dots, n$ のすべての順列におきかえながら、

$$\operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

を総和したものです。左は置換の符号で、右は行列の成分の積です。この成分の積をよく見ると、青い添字には1から n までが1回ずつ使われていて、赤い添字も1から n までの順列なので、1から n までが1回ずつ使われていることがわかります。では、このような成分たちが、実際行列の中でどこにあるかを考えると、それは、各行各列に丁度1つずつあるように並んでいることがわかります。

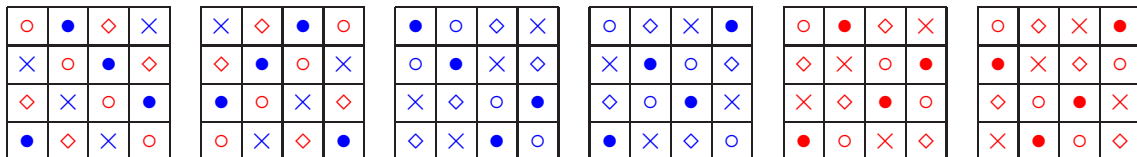
すなわち n 次 (の) 行列式とは、各行、各列から1つずつ、 n 個の成分を選んで作った積に、適当に符号をつけて総和した式で、その項の数は $n!$ 個もあります。

それでは、簡単な場合で確認してみましょう。3次行列式は3章でやったサラスの公式になります。

$$\begin{aligned} |a_{11}| &= a_{11} && \begin{array}{|c|} \hline \times \\ \hline \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} && \begin{array}{|c|c|} \hline \circ & \times \\ \hline \times & \circ \\ \hline \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} && \begin{array}{|c|c|c|} \hline \circ & \bullet & \times \\ \hline \times & \circ & \bullet \\ \hline \bullet & \times & \circ \end{array} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} && \begin{array}{|c|c|c|} \hline \times & \bullet & \circ \\ \hline \bullet & \circ & \times \\ \hline \circ & \times & \bullet \end{array} \end{aligned}$$

右端の図は、行列式の各項に対応する成分の組合せを表し、1つの図の同じ記号が1つの項に対応しています。符号が1の項は赤、符号が-1の項は青でかいてあります。

これが4次行列式になると、さらに複雑になり、項数は $4! = 24$ にもなります。ここでは、あえて展開式はかかずに、右端にかいたような、項に対応する成分の組合せを列挙してみましょう。



いかがでしょうか？ なかなか綺麗な模様ができましたね。しかし、これを覚えることは普通しませんし、公式としてあげられることもあまりないでしょう。行列式というものを、感覚的に捉える手助けになればいいと思います。特に、**サラスの公式は3次行列式にしか適用できない**ということに注意してください。

実際に行列式を計算するときは、(1) 式をそのまま使うのではなくて、そこから得られる、行列式の基本的な性質や公式を利用することが多いです。まず、行列式の基本的な性質をまとめてみましょう。

行列式の性質	テキストの定理, 式番号	内容
行に関する多重線形性 (和)	(T4) (28) 第 1 式	行列式のある行が和でかかれたとき、 2つの行列式の和に分解する。
行に関する多重線形性 (スカラー倍)	(T4) (28) 第 2 式	行列式のある行が c 倍されたとき、 行列式は c 倍になる。
列に関する多重線形性 (和)	(T4') (29) 第 1 式	行列式のある列が和でかかれたとき、 2つの行列式の和に分解する。
列に関する多重線形性 (スカラー倍)	(T4') (29) 第 2 式	行列式のある列が c 倍されたとき、 行列式は c 倍になる。
行に関する交代性	(T5) (30) 式	行列式の行を置換 τ で入れ替えたとき、 行列式は $\text{sgn}(\tau)$ 倍になる。
列に関する交代性	(T5') (31) 式	行列式の列を置換 τ で入れ替えたとき、 行列式は $\text{sgn}(\tau)$ 倍になる。
行に関する交代性 (互換)	(T5-)	行列式の 2 つの行を入れ替えると 符号が変わる。
列に関する交代性 (互換)	(T5-)	行列式の 2 つの列を入れ替えると 符号が変わる。
転置行列の行列式	(T6) (37) 式	行列式を転置しても値は変わらない。

これらの定理の証明は、テキスト 6-7 ページにかいてあります。原則として、行列式の定義 (1) を使って証明しています。(T4) の証明はそれほど難しくありませんが、(T5-6) の証明はやや難しいと思います。できる範囲で見ておいてください。

- 7 -

上にまとめた表から、行列式に基本変形を行うとどうなるかがわかります。それはテキストにまとめた通りで、R1-3, C1-3 としてかかれています。ここに繰り返しかくことはしませんが、大変重要なことなので、よく覚えておきましょう。

さらに補足的に、同じ行を持つ行列式や、同じ列を持つ行列式は 0 であることが示されています。それは、同じ行を入れ替えたとき、交代性より符号が変わる一方、同じ行なので、行列式は変わっていないということから出てきます。列の場合も同様です。また、ある行またはある列がすべて 0 (すなわち 0 ベクトル) の行列式は 0 であることもわかります。理由はテキスト 8 ページにある通りですが、多重線形性 (スカラー倍) から導けます。

さて、R3 や C3 については、上にあげた行列式の性質そのものではなく、確認に少し計算が必要です。それは (40) 式に示してありますので、見ておいてください。

ブレイク: (ex2) を解く。(テキストの解答は一例なので、解き方は各自工夫してください。)

この節では、 n 次行列が正則であることは、その行列式が0でないことと同値であることを学びます。そのために、まず単位行列 E_n の行列式を考えます。これは、(1) 式にそのまま代入しても計算できる特殊な例で、中辺（または右辺でもいい）に代入すると、ほとんどの項が0になってしまい、生き残るのは、

$$a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \dots, a_{n\sigma(n)}$$

のすべてが1になる項、すなわち、これらがすべて対角成分になる項だけです。したがって、 $\sigma = e$ になり、

$$|E_n| = \text{sgn}(e)1 \dots 1 = 1$$

になります。同様にして、対角行列の行列式については、(45) 式のように、すべての対角成分の積になります。

そこで、基本変形と行列式の関係思い出すと、行列式に基本変形を行ったとき、行列式は符号が変わるか、 c ($\neq 0$) 倍されるか、変わらないかのいずれかでした。すると、行列式が0でなければ、基本変形後も行列式は0でなく、行列式が0ならば、基本変形後も行列式は0になります。すなわち、**行列式が0かどうかについては、基本変形の前後で変わらない**ことがわかります。

さて、 n 次行列 A が正則であるとします。5章 (T5) より $r(A) = n$ なので、基本変形を繰り返して、

$$A \longrightarrow \dots \longrightarrow E_n$$

とできます。そのとき、行列式を考えると、

$$|A| \longrightarrow \dots \longrightarrow |E_n| = 1$$

で、上の赤字のことから、

$$|A| \neq 0$$

が言えます。次に、 A が正則でないとします。やはり5章 (T5) より $r(A) = r < n$ なので、基本変形を繰り返して、

$$A \longrightarrow \dots \longrightarrow F_{nn}(r)$$

とでき、行列式を考えると、 $F_{nn}(r)$ は対角行列で対角成分に0があるから、

$$|A| \longrightarrow \dots \longrightarrow |F_{nn}(r)| = 0$$

となります。したがって、ふたたび上の赤字のことから、

$$|A| = 0$$

が言えます。以上をまとめると、(T7) が得られます。正則性を行列式で判定できるわけですね。

11

7章 行列式とその応用 (続き)

- 9 -

ここでは、行列式の公式の中でも、最も基本的で大切なものを解説しています。それは (T8) (47) 式と (T9) (48) 式で、(T8) は積の行列式が行列式の積になるという公式、(T9) は O を含んだある形の行列式が、積に分解するという公式です。(T8) の

$$|AB| = |A||B|$$

については特に解釈に難点はないでしょう。ただし、 A, B はどちらも n 次行列としています。(T9) では、 A は r 次、 C は s 次行列 (すなわち、どちらも正方行列) として、

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ B' & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ O & C \end{vmatrix} = |A||C|$$

がなりたつと述べています。この式において、行列 B, B' は行列式の値に影響しないことに注意してください。また、 r, s は任意なので、 O の形は正方形であったり、長方形であったり、縦や横のベクトルにもなり得ることに注意してください。

(T9) の姉妹品として、 A, B, C, D を n 次行列とするとき、

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{cases} |AD - ACA^{-1}B| = |DA - CA^{-1}BA| \\ |AD - BD^{-1}CD| = |DA - DBD^{-1}C| \end{cases} \quad (*)$$

のような公式がなりたちます。ただし、逆行列を使っている部分はその行列が正則であることを仮定しています。これは、覚えてもらうためにかいたのではなくて、ただ、簡単な公式にはならないということがわかってもらえればいいのです。たとえば、

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{cases} |AD - BC| \text{ (または、積の順序を変えたもの)} \\ |A||D| - |B||C| \end{cases}$$

のような公式は**なりたちません**。(*) の公式から見て、右辺の上段は少し惜しく、下段は全くダメですが、どちらも間違いであることに変わりはありません。

さて、(T8-9) の証明の話に移ります。これらの定理の証明は、大抵の本では、行列式の定義や基本的な性質を利用して、やや難しい計算でなされています。このテキストでは、基本変形を利用した、計算をほとんどしない証明を紹介しています。

(T8) の証明について見てみると、まず、 A が正則な場合を扱っていて、これが主要な部分になります。 A が正則ならば、5章 (T5⁺) より、行変形だけで E_n にできます。そしてそれは、左からいくらかの基本行列を掛けることでも実現できます。

$$A \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_k \cdots P_1 A = E_n$$

これと全く同じ行変形を、行列 AB に対して行えば、

$$AB \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_k \cdots P_1 AB = B$$

となります。さて、**2つの行列式に同じ基本変形を行えば、値は同じように変化し、同じ定数倍になる**ことがポイントで、このことから、上の2式の行列式を考えると、

$$|A| \times c = |E_n| = 1, \quad |AB| \times c = |B|$$

となり,

$$|AB| = \frac{1}{c} \times |B| = |A||B|$$

を得ます. A が正則でない場合は AB も正則でなくなり, したがって, (47) の両辺は 0 になります.

(T9) も同様のテクニックを使って証明しています. 詳しくはテキストを見てください.

上三角行列, 下三角行列の行列式は, (59) 式のように, すべての対角成分の積になります. これは, (T9) から導かれます. たとえば, 4次の場合なら以下の通りです.

$$\begin{array}{|cc|cc|} \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|cc|} \hline a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{44} \\ \hline \end{array} = (a_{11}a_{22})(a_{33}a_{44})$$

$$\begin{array}{|cc|cc|} \hline a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|cc|} \hline a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \\ \hline \end{array} = (a_{11}a_{22})(a_{33}a_{44})$$

- 10 -

ここから, 理論上, 実用上ともにとっても重要な, 行列式の**余因子展開**について説明します. 余因子展開は, n 次行列式を $(n-1)$ 次行列式の n 個の和で表す公式です. テキストの式を追っていきましょう. まず, n 次行列 A を取ります. この j 列を基本ベクトルを使って表して, (61) 式を得ます. すると, 行列式の列に関する多重線形性 (33), (29) 下より, (62) 式のように, $|A|$ を和で表せます. すなわち,

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} \begin{vmatrix} & & & j) \\ \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{e}_i & \dots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix}.$$

見やすくするために, この和の中身をテキストと少し違うかき方でかいて, 変形してみましょう. (式変形は次のページにあります.) はじめに j 列を左隣の列と次々に入れ替えて 1 列まで持っていき, 次に i 行をすぐ上の行と次々に入れ替えて 1 行まで持っていきます.

すると, (T9) の形になるので, 最右辺の行列式にまで変形できます. この時点で行列式の次数が 1 つ減りましたね.

$$\begin{aligned}
& a_{ij} \begin{vmatrix} & & \overset{j}{0} & & \\ & P & \vdots & Q & \\ & & 0 & & \\ * & \cdots & * & 1 & * \cdots * \\ & & & & \\ & R & \vdots & S & \\ & & 0 & & \end{vmatrix} \begin{matrix} i) \\ j) \end{matrix} = (-1)^{j-1} a_{ij} \begin{vmatrix} 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & P & & Q & \\ 1 & * & \cdots & * & * \cdots * \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & R & & S & \end{vmatrix} \\
& = (-1)^{i-1} (-1)^{j-1} a_{ij} \begin{vmatrix} 1 & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & & P & & Q & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & R & & S & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} P & Q \\ R & S \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

これで計算は大体終わりました。あとは記号や名前を導入します。まず、最右辺の行列式

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ R & S \end{vmatrix}$$

は、元の行列 A の i 行と j 列を除いた行列の行列式で、これを A の (i, j) 小行列式といい、 Δ_{ij} で表します。

さらに、 $(-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ を A の (i, j) 余因子といい、 \tilde{a}_{ij} で表します。(B の (i, j) 余因子であれば、 \tilde{b}_{ij} とかきます。)

この記号を使えば、さきほどやった行列式の計算結果は、次のようにまとめられます。

$$|A| = a_{1j} \tilde{a}_{1j} + a_{2j} \tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj} \tilde{a}_{nj}$$

これを **j 列に関する余因子展開** といいます。同様に、次の公式もなりたちます。

$$|A| = a_{i1} \tilde{a}_{i1} + a_{i2} \tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in} \tilde{a}_{in}$$

これを **i 行に関する余因子展開** といいます。この公式は、 i 行を基本ベクトル (の転置) で表して、上と同様に計算していけば示せます。あるいは、列に関する余因子展開の転置を取ることでも示せます。

ブレイク: (ex3) を解く。ヒント: テキストの解答は一例で他にもいろいろな解答があります。もちろん最後の答えはただ一つです。

行列式の計算では、基本変形で行列式を簡単な形に変えながら計算していくといでしょう。すなわち、公式が適用できる形にしたり、多くの成分を 0 にしたり、成分を簡単な数にしたりするといでしょう。特に、余因子展開を使うときは、展開しようとする行や列の成分をなるべくたくさん 0 にすると展開に都合がよくなります。

いよいよ逆行列の明示的公式の説明に入ります。まず、 A を n 次行列とするとき、 A の余因子行列 \tilde{A} を (72) 式で定義します。これは、 (i, j) 余因子が (j, i) 成分にある行列で、 (i, j) 余因子を普通に並べた行列の転置行列であることに注意してください。

$$\tilde{A} = {}^t(\tilde{a}_{ij})$$

このとき、 $A\tilde{A}$ と $\tilde{A}A$ を計算してみましょう。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \dots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & O \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ O & & & |A| \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \dots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & O \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ O & & & |A| \end{pmatrix}$$

第1式で、青い行と青い列を掛け合わせると、それは、 $|A|$ の1行に関する余因子展開になります。赤い行と赤い列では、2行に関する余因子展開になり、黒い行と黒い列では、 n 行に関する余因子展開になります。こうして右辺の対角成分はすべて $|A|$ になることがわかります。

青い行と赤い列など、異なる番号の行と列の組合せで掛け合わせると、すべて0になります。これは (71) 式からわかりますが、この式がなりたつ理由については、テキストを見てください。以上より、右辺は対角成分がすべて $|A|$ の対角行列、すなわち $|A|E_n$ になります。

第2式でも同様の考え方で、列に関する余因子展開と (70) 式により、右辺はやはり $|A|E_n$ になります。したがって、

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|E_n$$

を得ます。ここでもし A が正則ならば、 $|A| \neq 0$ なので、 $|A|$ で割って、

$$A \left(\frac{1}{|A|} \tilde{A} \right) = \left(\frac{1}{|A|} \tilde{A} \right) A = E_n$$

が出てきます。このことは、取りも直さず、

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$$

を意味しています。これが (T11) の内容です。

ブレイク: (ex4) を解く。(テキストの解答を参考に、逆行列の公式を十分理解してください。)

逆行列を求めるときに、一般的に使えるものは、基本変形と今習った逆行列の公式です。行列の次数 n が3以下であれば、どちらも十分実用的ですが、 $n \geq 4$ では基本変形の方が楽な場合が多いです。

この節では**クラメルの公式**を勉強します。クラメルの公式とは、 A が正則な n 次行列のときに、

$$Ax = c$$

の解を与える公式です。このような1次方程式系では、変数の数と方程式の数が一致していて、さらに解がただ一つに決まります。いわゆる一番オーソドックスな場合ですね。これを解いていきましょう。まず、両辺に左から A^{-1} を掛けて、

$$x = A^{-1}c$$

となりますが、逆行列の公式より、

$$x = \frac{1}{|A|} \tilde{A}c$$

を得ます。そこで、 x の第 j 成分 x_j を展開してみましょう。

$$x_j = \frac{\tilde{a}_{1j}c_1 + \tilde{a}_{2j}c_2 + \cdots + \tilde{a}_{nj}c_n}{|A|} \quad (*)$$

この分子をある行列式の余因子展開と見れないかという発想が鍵になります。今、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & c_2 & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & c_3 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & c_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A_j|$$

のように、 $|A|$ の j 列を c でおきかえた行列式を $|A_j|$ とします。これらに対して、 j 列に関する余因子展開をしてみれば、 $|A_j|$ の展開が $(*)$ の分子に等しいことがわかります。ゆえに、

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|} = \frac{\overset{j)}{ \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & c & \cdots & a_n \end{vmatrix} }}{\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{vmatrix} }$$

を得ます。これがクラメルの公式です。

ブレイク: (ex5) を解く。

ここでは、いくらかの特殊な行列式を紹介しています。有名な行列式ですが、難しければ飛ばしてかまいません。

12

8章 線形空間とその基底

- 0 - - 1 -

かなりの期間、行列や行列式の話が続きましたが、ここから内容が一変します。タイトルにもあるように、ここからは線形空間について勉強していきます。線形空間は、4章で出てきた V^3 （すべての空間ベクトルの集合）と似た味があって、 V^3 を抽象化、一般化したものが線形空間だといえます。すなわち、 V^3 がみたす**基本的な性質**を取り出し、**そのような性質をみたすもの**、として線形空間を定義します。

そんなことをするぐらいなら、 V^3 でやればいいじゃないかと言う人もいるでしょう。しかしそれでは、 V^3 のことしかわかりません。抽象化するメリットは、応用範囲が格段に広がるということです。なぜならば、**基本的な性質**さえみたせば、その対象は線形空間として、理論の適用が可能になるからです。

そこで、抽象化のために、はじめに知っておくべきことは、**集合 S がある演算について閉じている**という概念です。それは、**集合 S にその演算が定義されていて、 S の任意の元たちにその演算を行った結果が、また S に属する**ということです。ちょっと定義が難しいですね。

たとえば、すべての整数の集合 \mathbf{Z} は、加法、減法、乗法については閉じていますが、**除法**については閉じていないことがわかります。すなわち、 \mathbf{Z} の中で自由に足し算をしても、結果が \mathbf{Z} からはみ出ることはありません。これは、引き算、掛け算でも同じです。しかし**割り算**だけは、場合によっては、結果が整数ではなくなってしまうでしょう。これが、閉じていないということです。

この四則演算（**0で割ることだけは除きます**）すべてについて閉じている集合を、**体**といいます。ただし、テキストにあるような基本的な法則（加法と乗法についての交換律、結合律、分配律）をみたすとします。体の例としてよくあるのは、(1) 式の $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ です。これらを順に、有理数体、実数体、複素数体といいます。

いよいよ線形空間の定義です。まず、体 K を用意します。そして、集合 V が**和（加法）と K の元によるスカラー倍について閉じていて**、テキストの[L1]から[L8]をみたすとき、 V を K 上の線形空間といいます。

わかりましたか？ ではまず**前半部分**を見てみましょう。 V が和（加法）について閉じているという言葉の意味は、さきほどの説明でわかると思いますが、 K の元によるスカラー倍はちょっと特殊で、これは、 V の元に K の元を（左から）掛ける演算（これがスカラー倍）を自由に行っても結果が V に属する、という意味です。すなわち、**前半部分**の内容は、

V の任意の元 x, y および K の任意の元 k に対して、(3) 式:

$$\begin{aligned}x + y &\in V \\ kx &\in V\end{aligned}$$

がなりたつということです。

それでは、定義の**後半部分**の[L1]から[L8]はいかがでしょうか。これをテキストで見ると、8つの条件がありますが、それらは $V = V^3$ 、 $K = \mathbf{R}$ であれば明らか

になりたつことばかりですね。これが、冒頭で言っていた**基本的な性質**で、**線形空間の公理**というものです。

そこで、なにか集合 V が与えられたとき、これが線形空間かどうかを確認するとき、どうしたらいいのでしょうか？ まじめに [L1] から [L8] まで確認するのは大変ですね。実は、(3) 式がなりたつことが確認されれば、[L1] から [L8] までの部分は明らかになりたつ場合がほとんどなので、実用上、(3) 式がなりたつことを線形空間の定義とみて差し支えありません。

あとは、各種用語です。 V を K 上の線形空間とします。 $K = \mathbf{C}$ のとき、 V を**複素線形空間**、 $K = \mathbf{R}$ のとき、 V を**実線形空間**といいます。

V の元をベクトルといいます。これは、いままでの行ベクトルや列ベクトルとは違う意味で使っています。混乱を避けたいときは、行ベクトルや列ベクトルをまとめて数ベクトルということもあります。また、 K を V の係数体またはスカラー体といい、 K の元をスカラーといいます。

V において、ベクトルの和は結合律をみためので、(4) 式

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_s$$

は括弧のつけ方で結果が変わることはなく、よって、括弧は普通省略されます。また、ベクトルの和は交換律をみためので、和の順序は自由に入れ替えられます。その他、公理から、テキスト (A) – (F) が導かれます。

線形空間の代表的な例をあげてみましょう。それは、 n 項列ベクトルの集合:

$$K^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in K \right\}$$

です。これは、 K 上の線形空間で、 $K = \mathbf{C}$ のときは複素線形空間 \mathbf{C}^n 、 $K = \mathbf{R}$ のときは実線形空間 \mathbf{R}^n になります。 \mathbf{R}^3 は V^3 に他なりません。つまり、 V^3 は、実線形空間です。

脚注には、いくらかの線形空間の例がかいてあります。その中には、行列の集合なども線形空間になりうることを示されています。

ブレイク: (ex1) の解答を見て、解き方を理解する。

(ex1) (1) の解答を見てみましょう。この種の問題は、集合が主役になっていますので、その扱いに慣れることが大切です。まず、

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x + zi \\ z \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbf{R} \right\}$$

の任意のベクトル (任意の元) を 2 つ取らなければなりません。1 つは V の式にあるベクトルをそのまま使い、もう 1 つは同じものではないので、文字に ' をつけて区別しています。その上で、それらの和を作り、少し計算して、文字のおきかえ $x + x' = \tilde{x}$ 、 $z + z' = \tilde{z}$ をすると、その結果は、明らかに V に属することがわかります。スカラー倍については、任意の**実数** k を取って、同様に計算します。こうして、 V は**実線形空間**であることがわかります。

しかし、後半で、 V は**複素線形空間**ではないと述べています。この差はどこからくるのでしょうか。それは、スカラー倍のチェックのときに、任意の実数を取るか、任

意の複素数を取るかの違いです。この問題の場合、任意の実数でスカラー倍しても閉じていましたが、複素数によるスカラー倍では閉じていないのです。閉じていないことを示すには、なにか1つの閉じていない例をあげればよく、この解答では、 i 倍が閉じていない例だと示しているのです。

この例からわかるように、一般に、任意の複素数によるスカラー倍で閉じているという条件は、任意の実数によるスカラー倍で閉じているという条件より強いのです。線形空間であるための残りの条件、和について閉じている、は複素でも実でも共通なので、結局、複素線形空間になるための条件は、実線形空間になるための条件より強いこととなります。したがって、一般に、複素線形空間は実線形空間ともみなせることがわかります。

テキストの (note) にあるように、いままで基本ベクトルの記号として使っていた e_1, e_2, \dots, e_n は、線形空間の元 (ベクトル) という意味でも使います。どちらを意味するかは、文脈で判断します。

- 2 -

ここでは、線形空間の部分空間を定義しています。これはテキスト通りになりますが、 K 上の線形空間 V の部分集合 W が、 V と同じ演算に関して K 上の線形空間になっているならば、 W を V の部分空間といいます。この定義は、 W が V の演算 (和とスカラー倍) について閉じているとき、 W を V の部分空間という、と言っても同じです。線形空間の一部が線形空間であれば、それは部分空間なのです。極端な場合として、 V 自身や $\{0\}$ は部分空間になりますが、それ以外の部分空間は真の部分空間 (真部分空間) といいます。

ブレイク: (ex2) を解く。

(ex2) (1) (ans) 任意の $\begin{pmatrix} t \\ t+u \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t' \\ t'+u' \\ u' \end{pmatrix} \in W_1$, および、任意の $k \in \mathbf{R}$ に対して、

$$\begin{pmatrix} t \\ t+u \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t' \\ t'+u' \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+t' \\ t+t'+u+u' \\ u+u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{t} \\ \tilde{t}+\tilde{u} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} \in W_1$$

$$k \begin{pmatrix} t \\ t+u \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kt \\ kt+ku \\ ku \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t'' \\ t''+u'' \\ u'' \end{pmatrix} \in W_1.$$

これより、 W_1 は V の部分空間である。

テキストにあるように、 V^3 の部分空間は V^3 自身、原点を通る平面、原点を通る直線、原点のどれかで、原点を通る平面や原点を通る直線については無数にあります。(ex2) を解くときは、上のような正攻法で和とスカラー倍について閉じていることを示すか、今述べた図形的な考察によるかのどちらでもいいでしょう。一般には、正攻法でやってください。

13

8章 線形空間とその基底 (続き)

- 3 -

1章で、3つの空間ベクトルの線形独立性について学びました。それは、同一平面内に存在できるかどうかで決定しました。ここでは、それよりずっと一般的な定義をします。まず、 V を K 上の線形空間として、 V のベクトル (V の元) a_1, a_2, \dots, a_s を取ります。これに対して、(9) 式、すなわち、

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_s a_s \quad (k_1, \dots, k_s \in K)$$

の形の式を、 a_1, a_2, \dots, a_s の線形結合といいます。 V が和とスカラー倍について閉じているので、この線形結合は V のベクトルになります。そこで、 a_1, a_2, \dots, a_s が、(10) 式、すなわち、

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_s a_s = 0$$

をみたすとき、この式を、 a_1, a_2, \dots, a_s の間の線形関係といいます。

(10) 式は、係数 k_1, \dots, k_s がすべて0であればつねになり立ちます。このとき、(10) 式を自明な線形関係といいます。(10) 式の係数の中に1つでも0でないものがあれば、(10) 式を自明でない線形関係といいます。

いよいよ線形独立の定義です。ベクトル a_1, a_2, \dots, a_s が線形独立であるとは、 a_1, a_2, \dots, a_s の間の、自明でない線形関係が存在しないことと定義します。自明でない線形関係が存在するときは、 a_1, a_2, \dots, a_s は線形従属であるといいます。

自明でない線形関係が存在しない、の中で、ないが2回でてくるからといって、これは、自明な線形関係が存在することとは全く意味が異なるので、注意してください。

以上、言葉によって線形独立を定義しましたが、(11) 式のような定義もよく使われます。すなわち、線形独立とは、

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_s a_s = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$$

をみたすことと定義します。これは、上で述べた定義と同値になります。

ブレイク: (ex3) を解く。特に、テキストにある (1) の解答を理解する。

ここから、線形独立や線形結合に関する2つの定理が述べられています。重要なので、かいておきましょう。

(T1) a_1, a_2, \dots, a_s が線形独立のとき、これらの線形結合で表されないベクトル a があれば、 a_1, a_2, \dots, a_s, a は線形独立である。

(T2) ベクトル c が b_1, b_2, \dots, b_t の線形結合で表され、各 b_j が a_1, a_2, \dots, a_s の線形結合で表されるとき、 c は a_1, a_2, \dots, a_s の線形結合で表される。

これらの証明についてはテキストを見てください。

のちほど、線形空間の次元というものが出てきますが、ここでは、有限次元という概念を定義しています。

すなわち、線形空間 V から、あらかじめ有限個のベクトルをうまく選んでおくと、 V の任意のベクトルを、それら有限個のベクトルの線形結合で表せるとき、 V は有限次元であるといえます。

有限次元でないときは、無限次元といえます。

有限次元の線形空間は、その大きさに制限があるということです。無限次元になれば、いくらでも大きい空間が入ってきます。以後、このテキストでは、線形空間は有限次元のものだけを考えていることにしています。

この節では、線形空間の理論においてとりわけ重要な基底について勉強します。

線形空間 V のベクトル e_1, e_2, \dots, e_n が次の2つの条件をみたすとき、 e_1, e_2, \dots, e_n をまとめて V の (1 組の) 基底といえます。

I: e_1, e_2, \dots, e_n は線形独立である。

II: V の任意のベクトルは、 e_1, e_2, \dots, e_n の線形結合で表される。

これが基底の定義なのですが、これだけではなかなか直感的な理解が得られませんが、条件の I は線形独立性です。II は、線形結合で表せること、いわば表現能力です。ベクトルを適当に集めるとき、数が多いほど表現能力は増しますが、線形独立性は失われます。逆に、数が少ないほど表現能力が減りますが、線形独立性はみだされず、したがって、これらが両立するには、丁度よい数のベクトルを、うまく集める必要があります。その結果として得られるものが基底です。それらは、いわば V の代表たちで、必要にして十分なものが選ばれています。

ここで注意すべきことは、一般に基底の選び方はたくさんあるということです。つまり、 V の基底には幾通りもの組合せがあります。

基底を表すときは、普通 (e_1, e_2, \dots, e_n) のようにかきます。また、基底のベクトルの順序が違ふときは、異なる基底とみなします。

なお、テキストには、条件 I, II を1つにまとめて III のようにかけることが示されています。

III: V の任意のベクトルは、 e_1, e_2, \dots, e_n の線形結合でただ1通りに表される。

テキスト 6 ページの (T3) では、線形空間 V の、線形独立なベクトルがいくらあったときに、そこにいくらかベクトルを追加して、 V の基底を作れることがかいてあります。証明はアルゴリズムによるもので、詳しくはテキストを見てください。証明そのものは飛ばしてもかまいません。

(T3) より、 $\{0\}$ でない線形空間 V にはつねに基底が存在することがわかります。なぜならば、 V から 0 でないベクトルを1つ取ると、それは明らかに線形独立で、あとは (T3) によって、 V の基底が得られるからです。

ここでは線形空間の次元を定義します. 前節で基底を定義しましたが, それは幾通りもの選び方がありました. しかし, 線形空間 V (ただし $\{0\}$ ではないとする) を固定すれば, その基底をどのように選んでも, 基底に含まれるベクトルの数は変わらないことがわかっています. その数を V の次元といい, $\dim V$ で表します. $V = \{0\}$ の次元は 0 と定義します.

上の定義で使った水色でかいた定理の証明は, テキスト 9 章にありますので, 興味がある人は見てください.

線形空間 V とその部分空間 $W (\neq \{0\})$ があるとき, W の基底にいくらかベクトルを追加して得られた V の基底を, W の基底を拡大して得られた基底といいます. (T3) より, このような基底はつねに作ることができます.

線形空間の代表的な例 K^n を考えましょう. この基底としては, どのようなものが取れるでしょうか? 基本ベクトルの組:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を取ると, これは明らかに線形独立であり, K^n の任意のベクトルを表せます. よって, これは K^n の基底になります. そして, これらのベクトルの個数は n なので, K^n の次元は n , すなわち,

$$\dim K^n = n$$

というわけです. しかし, 基底の選び方はたくさんあります. 他にどのような基底があるのでしょうか? これに答える定理が (T6) です. つまり, 列ベクトル n 個の組が K^n の基底であるための必要十分条件は, それらを並べて作った行列式が 0 でないことなのです. この定理の証明はやはり難しくして 9 章に後回しにしてありますが, 定理自体は大変有用なので, 覚えておくとよいでしょう.

K 上の線形空間 V からいくらかのベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$ を取ります. これらの線形結合の集合:

$$W = \{k_1 \mathbf{a}_1 + \dots + k_s \mathbf{a}_s \mid k_1, \dots, k_s \in K\}$$

は, V の部分空間になります. このように構成された部分空間を, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$ で生成される (張られる) 部分空間といい,

$$W = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s\}$$

で表します. この部分空間は, $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s\}$ を含む最小の部分空間になります.

$W = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s\}$ が V の部分空間であることの証明がテキストにあります. W が和とスカラー倍について閉じていることを示すことで, 証明することができます.

さて、やっと和空間の話に入ります。例によって、 V を K 上の線形空間とします。 W_1 と W_2 を V の部分空間とします。部分空間であれば何でもかまいません。このとき、

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

を W_1 と W_2 の和または和空間といいます。これもやはり、 V の部分空間になります。

ついでに、 W_1 と W_2 の共通部分 $W_1 \cap W_2$ についても考えると、これがまた、 V の部分空間になります。部分空間がたくさん登場しましたね。

(ex7) で、 $W_1 + W_2$ と $W_1 \cap W_2$ が部分空間であることを示しています。それほど難しくないのです、見ておきましょう。

$W_1 \cap W_2$ が部分空間になるからといって、 $W_1 \cup W_2$ も部分空間になるというのは勘違いです。一般に、 $W_1 \cup W_2$ は部分空間にはならないので、注意してください。

テキスト 8 ページのベン図には、上で述べた部分空間たちの包含関係が示されていますので、見てください。

このような部分空間たちの次元の間にはどのような関係があるのでしょうか？ それに答えるのが、(T7) です。

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$$

これを、部分空間の次元公式といいます。

この定理の証明は少し長くなっていますので、証明の要点をまとめてみましょう。

部分空間	基底	次元
$W_1 \cap W_2$	$\langle a_1, \dots, a_r \rangle$	r
W_1	$\langle a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s \rangle$	$r + s$
W_2	$\langle a_1, \dots, a_r, c_1, \dots, c_t \rangle$	$r + t$
$W_1 + W_2$	$\langle a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_t \rangle$	$r + s + t$

はじめに $W_1 \cap W_2$ の基底を取り、基底の拡大によって、 W_1 と W_2 の基底を作った結果が表のようになったとします。このとき、 $W_1 + W_2$ の基底も表のようになることを証明します。そのためには、

$$a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_t$$

の線形独立性と、これらが $W_1 + W_2$ を生成する ($W_1 + W_2$ の任意のベクトルがそれらの線形結合で表せる) ことを示します。それが達成できれば、表の右端の次元を見て、次元公式が証明できます。

部分空間の和 $W = W_1 + W_2$ があつたとしましょう. これがさらに次の条件をみたすとき, W は W_1 と W_2 の直和であるといい,

$$W = W_1 \oplus W_2$$

とかきます. さて, その条件とは, $W = W_1 + W_2$ の任意のベクトルが,

$$w_1 + w_2 \quad (w_1 \in W_1, w_2 \in W_2)$$

の形でただ1通りに表されるということです. この条件は, 0ベクトルがただ1通りに表されるとしても同値であることがわかっています. いいかえると, $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ とするとき,

$$w_1 + w_2 = 0 \Rightarrow w_1 = w_2 = 0 \tag{1}$$

がなりたつことと同値です.

直和をこのように定義するとき, (T8) がなりたちます. すなわち, 2つの部分空間の和:

$$W = W_1 + W_2$$

が直和になることは, 部分空間の共通部分が $\{0\}$ となること, および, 和空間の次元が部分空間の次元の和になることと同値だということです.

この節は, いくらかの部分空間の和や直和についてかいてあります. 2つの和や直和と重なる部分もあるので, 詳しい説明は省きます. 重要なのは, (ex8) です.

ブレイク: (ex8) を解く.

テキストの解答を見ていきましょう.

(1) まず, W, X は, 1次方程式系の解の集合なので, 行列を使って解きます. これは斉次1次方程式系なので, 係数行列 A を基本変形して解きます. 解は線形結合の形になるので, そのベクトルを並べて, W と X の基底の完成です.

その後, $W + X$ の基底にしなればなりません. それには, W と X の基底を並べて (順序はどうでもよい), 列変形をして, 0以外の部分を階段状にします. 0ベクトルになった列を除いて並べれば, $W + X$ の基底ができあがります.

ここで, 列変形をする理由を考えましょう. 行列の列変形:

$$A \longrightarrow B$$

をしたとき, B の列ベクトルは A の列ベクトルで表され, 逆に, A の列ベクトルは B の列ベクトルで表されます. このことは, 列変形を繰り返した場合でも同じです. これより, A の列ベクトルで生成される部分空間は, B の列ベクトルで生成される部分空間に等しくなります. そこで, はじめの行列を $W + X$ を生成する列ベクトルで作っておけば, 列変形後も $W + X$ を生成し, しかも階段状にすることで, 線形独立にもなり, 結局 $W + X$ の基底になります.

(2) $W \cap X$ は, W と X の条件を合わせたものなので, (51) のような1次方程式系を解きます. そこから基底を得ます.

(3) はテキスト通りですので, よくご覧ください. 答えは 直和ではない ですね.

14

10章 線形写像の基礎

- 0 -

この章は詳しくやる余裕がないので、要点のみにとどめます。はじめに写像または関数の説明があります。 V から W への写像

$$T: V \rightarrow W$$

とは、 V の各元 x を W の元 $T(x)$ に対応させる規則 T のことです。 V を始域（定義域）、 W を終域といいます。

$$\{T(x) \mid x \in V\} \quad (2)$$

のことを T の像といい、 $\text{Im } T$ または $T(V)$ で表します。 T が大文字なので、 $T(x) = Tx$ と略記することが多いです。 V から V への写像のことを、 V の変換といいます。

7章で直感的に説明した1対1対応も厳密に定義していますが、ここでは感覚的にわかっていればいいでしょう。

合成についても、4章でやったのと同様の定義がかいてあります。すなわち、写像 $T: V \rightarrow W$ と、 $S: W \rightarrow X$ に対して、合成 $S \circ T$ を、

$$(S \circ T)x = S(Tx) \quad (x \in V)$$

で定義します。これは V から X への写像とみなされます。 $S \circ T$ は簡単に ST ともかきます。

1対1対応 $T: V \rightarrow W$ には逆写像 $T^{-1}: W \rightarrow V$ が存在します。それは、

$$\begin{aligned} (T^{-1}T)x &= T^{-1}(Tx) = x & (x \in V) \\ (TT^{-1})y &= T(T^{-1}y) = y & (y \in W) \end{aligned}$$

をみたすものとして定義されます。

- 1 -

ここでは、4章でもやった線形性が再度登場します。これがこの章では一番大切な概念です。まず、ここからは V や W を K 上の線形空間とします。そして、 V から W への写像 T が**線形性**、すなわち次の性質を持つとき、 T を V から W への**線形写像**といいます。

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= T\mathbf{x} + T\mathbf{y} & (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V) \\ T(k\mathbf{x}) &= k(T\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in V, k \in K) \end{aligned}$$

特に V から V への線形写像のことを、 V の**線形変換**といいます。

- 2 -

この節で取り上げるのは、(T1)のみです。これは線形写像の合成は線形写像になるというものです。設定が一般的にはなりませんが、4章でも同様の定理を扱ってい

て、考え方は同じです。証明もテキストにある通りで、これは理解しておくといいでしょう。

ブレイク: (ex4) (1) のみを解く。

(ex4) (1) (ans) 任意の $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in V$, および, 任意の $k \in \mathbf{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) &= T\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' & y+y' \\ y+y' & z+z' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & y' \\ y' & z' \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \\ T\left(k\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) &= T\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx & ky \\ ky & kz \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = kT\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ゆえに, T は線形写像である. (q.e.d.)

今回の線形代数Iの試験範囲はここまでとします。おつかれさまでした。