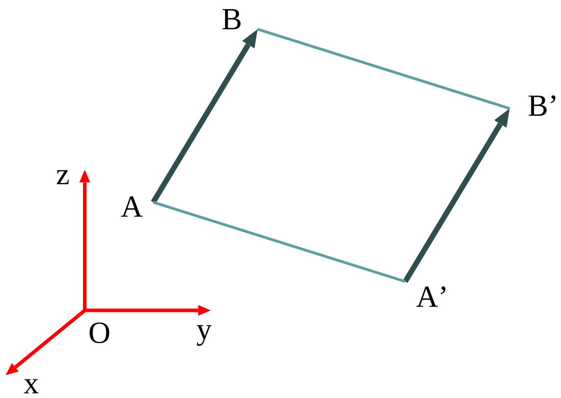
# – 線形代数ハンドアウト –

by K. Asai

## 1章　空間ベクトルの基礎

キーワード: 空間ベクトル，和，スカラー倍，ベクトルの大きさ，内積，
直線のベクトル表示，方向ベクトル，直線の方程式，線形結合，
線形独立，線形従属

- 1 -（空間ベクトル）ベクトルは，向きと大きさのみを持つ量として定義される．初歩的なベクトルとして平面と空間のベクトルがあるが，ほぼ並行して議論できるため，ここでは空間においてベクトルを説明することにする．座標空間内の 2 点 $A, B$ に対して，$A$ から $B$ へ向かうまっすぐな矢印を空間ベクトルまたは単にベクトルといい，$\overrightarrow{AB}$ で表す．ここに，$A$ をこのベクトルの始点，$B$ を終点といい，$A$ から $B$ へ向かう向きを $\overrightarrow{AB}$ の向きという．また，線分 $AB$ の長さを $\overrightarrow{AB}$ の大きさ（長さ）という．このように，$\overrightarrow{AB}$ は，向きと大きさを持っているが，冒頭のベクトルの定義より，その位置情報については無視される．すなわち，空間内を平行移動して互いに移り合うベクトルは同じものとみなすのである．以下のように，$\overrightarrow{AB}$ が平行移動して $\overrightarrow{A'B'}$ が得られたとき，$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ と考えることになる．




$A(x_0, y_0, z_0)$，$B(x_1, y_1, z_1)$ とすれば，平行移動したことより，$A'(x_0+a, y_0+b, z_0+c)$，$B'(x_1+a, y_1+b, z_1+c)$ とかける．このとき，(終点の座標) – (始点の座標) を計算して縦に並べると，

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1+a) - (x_0+a) \\ (y_1+b) - (y_0+b) \\ (z_1+c) - (z_0+c) \end{pmatrix} \tag{1}$$

のように，その結果が等しくなる．逆に，(終点の座標) – (始点の座標) が等しいならば，

$$
\begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 + a') - (x_0 + a) \\ (y_1 + b') - (y_0 + b) \\ (z_1 + c') - (z_0 + c) \end{pmatrix} \tag{2}
$$

より $a = a'$，$b = b'$，$c = c'$ となって，2 つのベクトルは平行移動して互いに移り合うことになり，2 つのベクトルは等しくなる．以上まとめると次のようになる．

$$
\begin{aligned} \text{2 つのベクトルが等しい} \quad &\Longleftrightarrow \text{平行移動で移り合う} \\ &\Longleftrightarrow \text{(終点の座標)} - \text{(始点の座標) が等しい} \end{aligned} \tag{3}
$$

したがって，ベクトルを式で表すときは，(終点の座標) − (始点の座標) を用いればよいことがわかる．すなわち，

$$
\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix}. \tag{4}
$$

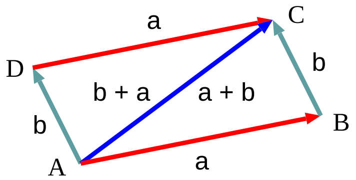
この式を，ベクトルの成分表示という．

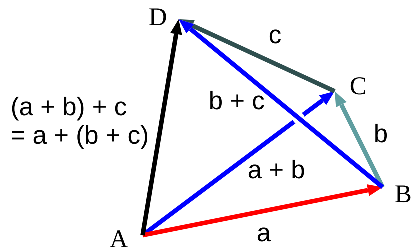
- 2 -（空間ベクトルの和）空間ベクトルは任意の点を始点として取ることができる．より正確には，任意の空間ベクトル $\mathsf{a}$ と任意の点 $A$ に対して，$\mathsf{a} = \overrightarrow{AB}$ をみたす $B$ がただ 1 つ存在する．そこで，$\mathsf{a} = \overrightarrow{AB}$，$\mathsf{b} = \overrightarrow{BC}$ と表したとき，

$$
\mathsf{a} + \mathsf{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \tag{5}
$$

によって $\mathsf{a}$ と $\mathsf{b}$ の和を定義する．すなわち，$\mathsf{a} + \mathsf{b}$ は，$\mathsf{b}$ の始点を $\mathsf{a}$ の終点に重ねて，$\mathsf{a}$ と $\mathsf{b}$ を繋げることで定められる．この定義は，点 $A$ の取り方には依存していないことがわかる．図を用いると，以下の法則が得られる．

$$
\begin{aligned} \mathsf{a} + \mathsf{b} &= \mathsf{b} + \mathsf{a} && \text{（交換律）} \\ (\mathsf{a} + \mathsf{b}) + \mathsf{c} &= \mathsf{a} + (\mathsf{b} + \mathsf{c}) && \text{（結合律）} \end{aligned} \tag{6}
$$




結合律については，次のように計算によっても容易に示せる．

$$
(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) \tag{7}
$$

結合律により，$\mathsf{a}_1 + \mathsf{a}_2 + \cdots + \mathsf{a}_n$ のような式は括弧のつけ方によって結果が変わることがないので，括弧は省略されることが多い．さらに，交換律も考え合わせると，和の順序は自由に入れ替えてよい．

$A(x_0, y_0, z_0)$，$B(x_1, y_1, z_1)$，$C(x_2, y_2, z_2)$ とおくとき，等式: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ を成分表示すると，

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_0 \\ y_2 - y_0 \\ z_2 - z_0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

となる．これより，$\overrightarrow{AC}$ の各成分は，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$ の各成分の和になっていることがわかる．ゆえに，

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

空間ベクトルの中には，大きさが $0$ で向きがない特別なベクトルがただ $1$ つ存在する．これを $\mathtt{0}$ とかき，$0$ ベクトルという．これは，任意の点 $A$ に対して $\overrightarrow{AA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で表されるベクトルに他ならない．

ベクトル $\overrightarrow{AB}$ を取るとき，$\overrightarrow{BA}$ を $\overrightarrow{AB}$ の逆ベクトルといい，

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \tag{10}$$

で表す．$-\overrightarrow{AB}$ は $\overrightarrow{AB}$ と大きさが同じで向きが逆のベクトルになる．明らかに次がなりたつ．

$$\begin{aligned} &\mathtt{a} + \mathtt{0} = \mathtt{0} + \mathtt{a} = \mathtt{a} \\ &\mathtt{a} + (-\mathtt{a}) = (-\mathtt{a}) + \mathtt{a} = \mathtt{0} \\ &-(-\mathtt{a}) = \mathtt{a} \end{aligned} \tag{11}$$

(note) 簡単のため，$\mathtt{a} + (-\mathtt{b}) = \mathtt{a} - \mathtt{b}$ とかくことが多い．

(ex1) (1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$ を求めよ． (2) 任意の点 $P$ に対して，$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}$ を示せ． (3) 次を示せ．

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_nA_{n+1}} = \overrightarrow{A_1A_{n+1}} \tag{12}$$

(4) $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_nA_1}$ を求めよ．

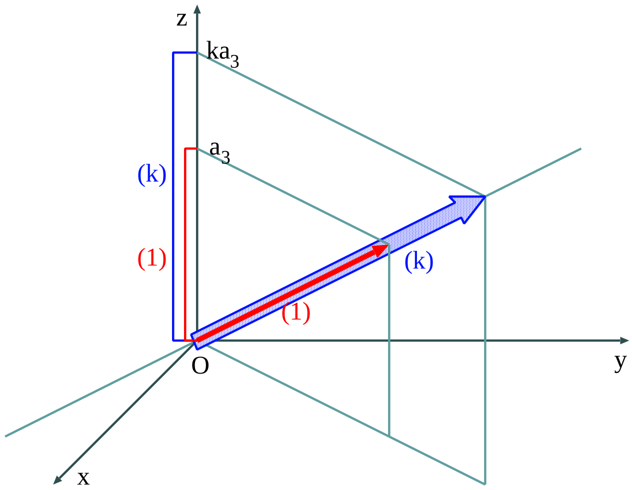
- 3 -（スカラー倍）$\mathtt{a}$ を空間ベクトル，$k$ を正の実数とするとき，スカラー倍 $k\mathtt{a}$，$(-k)\mathtt{a}$ を

$$\begin{aligned} k\mathtt{a} &= (\mathtt{a}\ \text{と同じ向きで，大きさが}\ k\ \text{倍のベクトル}) \\ (-k)\mathtt{a} &= (\mathtt{a}\ \text{と逆向きで，大きさが}\ k\ \text{倍のベクトル}) \end{aligned} \tag{13}$$

と定める．したがって，$(-k)\mathtt{a} = -(k\mathtt{a})$ である．また $0\mathtt{a} = \mathtt{0}$，$\pm k\mathtt{0} = \mathtt{0}$ と定める．スカラー倍については，実数 $k$ に対して，

$$k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix} \tag{14}$$

がなりたつ．これは，次の図より $k$ が正のときに $z$ 座標について容易に確認できる．他の座標についても同様である．$k$ が負のときは向きが逆になることに注意すればよい．




和とスカラー倍については，以下の法則がなりたつ．$k, l$ を実数，$\mathtt{a}, \mathtt{b}$ を空間ベクトルとするとき，

$$\begin{aligned} k(\mathtt{a}+\mathtt{b}) &= k\mathtt{a}+k\mathtt{b} \\ (k+l)\mathtt{a} &= k\mathtt{a}+l\mathtt{a} \\ (kl)\mathtt{a} &= k(l\mathtt{a}) \end{aligned} \tag{15}$$

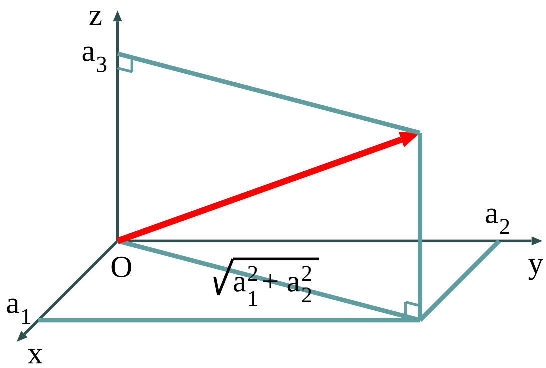
(ex2) (1) 成分表示を用いて上の法則を示せ． (2) $(-1)\mathtt{a} = -\mathtt{a}$ を示せ．
(3) 次を示せ．

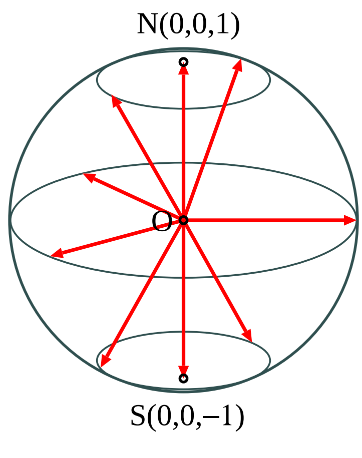
$$\begin{aligned} k(\mathtt{a}_1+\mathtt{a}_2+\cdots+\mathtt{a}_n) &= k\mathtt{a}_1+k\mathtt{a}_2+\cdots+k\mathtt{a}_n \\ (k_1+k_2+\cdots+k_n)\mathtt{a} &= k_1\mathtt{a}+k_2\mathtt{a}+\cdots+k_n\mathtt{a} \end{aligned} \tag{16}$$

- 4 -（ベクトルの大きさ）ベクトル $\mathtt{a}$ の大きさを $||\mathtt{a}||$ で表す．$\mathtt{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ のとき，3 平方の定理により，

$$||\mathtt{a}|| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \tag{17}$$

と求められる．大きさが 1 のベクトルを単位ベクトルという．ベクトル $\mathtt{a} \neq \mathtt{0}$ に対して，$\frac{1}{||\mathtt{a}||}\mathtt{a}$ は $\mathtt{a}$ と同じ向きの単位ベクトルである．



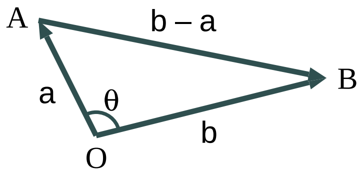




unit vectors

- 5 -（内積）2 つの空間ベクトル $\mathtt{a}, \mathtt{b}$ の始点が同じになるように平行移動したとき，それらに挟まれた角を $\mathtt{a}, \mathtt{b}$ のなす角という．今 $\mathtt{a}, \mathtt{b}$ のなす角を $\theta$ とするとき，$\mathtt{a}, \mathtt{b}$ の内積 $(\mathtt{a}, \mathtt{b})$ を，

$$(\mathtt{a}, \mathtt{b}) = ||\mathtt{a}|| \cdot ||\mathtt{b}|| \cdot \cos\theta \tag{18}$$

で定める．$\overrightarrow{OA} = \mathtt{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{OB} = \mathtt{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ とし，$\triangle OAB$ に余弦定理を適用する．




$$\begin{aligned} ||\mathtt{b} - \mathtt{a}||^2 &= ||\mathtt{a}||^2 + ||\mathtt{b}||^2 - 2||\mathtt{a}|| \cdot ||\mathtt{b}|| \cdot \cos\theta \qquad \text{より，} \\ (\mathtt{a}, \mathtt{b}) &= ||\mathtt{a}|| \cdot ||\mathtt{b}|| \cdot \cos\theta \\ &= \frac{1}{2}\left(||\mathtt{a}||^2 + ||\mathtt{b}||^2 - ||\mathtt{b} - \mathtt{a}||^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2 - (b_3 - a_3)^2\right] \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \end{aligned} \tag{19}$$

を得る．

$\mathtt{a}$ と $\mathtt{b}$ のなす角が $\pi/2$ のとき，$\mathtt{a}$ と $\mathtt{b}$ は直交する，あるいは垂直であるといい，$\mathtt{a} \perp \mathtt{b}$ とかく．$\mathtt{a}$ と $\mathtt{b}$ のなす角が $0$ または $\pi$（すなわち，向きが同じか逆）のとき，$\mathtt{a}$ と $\mathtt{b}$ は平行であるといい，$\mathtt{a} \parallel \mathtt{b}$ とかく．任意のベクトル $\mathtt{a}$ に対して $\mathtt{a} \perp \mathtt{0}$ かつ $\mathtt{a} \parallel \mathtt{0}$ と考えることにすると，内積の定義より次がなりたつ．

$$\begin{aligned} \mathtt{a} \perp \mathtt{b} \quad &\Longleftrightarrow \quad (\mathtt{a}, \mathtt{b}) = 0 \\ \mathtt{a} \parallel \mathtt{b} \quad &\Longleftrightarrow \quad (\mathtt{a}, \mathtt{b}) = \pm ||\mathtt{a}|| \cdot ||\mathtt{b}|| \end{aligned} \tag{20}$$

$k$ を実数とするとき，内積は以下の法則をみたす．

$$\begin{gathered} (\mathtt{a}, \mathtt{b}) = (\mathtt{b}, \mathtt{a}) \\ (\mathtt{a}, \mathtt{b} + \mathtt{c}) = (\mathtt{a}, \mathtt{b}) + (\mathtt{a}, \mathtt{c}), \qquad (\mathtt{a} + \mathtt{b}, \mathtt{c}) = (\mathtt{a}, \mathtt{c}) + (\mathtt{b}, \mathtt{c}) \\ (\mathtt{a}, k\mathtt{b}) = (k\mathtt{a}, \mathtt{b}) = k(\mathtt{a}, \mathtt{b}) \\ (\mathtt{a}, \mathtt{a}) \geq 0 \quad \text{であり，} \quad (\mathtt{a}, \mathtt{a}) = 0 \iff \mathtt{a} = \mathtt{0} \end{gathered} \tag{21}$$

(ex3) (1) (21) を示せ． (2) 次を示せ．

$$\begin{aligned} (\mathtt{a}, \mathtt{b}_1 + \mathtt{b}_2 + \cdots + \mathtt{b}_n) &= (\mathtt{a}, \mathtt{b}_1) + (\mathtt{a}, \mathtt{b}_2) + \cdots + (\mathtt{a}, \mathtt{b}_n) \\ (\mathtt{a}_1 + \mathtt{a}_2 + \cdots + \mathtt{a}_n, \mathtt{b}) &= (\mathtt{a}_1, \mathtt{b}) + (\mathtt{a}_2, \mathtt{b}) + \cdots + (\mathtt{a}_n, \mathtt{b}) \end{aligned} \tag{22}$$

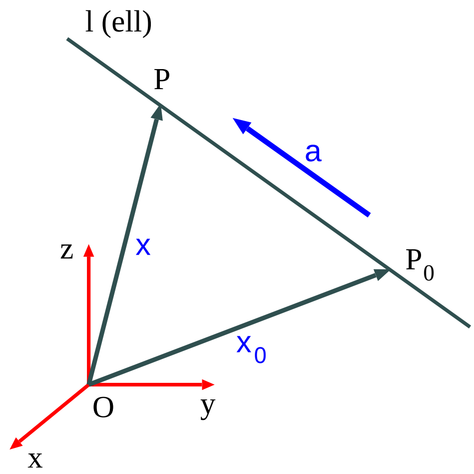
(ex4) ベクトルの大きさ，内積について，以下を示せ．

$$\begin{aligned} &||\mathtt{a}|| = \sqrt{(\mathtt{a}, \mathtt{a})} \\ &||k\mathtt{a}|| = |k| \cdot ||\mathtt{a}|| \\ &|(\mathtt{a}, \mathtt{b})| \leq ||\mathtt{a}|| \cdot ||\mathtt{b}|| \qquad \text{（シュワルツの不等式）} \\ &||\mathtt{a} + \mathtt{b}|| \leq ||\mathtt{a}|| + ||\mathtt{b}|| \quad \text{（3 角不等式）} \end{aligned} \tag{23}$$

(ex5) $A, B, C, D$ を空間内の 4 点とするとき，次を示せ．

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 \iff \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \tag{24}$$

- 6 -（直線のベクトル表示）座標空間内の点 $P$ に対して，$\overrightarrow{OP}$ を $\boxed{P\text{ の位置ベクトル}}$ という．今，空間内に直線 $l$ があるとする．$l$ 上にある任意の点 $P(x, y, z)$ に対し，その位置ベクトル $\overrightarrow{OP} = \mathtt{x}$ を表示した式を直線 $l$ のベクトル表示という．この表示のためには，$\boxed{l\text{ の方向ベクトル}}$（$l$ と平行なベクトル[1]）$\mathtt{a}$ と，$l$ 上の 1 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ の位置ベクトル $\overrightarrow{OP_0} = \mathtt{x}_0$ が必要である．このとき，実数 $t$ を用いて $\overrightarrow{P_0P} = t\,\mathtt{a}$ と表されるから，




$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OP_0} + t\,\mathtt{a} \qquad \text{あるいは} \\ \mathtt{x} &= \mathtt{x}_0 + t\,\mathtt{a} \end{aligned} \tag{25}$$

とかける．(25) を $\boxed{l\text{ のベクトル表示}}$ と呼ぶ．(25) は具体例においては，成分表示でかかれる:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

(ex6) $(1, -2, 3)$ を通り，$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ に平行な直線 $l$ のベクトル表示を求めよ．

- 7 -（直線の方程式）$a_1a_2a_3 \neq 0$ とする．直線 $l$ のベクトル表示 (26) より，

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases} ; \qquad \text{したがって} \qquad \begin{cases} t = \frac{x - x_0}{a_1} \\ t = \frac{y - y_0}{a_2} \\ t = \frac{z - z_0}{a_3} \end{cases} \tag{27}$$

を得る．これより，

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \tag{28}$$

を得る．逆に，(28) の各辺を $t$ とおけば，

$$(28) \Rightarrow (27) \Rightarrow (26)$$

[1]すなわち，平行移動して $l$ に含まれるようにできるベクトル．大きさは 0 でなければ任意であり，向きは逆でもよい．

と遡って $l$ のベクトル表示を得る．ゆえに (28) は $l$ を表していることがわかる．そこで (28) を $\boxed{l\text{ の方程式}}$ と呼ぶ.

(note) $a_1, a_2, a_3$ の中に 0 がある場合は，0 で割れないために (28) とは違った方程式になる．たとえば $a_2 = 0$ および $a_1 = a_3 = 0$ のときは，それぞれ次のようになる．

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{z - z_0}{a_3} \\ y = y_0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x = x_0 \\ z = z_0 \end{cases} \tag{29}$$

(ex7) 次の直線のベクトル表示を方程式に，方程式をベクトル表示に直せ.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{30}$$

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{2} \tag{31}$$

- 8 -（線形結合）ある空間ベクトルを，他のいくらかの空間ベクトルで表すことがよくある．ここで表すとは，和とスカラー倍を組合せて表すことを指す．それは

$$k_1\mathtt{a}_1 + k_2\mathtt{a}_2 + \cdots + k_n\mathtt{a}_n \tag{32}$$

の形となる．(32) をベクトル $\mathtt{a}_1, \mathtt{a}_2, \ldots, \mathtt{a}_n$ の線形結合という.

$\mathtt{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\mathtt{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\mathtt{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を基本ベクトルという．これらを用いれば,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\mathtt{e}_1 + y\mathtt{e}_2 + z\mathtt{e}_3 \tag{33}$$

のように，任意の空間ベクトルを線形結合で表せる．しかしこのような性質は基本ベクトルだけのものではない．一般に同一平面内に存在できない 3 つの空間ベクトルを線形独立であるという．3 つの線形独立な空間ベクトルは，任意の空間ベクトルを線形結合で表せる．線形独立でない場合，線形従属であるという．すなわち 3 つの空間ベクトルが線形従属であるとは，それらが同一平面内に存在できるということである．いいかえると，3 つのうちのある 1 つのベクトルが，他の 2 つのベクトルの線形結合で表されるということである．こうした場合，それら（3 つのベクトル）ですべての空間ベクトルを表すことはできない.

(ex8) $\mathtt{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\mathtt{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\mathtt{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ とするとき，$\mathtt{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を $\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}$ の線形結合で表せ.

(ans) $\mathtt{x} = \frac{4x+y-2z}{9}\mathtt{a} + \frac{-2x+4y+z}{9}\mathtt{b} + \frac{x-2y+4z}{9}\mathtt{c}$.

# 2章　空間内の平面とその方程式

☆☆☆

キーワード: 平面のベクトル表示，法線ベクトル，平面の方程式

- 1 -（平面のベクトル表示）平面や空間内の図形を表示するのには通常方程式（系）を用いる．これに対して，図形の中の任意の点の位置ベクトルを表示することで、図形を表示することもあり，これをその図形のベクトル表示という．この章では空間内の平面を表す方法について考える．今述べたように，平面を表示する方法としては，ベクトル表示と（ベクトルを用いない）方程式による表示があるので，それらを順に見ていこう．まず平面のベクトル表示について考える．空間内に平面 $S$ があり，$S$ 上の１つの点を $P_0(x_0, y_0, z_0)$ とし，その位置ベクトルを $\overrightarrow{OP_0} = \mathtt{x}_0$ とおく．また，$S$ 内の平行でない２つのベクトルを取り，それらを $\mathtt{b}$，$\mathtt{c}$ とおく．さらに $S$ 上の任意の点 $P(x, y, z)$ の位置ベクトルを $\overrightarrow{OP} = \mathtt{x}$ とする．このとき，$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}$, $\overrightarrow{P_0P} = t\,\mathtt{b} + u\,\mathtt{c}$（$t, u$ は実数）とかけるので，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OP_0} + t\,\mathtt{b} + u\,\mathtt{c} \qquad \text{あるいは} \\ \mathtt{x} &= \mathtt{x}_0 + t\,\mathtt{b} + u\,\mathtt{c} \end{aligned} \tag{1}$$

の形に表される．またこの形に表せる点 $P$ はかならず $S$ 上にある．そこで，(1) を $\boxed{S\text{ のベクトル表示}}$ と呼ぶ.（Figure 1 参照） 具体的な問題においては，(1) は成分を用いて次のようにかかれる．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

(ex1) $S$ は $(3, 2, -1)$ を通る平面で，平面内のベクトルとして，$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ が取れるとき，$S$ のベクトル表示を求めよ．

- 2 -（平面の方程式）次に，平面 $S$ を通常の方程式の形で表すことを考えよう．$S$ に垂直なベクトル[1]を $\boxed{S\text{ の法線ベクトル}}$ と呼ぶ．$S$ の法線ベクトルを $\mathtt{a}$ とする．- 1 - と同様 $S$ 上の１つの点を $P_0(x_0, y_0, z_0)$ とし，$S$ 上の任意の点を $P(x, y, z)$ とする．$\mathtt{a}$ は $S$ の法線ベクトルだから，

$$(\mathtt{a}, \overrightarrow{P_0P}) = 0 \tag{3}$$

である．逆に (3) をみたす点 $P$ は必ず $S$ 上にある．そこで $\mathtt{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とおき，(3) を書き直すと，

[1] すなわち，$S$ 内のすべてのベクトルと垂直なベクトル．大きさは 0 でなければ任意であり，向きは逆でもよい．

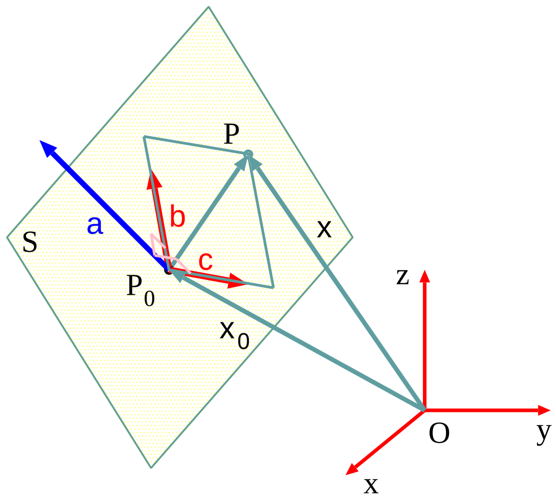



Figure 1

$$(\mathsf{a}, \overrightarrow{P_0P}) = (\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}) = 0. \tag{4}$$

$$\therefore \quad \boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}. \tag{5}$$

これが $\boxed{S \text{ の方程式}}$ である．

(T1) 法線ベクトルが $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ であって，かつ $(x_0, y_0, z_0)$ を通るような平面の方程式は (5) で表される．

次に平面 $S$ のベクトル表示が与えられたとき，これを通常の方程式の形に直すことを考えよう．それには $S$ の法線ベクトルを求めればよい．そのために，2 つのベクトル $\mathsf{b}$ と $\mathsf{c}$ の両方に垂直なベクトル $\mathsf{a}$ を外積 $\mathsf{b} \times \mathsf{c}$ などで求める．このとき，$\mathsf{a}$ は任意の $\overrightarrow{P_0P} = t\,\mathsf{b} + u\,\mathsf{c}$ に垂直となる．実際，

$$(\mathsf{a}, \overrightarrow{P_0P}) = (\mathsf{a}, t\,\mathsf{b} + u\,\mathsf{c}) = t(\mathsf{a}, \mathsf{b}) + u(\mathsf{a}, \mathsf{c}) = 0. \tag{6}$$

ゆえに，$\mathsf{a}$ は $S$ の法線ベクトルとなる．あとは $P_0$ を 1 つ求めれば $S$ の方程式 (5) が得られる．

平面の方程式 (5) は，しばしば

$$\boxed{ax+by+cz=d} \tag{7}$$

の形にも表される．実際，(5) は容易に (7) に変形でき，逆に (7) が与えられたときは，それをみたす $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ を 1 つ取り，

$$ax_0+by_0+cz_0=d \tag{8}$$

とすれば，(7)–(8) より (5) を得る．

(ex2) ベクトル表示で表された平面 $S$ : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の方程式を求めよ．　(ans) $x+3y-2z=-9$.

- 3 -（方程式からベクトル表示へ）平面の方程式が与えられているとき，これをベクトル表示に直すことを考えよう．平面 $S$ の方程式を $ax+by+cz=d$ とする．まず $S$ 上の点をどれでもいいので 1 つ見つけ，これを $P_0(x_0,y_0,z_0)$ とし，その位置ベクトルを $\mathtt{x}_0$ とする．$S$ の法線ベクトルは $\mathtt{a}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ である．これに垂直なベクトルは，平行移動でかならず平面内に収まってしまうことに注意する．そこで，法線ベクトルに垂直な，互いに平行でないベクトルを 2 つ求め，それらを $\mathtt{b}$，$\mathtt{c}$ とすれば，

$$\mathtt{x}=\mathtt{x}_0+t\,\mathtt{b}+u\,\mathtt{c} \tag{9}$$

が $S$ のベクトル表示となる．すなわち，法線ベクトルに垂直な，互いに平行でないベクトルを 2 つ求めることが鍵となる．

(ex3) $x+3y-2z=-9$ で表される平面 $S$ のベクトル表示を求めよ．

(note) ある平面の方程式を $ax+by+cz=d$ の形にかけば，両辺を定数倍することを除けば式は 1 通りに決定する．しかしベクトル表示は，同じ平面を考えていても，平面内にある独立なベクトルの選び方が無数にあるので，見掛け上は全く異なった式になることがある．

# 3章　空間ベクトルの線形独立性と平行6面体の体積

☆4☆

キーワード: 線形独立，線形従属，平行6面体，外積，3次行列式

- 1 -（線形独立性）3つの空間ベクトル $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}$ が同じ始点を持つとする．$\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}$ が同一平面上にないとき，これらを線形独立であるという．同一平面上にあるときは，線形従属であるという．線形従属であるための必要十分条件は，3つのベクトルのうち適当に1つを選べば，これが他の2つのベクトルの線形結合で表されるということである．実際そのようなときは，明らかに同一平面上にあり，逆に同一平面上にあれば，適当な2つのベクトルの線形結合でもう1つが表されていることは明らかである．

- 2 -（平行6面体）しかしこのことがわかっていても，線形独立かどうかを判定するのが難しいことがある．そんなときに役立つのが，平行6面体の体積である．以下のように3つのベクトル $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}$ があったとしよう．これらを辺とするような6面体で，向かい合う面が平行になっているものを，$\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}$ の張る平行6面体と呼ぶ．この立体は，3つのベクトルが線形独立であればつぶれないので，体積 $V$ は0にはならない．また3つのベクトルが線形従属であれば，立体が完全につぶれるために，その体積 $V$ は0になる．そのため，線形独立性は，体積 $V$ が0かどうかで判定できることになる．

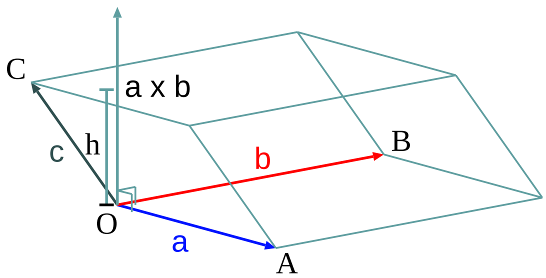



Figure 2

　そこで実際に体積 $V$ を求めることを考えよう．そのためにはまず外積を考えなければならない．

- 3 -（外積）2つの空間ベクトル $\mathsf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\mathsf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ が同じ始点を持つとする．これらを2辺とする平行4辺形の面積 $S$ を大きさとし，この平行4辺形に垂直であって，ベクトル $\mathsf{a}$ を $\mathsf{b}$ に重ねるように回すときに，右ねじが進む向き[1]をその向きとするベクトルを $\mathsf{a}$ と $\mathsf{b}$ の外積と呼び，$\mathsf{a} \times \mathsf{b}$ で表す．ここで $\mathsf{a}$ と $\mathsf{b}$ のなす角を $\theta$ とすると，

[1] $\mathsf{a}$ と $\mathsf{b}$ を含む平面内で，$\mathsf{a}$ を始点を中心に0から $\pi$ の間の角度で回転させて $\mathsf{b}$ と同じ向きになったとき，その回転で右ねじが進む向きのこと．

$$
\begin{aligned}
S^2 &= ||\mathtt{a}||^2 \cdot ||\mathtt{b}||^2 \cdot \sin^2\theta = ||\mathtt{a}||^2 \cdot ||\mathtt{b}||^2 \cdot (1-\cos^2\theta) = ||\mathtt{a}||^2 \cdot ||\mathtt{b}||^2 - (\mathtt{a},\mathtt{b})^2 \\
&= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \\
&= \cdots = (a_2b_3-a_3b_2)^2 + (-a_1b_3+a_3b_1)^2 + (a_1b_2-a_2b_1)^2.
\end{aligned} \tag{1}
$$

このようにして，$S$ を計算することができた．このとき，外積 $\mathtt{a}\times\mathtt{b}$ を次のように定義できる．

$$
\mathtt{a}\times\mathtt{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ -a_1b_3+a_3b_1 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{pmatrix} \tag{2}
$$

実際，$||\mathtt{a}\times\mathtt{b}|| = S$ であることは明らかである．また，$(\mathtt{a}\times\mathtt{b},\mathtt{a}) = (\mathtt{a}\times\mathtt{b},\mathtt{b}) = 0$ であることもわかるので，$\mathtt{a}\times\mathtt{b}$ は平行 4 辺形に垂直である．確認してみると，

$$
(\mathtt{a}\times\mathtt{b},\mathtt{a}) = (a_2b_3-a_3b_2)a_1 + (-a_1b_3+a_3b_1)a_2 + (a_1b_2-a_2b_1)a_3 = 0. \tag{3}
$$

$(\mathtt{a}\times\mathtt{b},\mathtt{b}) = 0$ も同様．(ex1) これを確かめよ．さらに $\mathtt{a}\times\mathtt{b}$ の向きが，右ねじの進む向きと合っていることも次のように示せる．まず，$\mathtt{e}_1\times\mathtt{e}_2 = \mathtt{e}_3$ の場合では簡単にわかる．一般の $\mathtt{a}\times\mathtt{b}$ の場合には，この $\mathtt{e}_1$ と $\mathtt{e}_2$ それぞれが $\mathtt{a}$ と $\mathtt{b}$ になるように連続的に変形していけばよい．ただし，変形の途中で平行にならないようにする．このとき，$\mathtt{e}_1\times\mathtt{e}_2$ は平行四辺形との直交性を保ったまま連続的に変化し，しかも途中で決して $\mathtt{0}$ にならない．したがって，$\mathtt{a}\times\mathtt{b}$ は必ず右ねじの進む向きに保たれる．これで (2) が確かに外積であることがわかった．

外積の成分表示 (2) は次のように考えると覚えやすい．$\mathtt{a},\mathtt{b}$ を並べて $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$ を作り，その第 $i$ 行を隠した残りの 2 次行列の行列式が，外積の第 $i$ 成分になる．ただし，第 2 成分だけは符号が逆になるので注意する．

(ex2) いろいろな $i,j$ に対して，$\mathtt{e}_i\times\mathtt{e}_j$ を計算せよ．また，$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ を計算せよ．

外積については以下の法則がなりたつことが (2) より確かめられる．(1: は右ねじの進む向きが逆になることより明らか.)

$$
\begin{array}{ll}
1: & \mathtt{a}\times\mathtt{b} = -(\mathtt{b}\times\mathtt{a}) \\
2: & \mathtt{a}\times(\mathtt{b}+\mathtt{c}) = \mathtt{a}\times\mathtt{b}+\mathtt{a}\times\mathtt{c} \\
3: & (\mathtt{a}+\mathtt{b})\times\mathtt{c} = \mathtt{a}\times\mathtt{c}+\mathtt{b}\times\mathtt{c} \\
4: & (k\mathtt{a})\times\mathtt{b} = \mathtt{a}\times(k\mathtt{b}) = k(\mathtt{a}\times\mathtt{b})
\end{array} \tag{4}
$$

(ex3) これらを示せ．

(ans) 2: を示す．

$$
\begin{aligned}
\mathtt{a}\times(\mathtt{b}+\mathtt{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1+c_1 \\ b_2+c_2 \\ b_3+c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2(b_3+c_3)-a_3(b_2+c_2) \\ -a_1(b_3+c_3)+a_3(b_1+c_1) \\ a_1(b_2+c_2)-a_2(b_1+c_1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ -a_1b_3+a_3b_1 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2c_3-a_3c_2 \\ -a_1c_3+a_3c_1 \\ a_1c_2-a_2c_1 \end{pmatrix} = \mathtt{a}\times\mathtt{b}+\mathtt{a}\times\mathtt{c}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

- 4 -（平行 6 面体の体積と 3 次行列式）外積を用いると，平行 6 面体の体積 $V$ を計算できる．Figure 2 における平行 6 面体の底面積 $S$ は，$S = ||\mathtt{a} \times \mathtt{b}||$ で求められる．ここで $h$ を平行 6 面体の高さとすれば $V = S \cdot h$．ところが $\mathtt{a} \times \mathtt{b}$ は底面と垂直なベクトルなので，これと $\mathtt{c}$ とのなす角を $\varphi$ とすれば，

$$V = S \cdot ||\mathtt{c}|| \cos\varphi = ||\mathtt{a} \times \mathtt{b}|| \cdot ||\mathtt{c}|| \cos\varphi = (\mathtt{a} \times \mathtt{b}, \mathtt{c}). \tag{6}$$

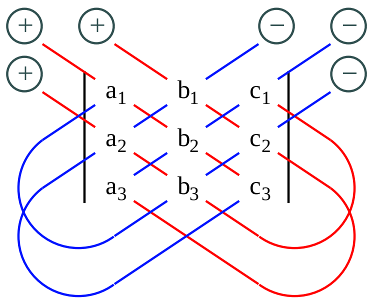
このようにして，$V$ は外積と内積を用いて表すことができる．この式 (6) は正確に言うと，体積に適当に符号をつけたものになるので符号つき体積という．(6) は 3 次行列の行列式（3 次行列式）の定義ともなっている．すなわち，

$$\begin{vmatrix} \mathtt{a} & \mathtt{b} & \mathtt{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (\mathtt{a} \times \mathtt{b}, \mathtt{c}) = \begin{array}{l} a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 \\ -a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 \end{array}. \tag{7}$$

こうして，次の定理を得る．

(T1) 3 つの空間ベクトル $\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}$ が線形独立であるための必要十分条件は，$\begin{vmatrix} \mathtt{a} & \mathtt{b} & \mathtt{c} \end{vmatrix} \neq 0$ となることである．

(note) 3 次行列式を (7) 最右辺で展開する公式をサラスの公式という．次のように考えると覚えやすい．




(ex4) $\mathtt{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\mathtt{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$，$\mathtt{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ t \end{pmatrix}$ とする．これらが線形独立となるための必要十分条件を $t$ で表せ．

(ans) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & t \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot t + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot t - 3 \cdot 5 \cdot 7 = -3t + 27 \neq 0.$

$\therefore \ \boxed{t \neq 9}.$

# 4章　3次行列と$V^3$の線形変換

☆6☆

キーワード: 3次行列，$V^3$，線形変換，線形性，合成変換，行列が表す線形変換，
線形変換による図形の像，平面および空間内の回転

- 1 -（3次行列）9つの実数を3行3列に配置したものを3次実行列という.（簡単のため，この章では3次行列ということにする.）すなわち3次行列とは，次のような実数の配列である.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{1}$$

これを大文字で $A$ と表そう．空間ベクトル $\mathtt{x}$ に左から3次行列 $A$ を掛けることで，新しい空間ベクトル $A\mathtt{x}$ を作ることができる．それは行列とベクトルの積であり，次のように定義される.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix} \tag{2}$$

さらに2つの3次行列 $A, B$ の積 $AB$ を（少し複雑だが）次のように定義する.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix} \tag{3}$$

行列とベクトルまたは行列同士の積については，以下の法則がなりたつ．$A, B, C$ を3次行列，$\mathtt{x}, \mathtt{y}$ を空間ベクトルとするとき，

$$\begin{array}{ll} (AB)C = A(BC) & \text{（結合律）} \\ (AB)\mathtt{x} = A(B\mathtt{x}) & \text{（結合律）} \\ A(\mathtt{x}+\mathtt{y}) = A\mathtt{x} + A\mathtt{y} & \text{（分配律）} \\ A(k\mathtt{x}) = k(A\mathtt{x}) & \end{array} \tag{4}$$

(ex1) これらを示せ.

- 2 -（$V^3$）すべての空間ベクトルの集合を$V^3$ とかく．空間内の点をその位置ベクトルに対応させると，$V^3$ は空間内の点の集合とみなすことができる．それはすなわち3次元空間そのものとなる．このように考えることで，空間図形を各点の位置ベクトルの集合で表すことができる．すでに学んだ，平面や直線のベクトル表示はその例である.

$$V^3 = \{\,\text{空間ベクトル全体}\,\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbf{R} \right\} \tag{5}$$

ここに，すべての実数の集合を $\mathbf{R}$ で表す．

- 3 -（$V^3$ の線形変換）$V^3$ の各ベクトル[1] $\mathrm{x}$ に $V^3$ のベクトル $T(\mathrm{x})$ を対応させる $\boxed{\text{関数}}$（写像）$T$ を，$V^3$ の変換と呼ぶ．$T(\mathrm{x})$ は簡単に $T\mathrm{x}$ ともかかれる．特に $T$ が $\boxed{\text{線形性}}$ と呼ばれる次の性質[2]を持つとき，$T$ を $V^3$ の $\boxed{\text{線形変換}}$ という．

$$\begin{aligned} &T(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = T\mathrm{x} + T\mathrm{y} && (\mathrm{x}, \mathrm{y} \in V^3) \\ &T(k\mathrm{x}) = k(T\mathrm{x}) && (\mathrm{x} \in V^3,\ k \in \mathbf{R}) \end{aligned} \tag{6}$$

(6) の上の式より，

$$\begin{aligned} T(\mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{z}) = &\ T((\mathrm{x}+\mathrm{y})+\mathrm{z}) \\ = &\ T(\mathrm{x}+\mathrm{y}) + T\mathrm{z} = T\mathrm{x} + T\mathrm{y} + T\mathrm{z} \end{aligned} \tag{7}$$

がなりたつ．同様にして，線形変換 $T$ は次をみたすことがわかる．

$$T(\mathrm{x}_1 + \cdots + \mathrm{x}_n) = T\mathrm{x}_1 + \cdots + T\mathrm{x}_n \tag{8}$$

$T, S$ を 2 つの $V^3$ の変換とするとき，その合成 $S \circ T$ を

$$(S \circ T)\mathrm{x} = S(T\mathrm{x}) \qquad (\mathrm{x} \in V^3) \tag{9}$$

で定義する．これを合成変換という．$S \circ T$ は簡単に $ST$ ともかく．

(T1) $T, S$ が $V^3$ の線形変換ならば，$ST$ もまた $V^3$ の線形変換となる．

($\because$) 任意の $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in V^3$ および $k \in \mathbf{R}$ に対して，

$$\begin{aligned} (ST)(\mathrm{x}+\mathrm{y}) &= S(T(\mathrm{x}+\mathrm{y})) = S(T\mathrm{x}+T\mathrm{y}) && (T\text{ の線形性}) \\ &= S(T\mathrm{x}) + S(T\mathrm{y}) && (S\text{ の線形性}) \\ &= (ST)\mathrm{x} + (ST)\mathrm{y}, \\ (ST)(k\mathrm{x}) &= S(T(k\mathrm{x})) = S(kT\mathrm{x}) && (T\text{ の線形性}) \\ &= kS(T\mathrm{x}) && (S\text{ の線形性}) \\ &= k(ST)\mathrm{x}. && (\text{q.e.d.}) \end{aligned} \tag{10}$$

- 4 -（3 次行列と線形変換）3 次行列 $A$ を取るとき，$V^3$ の線形変換 $T_A$ を次のように定義する．

$$T_A(\mathrm{x}) = A\mathrm{x} \quad (\mathrm{x} \in V^3) \tag{11}$$

$T_A$ を $A$ が表す（で表される，が定める）$V^3$ の線形変換という．要するに，$T_A$ とはベクトルに左から $A$ を掛けるという線形変換に他ならない．

$T_A$ が線形性の条件 (6) をみたすことは (4) の第 3,4 式から明らかである．実はその逆もなりたつ．

[1] $V^3$ に属する各ベクトルという意味．

[2] 紛れのない場合は，$k(T\mathrm{x}) = kT\mathrm{x}$ とかく．

(T2) $T$ を $V^3$ の線形変換とする.（すなわち線形性の条件 (6) をみたすとする.） このとき適当な 3 次行列 $A$ が存在して，$T = T_A$ とかける.

(∵) $T$ が (6) をみたすとする．ある $A$ が存在して，任意の $\mathtt{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して，$T\mathtt{x} = T_A(\mathtt{x})$ となることを示せばよい．$V^3$ の基本ベクトルを $\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_3$ とすると，

$$\begin{aligned} T\mathtt{x} = T(x\mathsf{e}_1 + y\mathsf{e}_2 + z\mathsf{e}_3) &= T(x\mathsf{e}_1) + T(y\mathsf{e}_2) + T(z\mathsf{e}_3) && (12) \\ &= xT\mathsf{e}_1 + yT\mathsf{e}_2 + zT\mathsf{e}_3. && (13) \end{aligned}$$

ここで，$T\mathsf{e}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{pmatrix}$ $(j = 1, 2, 3)$ とおけば，

$$\begin{aligned} (13) \quad &= x\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix} \\ &= A\mathtt{x} = T_A(\mathtt{x}). \qquad \text{(q.e.d.)} \end{aligned} \tag{14}$$

(ex2) $V^3$ の線形変換 $T$ を次のように定めるとき，$T = T_A$ をみたす行列 $A$ を求めよ.

(1) $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.　(2) $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y + 3z \\ 3z + 2x \\ 2x + 3y \end{pmatrix}$.

(T3) $V^3$ の線形変換 $T_A$，$T_B$ について次がなりたつ.

$$T_A T_B = T_{AB} \tag{15}$$

(∵) 任意の $\mathtt{x} \in V^3$ に対して，

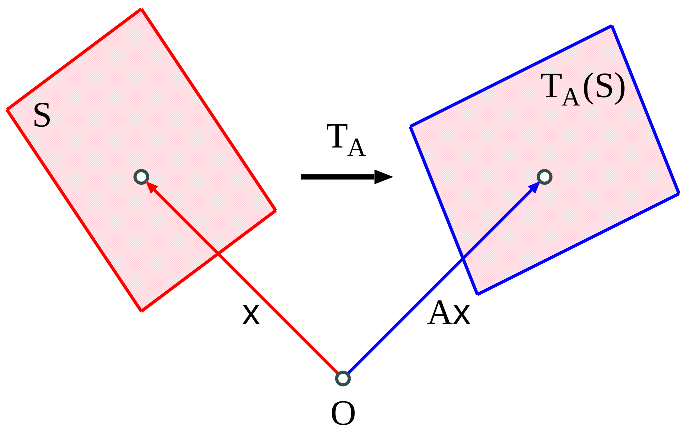
$$\begin{aligned} (T_A T_B)\mathtt{x} &= T_A(T_B(\mathtt{x})) = T_A(B\mathtt{x}) = A(B\mathtt{x}) \\ &= (AB)\mathtt{x} = T_{AB}(\mathtt{x}). \qquad \text{(q.e.d.)} \end{aligned} \tag{16}$$

この定理は，行列で表される線形変換の合成は，行列の積で表されることを示している.

- 5 - （平面および直線の $T_A$ による像）3 次行列 $A$ を 1 つ取る．$V^3$ を空間内の点の集合とみなしたとき，空間内の平面 $S$ は，$V^3$ の部分集合とみなせる．このとき，

$$T_A(S) = \{A\mathrm{x} \mid \mathrm{x} \text{ は } S \text{ 上の点の位置ベクトル}\} \tag{17}$$

で定められる集合を，$S$ の $T_A$ による像，または $S$ が $T_A$ によって移される図形という．今は平面 $S$ で説明したが，直線の場合も同様である．ベクトル表示を用いると，$T_A(S)$ を具体的に求めることができる．




(ex3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．$S : x + 2y + 3z = 4$ が $T_A$ によって移される図形 $S'$ を方程式で表せ．

(ans) $S$ の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ である．これに垂直なベクトルを 2 つ求めると，$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ である．また $S$ は $(1, 0, 1)$ を通る．ゆえに $S$ のベクトル表示は，

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

ゆえに，$S'$ の ベクトル表示は，

$$\begin{aligned} \mathrm{x}' &= A\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{19}$$

これを方程式に直す．まず $S'$ の法線ベクトルは，$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$．また $S'$ は $(1,4,1)$ を通る．よって，$S'$ の方程式は

$\boxed{x-1+2(y-4)+11(z-1)=0}$，すなわち，$\boxed{x+2y+11z=20}$．

(ex4) $A$ を (ex3) と同じとする．直線 $l : \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{6}$ が $T_A$ によって移される図形 $l'$ の方程式を求めよ．

(ans)

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{6} = t \tag{20}$$

とおけば,（あるいは，方向ベクトルが $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ で $(1,2,3)$ を通るので）$l$ のベクトル表示は，

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

ゆえに，$l'$ のベクトル表示は，

$$\begin{aligned} \mathrm{x}' = A\mathrm{x} \quad &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{22}$$

ここから $t$ を消去して,（あるいは，方向ベクトルが $\begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix}$ で $(3,6,5)$ を通るので）

$l'$ の方程式: $\boxed{\frac{x-3}{9} = \frac{y-6}{15} = \frac{z-5}{11}}$ を得る．

- 6 -（平面および空間内の回転）すべての平面ベクトルの集合 $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbf{R}\right\}$ を $V^2$ とかく．これについても，$V^3$ の場合と同様に線形変換を考えることができる．その中で，特に平面内で原点を中心として角度 $\theta$ だけ回転させる線形変換はよく用いられ，

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{23}$$

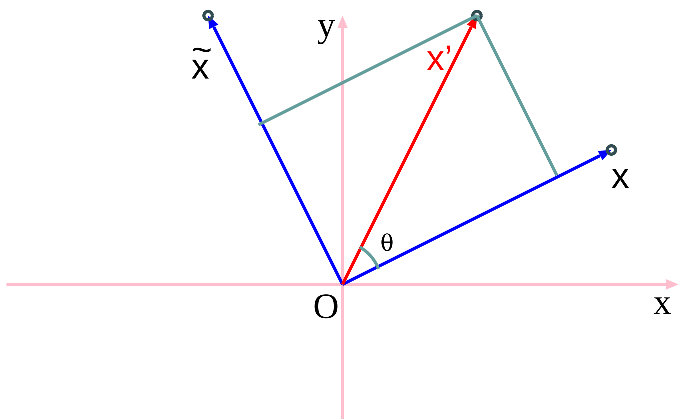
で表される．これを示してみよう．$V^2$ のベクトル $\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して，これを $\theta$ 回転したベクトルを $\mathrm{x}'$ とする．また，$\mathrm{x}$ に直交するベクトル $\tilde{\mathrm{x}} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ を取る．このとき，

$$\begin{aligned} \mathrm{x}' &= \cos\theta\,\mathrm{x} + \sin\theta\,\tilde{\mathrm{x}} = \cos\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{24}$$

が得られる．なお，回転を 2 回行うと回転角が加算されるので，

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\phi) & -\sin(\theta+\phi) \\ \sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{pmatrix} \tag{25}$$

がなりたつことがわかる．




次に，空間内の回転について考えよう．そのために，原点を通る直線 $l$ を与えて，それを回転軸として空間を角度 $\theta$ だけ回転させることにする．$l$ の単位方向ベクトル（方向ベクトルで大きさ 1 のもの）を $\mathrm{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とし，回転は $\theta > 0$ のとき，その回転により右ねじの進む向きが a の向きになるように行うものとする．$V^3$ のベクトル $\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP}$ を取り，これを $\theta$ 回転したベクトルを $\mathrm{x}'$ とする．$\mathrm{x}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ を x の $l$ への射影，すなわち，$l$ 上に $P_0$ を，$OP_0 \perp P_0P$ となるように取ったものとする．$\mathrm{x}_1 = \overrightarrow{P_0P}$ とし，これを $l$ を軸として $\frac{\pi}{2}$ だけ回転したベクトルを $\mathrm{x}_2$ とする．(Figure 3)

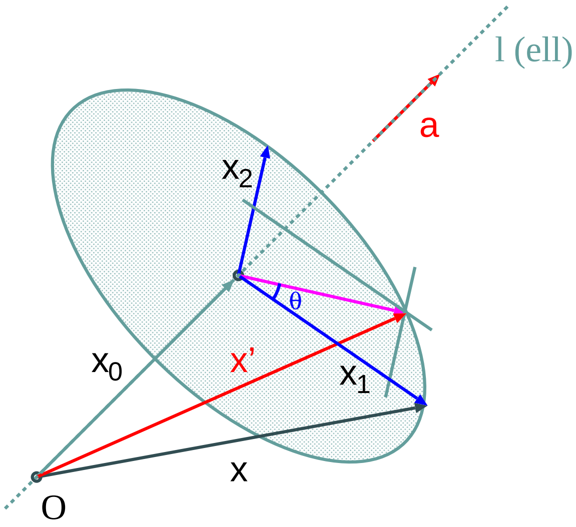



Figure 3

このとき，

$$
\begin{aligned}
&\mathtt{x}_0 = (\mathtt{a}, \mathtt{x})\mathtt{a} \qquad \mathtt{x}_1 = \mathtt{x} - \mathtt{x}_0 \\
&\mathtt{x}_2 = \mathtt{a} \times \mathtt{x}_1 = \mathtt{a} \times \mathtt{x}
\end{aligned} \tag{26}
$$

なので，

$$
\begin{aligned}
\mathtt{x}' &= \mathtt{x}_0 + \cos\theta\,\mathtt{x}_1 + \sin\theta\,\mathtt{x}_2 \\
&= (\mathtt{a}, \mathtt{x})\mathtt{a} + \cos\theta\,[\mathtt{x} - (\mathtt{a}, \mathtt{x})\mathtt{a}] + \sin\theta\,(\mathtt{a} \times \mathtt{x}) \\
&= \cos\theta\,\mathtt{x} + (1 - \cos\theta)(\mathtt{a}, \mathtt{x})\mathtt{a} + \sin\theta(\mathtt{a} \times \mathtt{x}).
\end{aligned} \tag{27}
$$

これを行列に直すと，

$$
\begin{aligned}
\mathtt{x}' &= \cos\theta E\,\mathtt{x} + (1 - \cos\theta)\mathtt{a}\,{}^t\mathtt{a}\,\mathtt{x} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \mathtt{x} \\
&= \begin{pmatrix} a^2(1-\cos\theta) + \cos\theta & ab(1-\cos\theta) - c\sin\theta & ac(1-\cos\theta) + b\sin\theta \\ ab(1-\cos\theta) + c\sin\theta & b^2(1-\cos\theta) + \cos\theta & bc(1-\cos\theta) - a\sin\theta \\ ac(1-\cos\theta) - b\sin\theta & bc(1-\cos\theta) + a\sin\theta & c^2(1-\cos\theta) + \cos\theta \end{pmatrix} \mathtt{x}
\end{aligned} \tag{28}
$$

を得る．この公式をロドリゲスの回転公式という．

以上では，ベクトルをうまく分解して回転を表す行列を導出したのであるが，以下少し違った切り口で同じ結果を導いてみよう．まず，$z$ 軸を回転軸とする角度 $\theta$ の回転を表す行列は容易に，

$$
A_{z,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{29}
$$

であることがわかる．回転軸をベクトル $\mathtt{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とし，$z$ 軸の正の向きと $\mathtt{a}$ のなす角を $\phi$ $(0 \le \phi \le \pi)$，$x$ 軸の正の向きと $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ のなす角を $\eta$ $(-\pi < \eta \le \pi)$ とするとき，$\mathtt{a}$ を軸とする角度 $\theta$ の回転 $R_{\mathtt{a},\theta}$ を表す行列を $A_{\mathtt{a},\theta}$ とする．この回転を次の 3 つのステップに分解する．

1: 回転 $R$ により，$\mathsf{a}$ を $z$ 軸の正の向きに合わせる．

2: $S$ により，$z$ 軸の周りに $\theta$ だけ回転する．

3: 回転 $R^{-1}$ により，$\mathsf{a}$ を元の向きに戻す．

上述の $R$ は，$z$ 軸および原点を始点とする $\mathsf{a}$ を含む平面の法線ベクトル $\mathsf{a}' = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$ を軸とする回転と捉えられ，その回転角は $\phi$ である．さらにこの $R$ を，上で行ったのと同様に分解することができる．すなわち，

1: 回転 $R'$ により，$\mathsf{a}'$ を $x$ 軸の正の向きに合わせる．

2: $S'$ により，$x$ 軸の周りに $\phi$ だけ回転する．

3: 回転 $R'^{-1}$ により，$\mathsf{a}'$ を元の向きに戻す．

以上より，次の分解を得る．

$$R_{\mathsf{a},\theta} = R^{-1}SR = R'^{-1}S'^{-1}R'SR'^{-1}S'R' \tag{30}$$

ここで，$R'$ の回転角は $\eta' = \frac{\pi}{2} - \eta$ であることに注意し，$A_{x,\phi}$ を (29) と同様に

$$A_{x,\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{31}$$

で定義すると，$A_{\mathsf{a},\theta}$ は次のように計算できる．

$$\begin{aligned} A_{\mathsf{a},\theta} &= A_{z,-\eta'}A_{x,-\phi}A_{z,\eta'}A_{z,\theta}A_{z,-\eta'}A_{x,\phi}A_{z,\eta'} \\ &= A_{z,-\eta'}A_{x,-\phi}A_{z,\theta}A_{x,\phi}A_{z,\eta'} \end{aligned} \tag{32}$$

したがって，以下を得る．

$$\begin{aligned} A_{\mathsf{a},\theta} &= \begin{pmatrix} \cos\eta' & \cos\phi\sin\eta' & \sin\phi\sin\eta' \\ -\sin\eta' & \cos\phi\cos\eta' & \sin\phi\cos\eta' \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\eta' & -\sin\eta' & 0 \\ \cos\phi\sin\eta' & \cos\phi\cos\eta' & -\sin\phi \\ \sin\phi\sin\eta' & \sin\phi\cos\eta' & \cos\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin\eta & \cos\phi\cos\eta & \sin\phi\cos\eta \\ -\cos\eta & \cos\phi\sin\eta & \sin\phi\sin\eta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\eta & -\cos\eta & 0 \\ \cos\phi\cos\eta & \cos\phi\sin\eta & -\sin\phi \\ \sin\phi\cos\eta & \sin\phi\sin\eta & \cos\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s_\eta^2c_\theta + c_\phi^2c_\eta^2c_\theta + s_\phi^2c_\eta^2 & -c_\phi s_\theta - s_\phi^2s_\eta c_\eta c_\theta + s_\phi^2s_\eta c_\eta & s_\phi s_\eta s_\theta - s_\phi c_\phi c_\eta c_\theta + s_\phi c_\phi c_\eta \\ c_\phi s_\theta - s_\phi^2s_\eta c_\eta c_\theta + s_\phi^2s_\eta c_\eta & c_\eta^2c_\theta + c_\phi^2s_\eta^2c_\theta + s_\phi^2s_\eta^2 & -s_\phi c_\eta s_\theta - s_\phi c_\phi s_\eta c_\theta + s_\phi c_\phi s_\eta \\ -s_\phi s_\eta s_\theta - s_\phi c_\phi c_\eta c_\theta + s_\phi c_\phi c_\eta & s_\phi c_\eta s_\theta - s_\phi c_\phi s_\eta c_\theta + s_\phi c_\phi s_\eta & s_\phi^2c_\theta + c_\phi^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{33}$$

ここに，$\cos\theta = c_\theta$，$\sin\theta = s_\theta$ などと略記した．これは，前述のロドリゲスの回転公式 (28) と同等の公式である．

(note) 空間内で原点を中心とする球面が，中心を固定して変形することなく移動したとき，その移動は原点を通る適当な回転軸（オイラー軸）の周りの回転で実現できる（オイラーの回転定理）．そのような回転は，回転軸と回転角を変えながら，自由に合成することができるが，この定理によれば，合成の結果は，1 つの回転軸の周りの回転で表現できることがわかる．

# 5章 行列の演算と基本変形

☆13☆

キーワード: 複素行列，実行列，行ベクトル，列ベクトル，転置行列，
和，スカラー倍，積，対角行列，スカラー行列，単位行列，0 行列，
行列の区分け，逆行列，正則，トレース，基本行列，基本変形，階数，標準形，
ベクトルの内積，正規行列，エルミート行列，対称行列，交代行列，
ユニタリ行列，直交行列

- 1 -（$(m,n)$ 型行列）数や記号が横一列に並んだ列を行といい，縦一列に並んだ列を列という．(1) のように，数を $m$ 行 $n$ 列の長方形に配置したものを，$(m,n)$ 型（の）行列，$m\times n$ 行列，あるいは単に行列という．$(m,n)$ をこの行列の型という．この行列の行を上から順に第 1 行，第 2 行，$\ldots$，第 $m$ 行といい，列を左から順に第 1 列，第 2 列，$\ldots$，第 $n$ 列というが，簡単のため，第という文字は省略する．

行列を構成する数を成分といい，特に $i$ 行 $j$ 列にある成分を $(i,j)$ 成分という．すべての成分が複素数である行列を複素行列といい，すべての成分が実数である行列を実行列という．定義より，実行列は複素行列である．$(n,n)$ 型行列のことを，$n$ 次（の）正方行列，$n$ 次行列，または単に正方行列という．

$(m,1)$ 型の行列は $m$ 項列ベクトルまたは $m$ 項縦ベクトルといい，$(1,n)$ 型の行列は $n$ 項行ベクトルまたは $n$ 項横ベクトルという．列 (行) ベクトルの成分が複素数か実数かによって，複素列 (行) ベクトル，実列 (行) ベクトルなどという．このように，ベクトルは行列の特別な場合である．列ベクトルの $(i,1)$ 成分を第 $i$ 成分，行ベクトルの $(1,j)$ 成分を第 $j$ 成分ともいう．$(1,1)$ 型行列は通常の数（スカラー）と考えることができる．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots\cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots\cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

このような行列を通常大文字で $A$ と表す．成分が $b_{ij}$ ならば $B$ となる．この表示を簡潔に書きたいときは，

$$A=(a_{ij}) \qquad (1\le i\le m,\ 1\le j\le n) \tag{2}$$

と表記する．これは $(i,j)$ 成分が $a_{ij}$ という意味である．(2) の後ろの括弧内は，$A$ が $(m,n)$ 型と指定されているときなどまぎれのないときは省略することもある．また，便宜上 $A=(a_{jk})$ などと添字を変えることもあるが，$(a_{ij})$ と同じ意味である．

2 つの行列 $A,B$ が等しい，すなわち $A=B$ がなりたつとは，$A$ と $B$ が同じ型の行列であって，対応する成分がすべて等しいことであると定義する．

$(m,n)$ 型行列 $A=(a_{ij})$ に対して，$B=(b_{ij})$，$b_{ij}=a_{ji}$ で定められる $(n,m)$ 型行列 $B$ を $A$ の転置行列といい，${}^tA$，または $A^T$ で表す．$A$ から ${}^tA$ を作ることを，$A$ を転置する，あるいは $A$ の転置を取るなどという．${}^tA$ の $j$ 行は，$A$ の $j$ 列を横にしたものに，${}^tA$ の $i$ 列は，$A$ の $i$ 行を縦にしたものになっている．たとえば，

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

明らかに，${}^t({}^tA)=A$ がなりたつ．

(1) を表すとき，列ベクトルや行ベクトルに分解して表示することができる．すなわち，

$$\mathsf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}; \qquad \mathsf{a}'_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \tag{4}$$

とおけば，次のように表示できる．

$$A = \begin{pmatrix} \mathsf{a}_1 & \mathsf{a}_2 & \dots & \mathsf{a}_n \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} \mathsf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_m \end{pmatrix} \tag{5}$$

このとき，$\mathsf{a}_1,\dots,\mathsf{a}_n$ を $A$ の列ベクトル，$\mathsf{a}'_1,\dots,\mathsf{a}'_m$ を $A$ の行ベクトルという．

- 2 -（行列の和とスカラー倍）行列の和とスカラー倍は，空間ベクトルと同様に定義される．$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ が $(m,n)$ 型行列のとき，和 $A+B$ を次のような $(m,n)$ 型行列と定める．

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

さらに $k$ をスカラーとするとき，スカラー倍 $kA$ を次のような $(m,n)$ 型行列と定める．

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix} \tag{7}$$

和とスカラー倍については以下の法則がなりたつ．

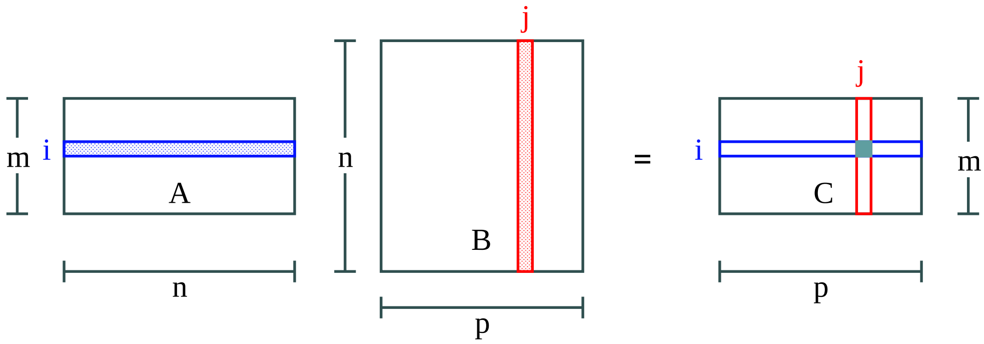
$$\begin{array}{ll} A+B=B+A & \text{（交換律）} \\ (A+B)+C=A+(B+C) & \text{（結合律）} \\ k(A+B)=kA+kB & \\ (k+l)A=kA+lA & \\ (kl)A=k(lA) & \end{array} \tag{8}$$

成分がすべて 0 の $(m,n)$ 型行列を 0 行列といい，$O_{mn}$ あるいは単に $O$ で表す．明らかに，$A+O=O+A=A$，$1A=A$，$0A=O$ がなりたつ．また，$A+B=B+A=O$ となる $B$ を $-A$ で表す．$-A=(-1)A$，$-(-A)=A$ がなりたつ．$A+(-B)=A-B$ とかく．成分がすべて 0 の（行または列）ベクトルを 0 ベクトルといい，$\mathsf{0}$ などで表す．

(ex1) (8) を示せ．

- 3 -（行列の積）$A=(a_{ij})$ を $(m,n)$ 型行列，$B=(b_{ij})$ を $(n,p)$ 型行列とする．このとき積 $AB=C=(c_{ij})$ を次のように定義する．$C$ は $(m,p)$ 型行列であって，

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}. \tag{9}$$




(ex2) 次を計算せよ．

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&3&-2\\2&-3&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-3&-1\\2&-1&-4\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&3&-2\\2&-3&1\end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix}1&1&-2\\-4&1&3\\-4&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&3&-2\\2&-3&1\end{pmatrix} \tag{10}$$

(ans) 答のみ示す: $\begin{pmatrix}6&3&3\\-3&9&-6\\6&-9&3\end{pmatrix}$.

行列の積については，一般には $AB=BA$ はなりたたない．これがなりたつとき，$A$ と $B$ は可換であるという．行列の和と積については以下の法則がなりたつ．ただし，行列は積が定義できるような型を持っているとする．たとえば，1: においては $A$ は $(m,n)$ 型，$B$ は $(n,p)$ 型，$C$ は $(p,q)$ 型，2: においては $A$ を $(m,n)$ 型，$B,C$ を $(n,p)$ 型とする．

$$\begin{array}{lll}1: & (AB)C=A(BC) & \text{（結合律）}\\ 2: & A(B+C)=AB+AC & \text{（分配律）}\\ 3: & (A+B)C=AC+BC & \text{（分配律）}\\ 4: & (kA)B=A(kB)=k(AB) & \end{array} \tag{11}$$

(ex3) (11) を示せ．

($\because$) 1: 両辺に積が定義され，共に $(m,q)$ 型になることは明らか．$AB=(x_{ik})$ とすれば，$x_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}$．ゆえに，$(AB)C=(y_{il})$ とすれば，

$$\begin{aligned}y_{il}&=\textstyle\sum_{k=1}^{p}x_{ik}c_{kl}=\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl}\\&=\textstyle\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}c_{kl}.\end{aligned} \tag{12}$$

次に $BC=(\tilde{x}_{jl})$ とすれば，$\tilde{x}_{jl}=\sum_{k=1}^{p}b_{jk}c_{kl}$．ゆえに，$A(BC)=(\tilde{y}_{il})$ とすれば，

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{il}&=\textstyle\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\tilde{x}_{jl}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p}b_{jk}c_{kl}\right)\\&=\textstyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}a_{ij}b_{jk}c_{kl}.\end{aligned} \tag{13}$$

(12),(13) より，$y_{il}=\tilde{y}_{il}$．ゆえに，$(AB)C=A(BC)$．(q.e.d.)

(∵) 2: 両辺とも計算が定義され，共に $(m,p)$ 型になることは明らか．$B+C=(x_{jk})$ とすれば，$x_{jk}=b_{jk}+c_{jk}$．ゆえに，$A(B+C)=(y_{ik})$ とすれば，

$$y_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_{jk}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(b_{jk}+c_{jk})=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_{jk}. \tag{14}$$

次に $AB=(\tilde{x}_{ik})$，$AC=(\tilde{y}_{ik})$ とし，$AB+AC=(\tilde{z}_{ik})$ とすれば，

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{ik}=\textstyle\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk},\quad \tilde{y}_{ik}=\textstyle\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_{jk}.\\ \therefore\quad \tilde{z}_{ik}=\tilde{x}_{ik}+\tilde{y}_{ik}=\textstyle\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_{jk}. \end{aligned} \tag{15}$$

(14),(15) より，$y_{ik}=\tilde{z}_{ik}$．ゆえに，$A(B+C)=AB+AC$．(q.e.d.)

(8),(11) によれば，行列の和および積に関する結合律がなりたつ．これにより，いくらかの行列の和および積

$$\begin{array}{l} A_1+A_2+\cdots+A_s\\ A_1A_2\ldots A_s \end{array} \tag{16}$$

については，どのように括弧をつけても結果が変わらないことが示される．ゆえに，通常 (16) のような式においては括弧は省略される．また，(8) により，和に関する交換律がなりたつため，和の順序は自由に交換可能であるが，積については特別な場合を除き，順序交換はできない．さらに (11) の分配律より，一般に次がなりたつことがわかる．

$$\begin{array}{l} A(B_1+B_2+\cdots+B_s)=AB_1+AB_2+\cdots+AB_s\\ (A_1+A_2+\cdots+A_s)B=A_1B+A_2B+\cdots+A_sB \end{array} \tag{17}$$

(ex4) 帰納法により，これを示せ．

$A$ を $(m,n)$ 型とするとき，明らかに，$AO_{np}=O_{mp}$，$O_{lm}A=O_{ln}$ がなりたつ．

行列の $(i,i)$ 成分のことを対角成分という．対角成分以外はすべて $0$ である次のような $n$ 次行列を $n$ 次対角行列という．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{18}$$

この対角行列は簡単に，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & O\\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{19}$$

のように表記されることが多い．ここでの $O$ は $0$ 行列という意味ではなくて，$O$ とそのまわりの空白の部分の成分はすべて $0$ という意味である．この対角行列をさらに簡潔に，$\mathrm{diag}(a_{11},\ldots,a_{nn})$ で表すこともある．明らかに次がなりたつ．

$$\begin{array}{l} \mathrm{diag}(a_{11},\ldots,a_{nn})+\mathrm{diag}(b_{11},\ldots,b_{nn})=\mathrm{diag}(a_{11}+b_{11},\ldots,a_{nn}+b_{nn})\\ \mathrm{diag}(a_{11},\ldots,a_{nn})\,\mathrm{diag}(b_{11},\ldots,b_{nn})=\mathrm{diag}(a_{11}b_{11},\ldots,a_{nn}b_{nn})\\ (\mathrm{diag}(a_{11},\ldots,a_{nn}))^s=\mathrm{diag}\left(a_{11}^s,\ldots,a_{nn}^s\right)\quad (s=1,2,3,\ldots)\quad (\Rightarrow\text{ - 5 -}) \end{array} \tag{20}$$

対角成分がすべて $1$ の $n$ 次対角行列を $n$ 次単位行列といい，$E_n$ あるいは単に $E$ とかく．$E_n$ の $n$ 個の列ベクトルを $n$ 項基本ベクトルといい，左から，$\mathsf{e}_1,\mathsf{e}_2,\ldots,\mathsf{e}_n$ で

表す．

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathsf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathsf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathsf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

任意の $(m,n)$ 型行列 $A$ に対して，次がなりたつ．

$$AE_n = E_mA = A \tag{22}$$

(ex5) (1) (20) を確かめよ． (2) (22) を示せ． (3) $n$ 次行列に $n$ 次対角行列を左または右から掛けたらどうなるか．

あるスカラー $k$ に対して $kE_n$ の形の行列をスカラー行列という．(11),(22) より，

$$\begin{aligned} A(kE_n) &= k(AE_n) = kA \\ (kE_m)A &= k(E_mA) = kA. \end{aligned} \tag{23}$$

すなわち，スカラー行列は左右どちらから掛けても行列を同じスカラー倍するだけである．またそのような性質をもつのはスカラー行列に限る．すなわち，

(T1) $F$ を $n$ 次行列とするとき，

$$F \text{ がスカラー行列} \iff \text{任意の } n \text{ 次行列 } X \text{ に対して，} FX = XF \tag{24}$$

($\because$) - 11 - 参照.

$n$ 次行列 $A = (a_{ij})$ が $i > j \ \Rightarrow \ a_{ij} = 0$ をみたすとき，$A$ を上三角行列といい，$i < j \ \Rightarrow \ a_{ij} = 0$ をみたすとき，$A$ を下三角行列という．$A$ が上三角行列または下三角行列ならば，三角行列という．$n$ 次上三角行列同士の和または積はまた $n$ 次上三角行列になり，$n$ 次下三角行列同士の和または積もまた $n$ 次下三角行列になる．

- 4 -（行列の区分け）$(m,n)$ 型行列 $A$ を適当に縦横に仕切ると，いくらかの小さい行列に分解できる．たとえば，

$$A = \begin{array}{|c|c|c|l} \hline A_{11} & A_{12} & A_{13} & m_1 \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} & m_2 \\ \hline A_{31} & A_{32} & A_{33} & m_3 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{n_1} & \multicolumn{1}{c}{n_2} & \multicolumn{1}{c}{n_3} & \end{array} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \tag{25}$$

（$A_{ij}$ は $(m_i, n_j)$ 型行列）などがその例である．行列のこのような表示を区分けといい，また区分けされた行列をブロック行列ともいう．これを簡潔に $A = (A_{ij})$ $(1 \leq i, j \leq 3)$ とも表記する．一般には，

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rs} \end{pmatrix} \\ &= (A_{ij}) \quad (1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq s) \end{aligned} \tag{26}$$

のような区分けが考えられる.[1] この区分けにおいて，$A_{ij}$ を $A$ の $(i,j)$ ブロック，または単にブロックという．さて，もう 1 つの $(m,n)$ 型行列 $B$ を (25) と同じ幅で仕切

[1]同じ行列をどのように区分けしたとしても元の行列と同じものとみなす．

り，$B=(B_{ij})$ とすれば，

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & A_{13}+B_{13} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & A_{23}+B_{23} \\ A_{31}+B_{31} & A_{32}+B_{32} & A_{33}+B_{33} \end{pmatrix} \tag{27}$$

のように計算できることは明らかだろう．スカラー倍も含めて，一般に次がなりたつことがわかる．

(T2) 同じ区分けをした $(m,n)$ 型行列 $A=(A_{ij})$，$B=(B_{ij})$ $(1\le i\le r,\ 1\le j\le s)$ およびスカラー $k$ に対して，

$$\begin{aligned} A+B&=(A_{ij}+B_{ij}) \qquad &(1\le i\le r,\ 1\le j\le s), \\ kA&=(kA_{ij}) \qquad &(1\le i\le r,\ 1\le j\le s). \end{aligned} \tag{28}$$

次に積について考えてみる．(25) の $A$ に対して，もう 1 つの区分けされた $(n,p)$ 型行列 $B$ を

$$B=\begin{array}{|c|c|l} \hline B_{11} & B_{12} & \multicolumn{1}{|l}{n_1} \\ \hline B_{21} & B_{22} & \multicolumn{1}{|l}{n_2} \\ \hline B_{31} & B_{32} & \multicolumn{1}{|l}{n_3} \\ \hline \multicolumn{1}{c}{p_1} & \multicolumn{1}{c}{p_2} & \end{array} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{pmatrix} \tag{29}$$

とする．ここで，$\boxed{A \text{ の区分けの横の幅と，} B \text{ の区分けの縦の幅が対応している}}$ ことに注意する．このようなとき，$AB$ を区分けのままで計算できて，

$$AB=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}+A_{13}B_{31} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}+A_{13}B_{32} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}+A_{23}B_{31} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}+A_{23}B_{32} \\ A_{31}B_{11}+A_{32}B_{21}+A_{33}B_{31} & A_{31}B_{12}+A_{32}B_{22}+A_{33}B_{32} \end{pmatrix} \tag{30}$$

のようになる．要するに，(25),(29) を行列の普通の成分表示とみて計算してよいということである．上に囲んだ条件をみたせば，他の区分けでも同様なことがなりたつ．

(T2') $(m,n)$ 型行列 $A$ と $(n,p)$ 型行列 $B$ が区分けで $A=(A_{ij})$ $(1\le i\le r,\ 1\le j\le s)$，$B=(B_{ij})$ $(1\le i\le s,\ 1\le j\le t)$ と表されていて，$A_{ij}$ は $(m_i,n_j)$ 型，$B_{ij}$ は $(n_i,p_j)$ 型とする．このとき，

$$AB=(C_{ij}) \quad (1\le i\le r,\ 1\le j\le t), \qquad C_{ij}=\sum_{k=1}^{s}A_{ik}B_{kj}. \tag{31}$$

$(\because)$ (30) の例で考えてみる．$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ とし，$AB$ の $(i,j)$ 成分 $c_{ij}$ に着目する．簡単のため，$A$ の $i$ 行は一番上の区分けの中にあり，$B$ の $j$ 列は一番左の区分けの中にあるとする．積の定義より (9) がなりたつが，それは，

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{n_1}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=n_1+n_2+1}^{n}a_{ik}b_{kj} \tag{32}$$

のように分解される．ところが，右辺の各々の和は $A_{11}B_{11}$，$A_{12}B_{21}$，$A_{13}B_{31}$ の $(i,j)$ 成分となっている．すなわち，

$$(AB \text{ の } (i,j) \text{ 成分})=(A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}+A_{13}B_{31} \text{ の } (i,j) \text{ 成分}) \tag{33}$$

となっているのである．$(i,j)$ が他の部分に属するときも同様． (q.e.d.)

(ex6) 区分けを利用して，次の計算をせよ．

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{34}$$

(ans)

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)
\left(\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)
= \left( \begin{array}{c}
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
\end{array} \right)
$$

$$
= \left( \begin{array}{c}
\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 9 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}
\end{array} \right)
= \begin{pmatrix} 9 & 4 & 2 & 17 \\ 6 & 2 & 6 & 14 \\ 3 & 6 & 4 & 9 \\ 7 & 5 & 3 & 16 \end{pmatrix}. \tag{35}
$$

$n$ 次行列の区分けで，区分けの縦の比率が区分けの横の比率に一致するものを，対称区分けという．言い換えると，区分け

$$
\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2t} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ A_{t1} & A_{t2} & \dots & A_{tt} \end{pmatrix} \tag{36}
$$

において，$A_{11}, A_{22}, \dots, A_{tt}$ がすべて正方行列であるとき，その区分けを対称区分けという．いくらかの $n$ 次行列に対して同じ対称区分けをしておくと，それらの和，積をその区分けのままで繰り返し行える．

対称区分けされた行列 (36) であって，$i \neq j \Rightarrow A_{ij} = O$ をみたすものをブロック対角行列という.[2] 同じ区分けをしたブロック対角行列に対して，

$$
\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_t \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} B_1 & & & O \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & B_t \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} A_1B_1 & & & O \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_tB_t \end{pmatrix} \tag{37}
$$

がなりたつ．したがって，自然数 $s$ に対して，

$$
\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_t \end{pmatrix}^s
= \begin{pmatrix} A_1^s & & & O \\ & A_2^s & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_t^s \end{pmatrix} \tag{38}
$$

がなりたつ. (⇒ - 5 -)

- 5 -（逆行列）$n$ 次行列 $A$ に対し，次をみたすような $n$ 次行列 $X$ を $A$ の $\boxed{\text{逆行列}}$ といい，$A^{-1}$ で表す．

$$
AX = XA = E_n \tag{39}
$$

この定義からわかるように，$X = A^{-1}$ であると同時に，$A = X^{-1}$ である．すなわち，$A, X$ は互いに他の逆行列となる．ゆえに $A = (A^{-1})^{-1}$ がなりたつ．しかしながら，逆行列は存在しないこともある．$A$ の逆行列が存在するとき，$A$ は $\boxed{\text{正則}}$ であるという．$A$ の逆行列は，存在するとしてもただ 1 つだけである．なぜならば，$X, Y$ を $A$ の逆行列とすると，

$$
Y = E_nY = (XA)Y = X(AY) = XE_n = X \tag{40}
$$

[2]対称区分けされた行列 (36) が，$i > j \Rightarrow A_{ij} = O$ をみたせばブロック上三角行列，$i < j \Rightarrow A_{ij} = O$ をみたせばブロック下三角行列という．ブロック上または下三角であれば，ブロック三角行列という．

となるから．また $A, B$ が正則な $n$ 次行列ならば，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ である．実際

$$
\begin{aligned}
(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AE_nA^{-1} = AA^{-1} = E_n \\
(B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}E_nB = B^{-1}B = E_n.
\end{aligned} \tag{41}
$$

同様にして，$A_1, A_2, \ldots, A_s$ が正則な $n$ 次行列ならば，

$$(A_1A_2\ldots A_s)^{-1} = A_s^{-1}\ldots A_2^{-1}A_1^{-1} \tag{42}$$

が示される．ゆえに $\boxed{\text{正則ないくらかの行列の積はまた正則である}}$．

逆行列を一般的に表示する公式については，後に学ぶことにする．ここでは，簡単な区分けで表された行列の逆行列を考える．$A, C, A_1, A_2, \ldots, A_t$ がすべて正則な正方行列（次数は違ってもよい）とするとき，

$$
\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} A & O \\ B & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} A & O \\ O & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_t \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_t^{-1} \end{pmatrix}. \tag{43}
$$

(ex7) (1) 区分けを用いてこれらを示せ．(2) 正則な 2 次行列の逆行列が $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ $(ad - bc \neq 0)$ で与えられることを示せ．

$n$ 次行列 $A$ の $s$ 個の積を $A^s$ とかき，$A$ の $s$ 乗という．これについて，次の指数法則がなりたつ．$r, s$ を自然数とするとき，

$$A^rA^s = A^{r+s}, \qquad (A^r)^s = A^{rs}. \tag{44}$$

一般に $A^0 = E_n$ とし，特に $A$ が正則なとき，$A^{-s} = (A^{-1})^s$ と定義すると，任意の整数 $r, s$ に対して，(44) がなりたつ．$AB = BA$ がなりたつときは，$(AB)^s = A^sB^s$ がなりたつ．[3]

正則な行列に関する次の定理は有用である．

(T3) $A, B$ を $n$ 次行列とする．このとき，$AB = E_n$ ならば $BA = E_n$ であり，したがって $A, B$ は正則で一方は他方の逆行列になる．

(∵) - 11 - 参照．なお，簡単な証明問題においては，この定理は敢えて使わないこととする．

- 6 -（トレース）$A = (a_{ij})$ を $n$ 次行列とする．$A$ のすべての対角成分の総和を $A$ のトレースといい，$\mathrm{tr}A$ で表す．すなわち，

$$\mathrm{tr}A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}. \tag{45}$$

$B = (b_{ij})$ をもう 1 つの $n$ 次行列とするとき，次がなりたつ．

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B \\
&\mathrm{tr}(kA) = k\,\mathrm{tr}A \\
&\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) \\
&\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}({}^tA)
\end{aligned} \tag{46}
$$

[3] $AB = BA$ ならば，非負整数 $s$ に対して $(A+B)^s = \sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}A^{s-k}B^k$（2 項定理）などもなりたつ．

(ex8) (1) これらを示せ． (2) $P$ を正則な $n$ 次行列とするとき，$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}A$ を示せ．

($\because$) (1) (46) 第 3 式を示す．

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = \mathrm{tr}(BA) \tag{47}$$

トレースは，のちに学ぶように行列の固有値の（重複度を込めた）総和に等しい．（$\Rightarrow$ 12 章）

- 7 -（行列の基本変形）行列の理論の中でも大変重要なのが基本変形の概念である．まず 3 種の基本行列を導入する．

$$\begin{array}{lll} P_n(i,j) & = \begin{array}{l} E_n \text{ の } i \text{ 行と } j \text{ 行（あるいは } i \text{ 列と } j \text{ 列）} \\ \text{を入れ替えた行列} \end{array} & (i \neq j) \\ Q_n(i,c) & = E_n \text{ の } (i,i) \text{ 成分を } c \text{ にした行列} & (c \neq 0) \\ R_n(i,j;c) & = E_n \text{ の } (i,j) \text{ 成分を } c \text{ にした行列} & (i \neq j) \end{array} \tag{48}$$

$$P_n(i,j) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccccc} &&&i)&&&&j)&&&\end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i) \\ \\ \\ \\ j) \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots && \vdots &&&& \vdots &&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ & \cdots && 0 && \cdots && 1 && \cdots & \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ & \cdots && 1 && \cdots && 0 && \cdots & \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&& \vdots &&&& \vdots && \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$Q_n(i,c) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} &&&i)&&& \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i) \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 &&&&&& O \\ & \ddots && \vdots &&& \\ && 1 &&&& \\ & \cdots && c && \cdots & \\ &&&& 1 && \\ &&& \vdots && \ddots & \\ O &&&&&& 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{49}$$

$$R_n(i,j;c) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} &&&j)& \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i) \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & \ddots && \vdots & \\ & \cdots && c & \\ &&& \ddots & \\ &&&& 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

このように，基本行列はすべて単位行列を少し変形したものになっている．

以下に３次の基本行列の例をあげる．

$$P_3(1,2)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad Q_3(1,5)=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$
$$R_3(2,3;-4)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}\tag{50}$$

次に $(m,n)$ 型行列 $A$ に基本行列を左から掛けたとき，どのようになるか見てみる．

$$\begin{array}{lll}P_m(i,j)A & \longrightarrow A \text{ の } i \text{ 行と } j \text{ 行を入れ替える} & (i\neq j)\\ Q_m(i,c)A & \longrightarrow A \text{ の } i \text{ 行を } c \text{ 倍する} & (c\neq 0)\\ R_m(i,j;c)A & \longrightarrow A \text{ の } i \text{ 行に } j \text{ 行の } c \text{ 倍を加える} & (i\neq j)\end{array}\tag{51}$$

同様に，右から掛けたときは，

$$\begin{array}{lll}AP_n(i,j) & \longrightarrow A \text{ の } i \text{ 列と } j \text{ 列を入れ替える} & (i\neq j)\\ AQ_n(i,c) & \longrightarrow A \text{ の } i \text{ 列を } c \text{ 倍する} & (c\neq 0)\\ AR_n(i,j;c) & \longrightarrow A \text{ の } j \text{ 列に } i \text{ 列の } c \text{ 倍を加える} & (i\neq j)\end{array}\tag{52}$$

(51) の３種の変形を行に関する基本変形（行変形）あるいは左基本変形といい，(52) の３種の変形を列に関する基本変形（列変形）あるいは右基本変形という．これらを総称して $\boxed{\text{基本変形}}$ という．基本変形は今後あらゆる場面で必要になる大切な概念である．ある行列 $A$ に基本変形を行って行列 $B$ が得られることを，記号で

$$A\longrightarrow B \qquad (\text{または } B\longleftarrow A)\tag{53}$$

のように表す．

３次行列の基本変形の例を以下に示す．ここで，ⓘ は $i$ 行，$\boxed{j}$ は $j$ 列を示す．

$$\begin{array}{ll}
P_3(2,3)A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\7&8&9\\4&5&6\end{pmatrix} & ②\leftrightarrow③\\
AP_3(1,3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&1\\6&5&4\\9&8&7\end{pmatrix} & \boxed{1}\leftrightarrow\boxed{3}\\
Q_3(2,c)A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&c&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4c&5c&6c\\7&8&9\end{pmatrix} & c\,②\\
AQ_3(3,c)=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3c\\4&5&6c\\7&8&9c\end{pmatrix} & c\boxed{3}\\
R_3(1,3;c)A=\begin{pmatrix}1&0&c\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+7c&2+8c&3+9c\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} & ①+c\,③\\
AR_3(3,2;c)=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&c&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2+3c&3\\4&5+6c&6\\7&8+9c&9\end{pmatrix} & \boxed{2}+c\boxed{3}
\end{array}\tag{54}$$

(ex9) 区分けを用いて (51),(52) を示せ．

- 8 -（基本行列の正則性）基本行列はすべて正則であり，その逆行列もまた基本行列である．そのことは，次の式が示している．

$$
\begin{aligned}
&P_n(i,j)P_n(i,j)=E_n. \qquad\qquad \therefore\ (P_n(i,j))^{-1}=P_n(i,j).\\
&Q_n(i,c)Q_n(i,c^{-1})=Q_n(i,c^{-1})Q_n(i,c)=E_n.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \therefore\ (Q_n(i,c))^{-1}=Q_n(i,c^{-1}).\\
&R_n(i,j;c)R_n(i,j;-c)=R_n(i,j;-c)R_n(i,j;c)=E_n.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \therefore\ (R_n(i,j;c))^{-1}=R_n(i,j;-c).
\end{aligned} \tag{55}
$$

これらは実際に計算して示せるが，このようにも考えられる．$P_n(i,j)P_n(i,j)A$ は，まず $A$ の $i$ 行と $j$ 行を入れ替えもう一度 $i$ 行と $j$ 行を入れ替えることになるので，元に戻る．

$$\therefore\ P_n(i,j)P_n(i,j)A=A. \qquad \therefore\ P_n(i,j)P_n(i,j)=E_n. \tag{56}$$

$Q_n(i,c^{-1})Q_n(i,c)A$ は $A$ の $i$ 行を $c$ 倍して $c^{-1}$ 倍するので元に戻る．

$R_n(i,j;-c)R_n(i,j;c)A$ は $A$ の $i$ 行に $j$ 行の $c$ 倍を加え，さらに $j$ 行の $c$ 倍を引いているので元に戻る．ゆえに (55) が示せる．

基本行列の逆行列は基本行列なので，基本変形に対してその逆変形:

$$A \;\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{}}\; PA \ \ (\text{上: } P\times,\ \text{下: } P^{-1}\times), \qquad A \;\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{}}\; AQ \ \ (\text{上: } \times Q,\ \text{下: } \times Q^{-1}) \tag{57}$$

もまた基本変形であることがわかる．このことを，基本変形は可逆な操作であると言い表す．特に，行変形の逆変形は行変形，列変形の逆変形は列変形である．

2 つの操作の順序を変えても同じ結果を得るとき，これらの操作は可換であるという．一般に，行変形同士，または列変形同士は可換でないが，次に示すように，行変形と列変形は可換な操作である．

$$A \xrightarrow{P\times} PA \xrightarrow{\times Q} PAQ; \qquad A \xrightarrow{\times Q} AQ \xrightarrow{P\times} PAQ \tag{58}$$

(note) 2 つの行の入れ替えを繰り返すことで，行の順序を自由に並べ替えることができる．これは列についても同様である．すなわち，基本変形で行や列の順序を自由に操作できることがわかる．

- 9 -（行列の階数）基本変形を用いて，行列の階数が定義される．$A$ を $(m,n)$ 型行列とする．行列の標準形 $F_{mn}(r)$ を

$$F_{mn}(r)=\begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r}\\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r}\end{pmatrix} \tag{59}$$

で定義する．これは左上から $r$ 個の対角成分が 1 で残りはすべて 0 の $(m,n)$ 型行列である．ここで $A$ に基本変形を繰り返し行って，

$$A\longrightarrow\cdots\longrightarrow F_{mn}(r) \tag{60}$$

のように標準形 $F_{mn}(r)$ にできたとき，$r$ を $A$ の $\boxed{\text{階数}}$ または $\boxed{\text{ランク}}$ と言って $r(A)$ で表す．任意の行列は必ずいずれかの標準形にすることができる．なお，$F_{mn}(r)$ は $m,n,r$ の値によっては

$$
\begin{aligned}
&F_{mn}(m)=\begin{pmatrix} E_m & O_{m,n-m}\end{pmatrix} \qquad && F_{mn}(n)=\begin{pmatrix} E_n\\ O_{m-n,n}\end{pmatrix}\\
&F_{nn}(n)=E_n && F_{mn}(0)=O_{mn}
\end{aligned} \tag{61}
$$

のように形が異なってくるので注意を要する．

基本変形を繰り返して行列を標準形に変形する典型的なアルゴリズムを以下に示す．

0: 与えられた行列が $O_{mn}$ のときは，すでに標準形 $F_{mn}(0)$ である．

1: 与えられた $A$ の $(1,1)$ 成分が 1 かどうかをみて，これが 1 でなければ，基本変形で $(1,1)$ 成分を 1 にする．

2: 他の行から 1 行のスカラー倍を引くことで，$(1,1)$ 成分の下にある成分をすべて 0 にする．すると，$A$ の 1 列が基本ベクトル $\mathsf{e}_1$ となる．次に他の列から 1 列のスカラー倍を引くことで，$(1,1)$ 成分の右にある成分をすべて 0 にできる．このような操作を掃き出しという.（この場合 1 列と 1 行の掃き出し）

3: $(2,2)$ 成分が 1 かどうか見て，1 でなければ 2 行以降または 2 列以降の基本変形で $(2,2)$ 成分を 1 とする．

4: 3 行以降から 2 行のスカラー倍を引くことで，$(2,2)$ 成分の下にある成分をすべて 0 にする．すると，$A$ の 2 列が基本ベクトル $\mathsf{e}_2$ となる．次に 3 列以降から 2 列のスカラー倍を引くことで，$(2,2)$ 成分の右にある成分をすべて 0 にできる．これで 2 列と 2 行の掃き出しが終わった．

5: 同様な手順で掃き出しを続けると，標準形に達する．

標準形にする方法は決して一通りではない．また変形の途中で分数や大きい数を出してしまうと計算が大変になるので，そうした事態はなるべく避けるほうが賢明である.（避けられない場合もある） 次に標準形に変形して階数を求める方法を具体例で示す．

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -4 \\ 5 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & -5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 \\ 5 & 2 & -1 & -3 \\ 4 & -5 & -5 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 5 & -3 \\ -5 & -5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 7 & -7 \\ 0 & 10 & 14 & -14 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & -7 \\ 0 & 10 & 14 & -14 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -7 \\ 0 & 2 & 14 & -14 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F_{34}(2). \qquad \therefore\ r(A) = 2. \end{aligned} \tag{62}$$

ここで，階数を求めるときのよりどころとなっている定理をあげておく．

(T4) 行列 $A$ の階数は基本変形のやり方によらず $A$ のみで決まる．

($\because$) 基本変形の繰り返しにより，$(m,n)$ 型行列 $A$ が $F_{mn}(r)$，$F_{mn}(s)$ $(r \leq s)$ の 2 つの標準形に移ったとする．

$$\begin{aligned} A \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_{mn}(r) \\ A \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_{mn}(s) \end{aligned} \tag{63}$$

ここで，基本変形は可逆な操作なので，$F_{mn}(r)$ から始めて次の基本変形が得られる．

$$F_{mn}(r) \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_{mn}(s) \tag{64}$$

基本変形は基本行列を左または右から掛けることで得られる．よって，$P_i$，$Q_i$ を基本行列として，

$$P_k \ldots P_2 P_1 F_{mn}(r) Q_1 Q_2 \ldots Q_l = F_{mn}(s) \tag{65}$$

とかける．$P_k \ldots P_2 P_1 = P$，$Q_1 Q_2 \ldots Q_l = Q$ とおくと，

$$P F_{mn}(r) Q = F_{mn}(s) \tag{66}$$

を得る．そこで，$P, Q$ に対称区分けを行って，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_{11}Q_{11} & P_{11}Q_{12} \\ P_{21}Q_{11} & P_{21}Q_{12} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_s & O \\ O & O \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{67}$$

ここで $r \leq s$ なので，$P_{11}Q_{11} = E_r$．ゆえに (T3) より，$P_{11}, Q_{11}$ は正則となる．すると，$P_{11}Q_{12} = O$ より $Q_{12} = O$．それゆえ $P_{21}Q_{12} = O$ を得る．これは $r = s$ を意味する． (q.e.d.)

- 10 -（階数と正則性）正方行列の正則性はその階数で判定できる．

(T5) $n$ 次行列 $A$ に対して，

$$A \text{が正則} \iff r(A) = n. \tag{68}$$

($\because$) ($\Rightarrow$) 背理法による．$n$ 次行列 $A$ が正則とする．$r(A) = r < n$ と仮定する．このとき $A$ に基本変形を繰り返し行って，

$$A \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_{nn}(r) \tag{69}$$

とできるので，$A$ に基本行列 $P_i, Q_i$ を左右から掛けることで，

$$P_k \ldots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \ldots Q_l = PAQ = F_{nn}(r) \tag{70}$$

が得られる．ここで基本行列の積は正則なので，$P, Q$ は正則．また $A$ も正則なので，積 $PAQ$ も正則になる．そこで $(PAQ)^{-1} = X$ とおくと，

$$E_n = X(PAQ) = XF_{nn}(r) = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & & & \cdots\cdots\cdots & & \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{71}$$

となって，矛盾する． (q.e.d.)

($\Leftarrow$) $n$ 次行列 $A$ が $r(A) = n$ をみたすとすると，上と同様基本変形してまとめれば，正則行列 $P, Q$ により，

$$PAQ = E_n. \qquad \therefore\ A = P^{-1}Q^{-1}. \tag{72}$$

よって $A$ は正則行列の積なので正則である． (q.e.d.)

(72) をもう一度見てみると，$P, Q$ はそもそも基本行列の積であり，その逆行列 $P^{-1}, Q^{-1}$ もまた基本行列の積なので，$A$ が基本行列の積で表された形になっている．すなわち，$r(A) = n$ ならば $A$ は基本行列の積であり，逆に $A$ が基本行列の積ならば $A$ は正則となって (T5) より $r(A) = n$ になる．よって，

$$r(A) = n \iff A \text{ が基本行列の積} \tag{73}$$

が言える．さらに，(72) を少し書き直すと，

$$QPA = E_n, \qquad AQP = E_n \tag{74}$$

となる．左は，$A$ を行変形のみで $E_n$ に移せることを示している．右は列変形のみで $E_n$ に移せることを示している．これらをまとめると次のようになる．

(T5$^+$) $n$ 次行列 $A$ に対して，次の 5 つの条件は同値である．

(i) $A$ が正則である． (ii) $r(A) = n$. (iii) $A$ がいくらかの基本行列の積になる．
(iv) $A$ を行変形のみで $E_n$ に移せる． (v) $A$ を列変形のみで $E_n$ に移せる．

(75)

正則行列が行変形のみで単位行列に移せることを利用して，正則行列の逆行列を求めることができる．$A$ を $n$ 次正則行列とし，$(n, 2n)$ 型行列 $\begin{pmatrix} A & E_n \end{pmatrix}$ を考える．これに行変形を繰り返して $\begin{pmatrix} E_n & B \end{pmatrix}$ とできたとき，$B = A^{-1}$ となる．なぜならば，行変形は基本行列を左から掛けることに対応するので，

$$
\begin{aligned}
&P_k \dots P_2 P_1 \begin{pmatrix} A & E_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} A & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & B \end{pmatrix}. \\
&\therefore\ PA = E_n. \qquad \therefore\ P = A^{-1} = B.
\end{aligned} \tag{76}
$$

(ex10) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(ans)

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix} = &\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \\
&\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \\
&\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 5 \end{pmatrix}. \\
\therefore \quad A^{-1} = &\begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -6 & 4 & 5 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{77}
$$

(note) $A$ の逆行列を求めるには，$\begin{pmatrix} A \\ E_n \end{pmatrix}$ を列変形して $\begin{pmatrix} E_n \\ B \end{pmatrix}$ を作ってもよい．このとき $B = A^{-1}$ である．（なぜか？）

- 11 - （(T1), (T3) の証明）この節では - 3 - (T1) および - 5 - (T3) の証明を述べることにする．

(T1) ($\because$) ($\Rightarrow$) (23) より明らか．

($\Leftarrow$) $n$ 次行列 $F$ が，任意の $n$ 次行列 $X$ に対して，$FX = XF$ をみたすとする．ここで $(i, j)$ を 1 組選び固定し，$X$ として $(i, j)$ 成分だけが 1 で，それ以外は 0 の $n$ 次行列を取る．$F = (f_{ij})$ とすると，

$$FX = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \phantom{0} & \phantom{\dots} & \phantom{0} & j) & \phantom{0} & \phantom{\dots} & \phantom{0} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & f_{1i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & f_{2i} & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & \dots & 0 & f_{ni} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{r} \\ \\ \\ i) \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ f_{j1} & f_{j2} & \dots & f_{j,n-1} & f_{jn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = XF. \quad (78)$$

これより，両辺の $(i,j)$ 成分以外はすべて $0$ となる．ゆえに，

$$\begin{aligned} f_{1i} = f_{2i} = \cdots = f_{i-1,i} = f_{i+1,i} = f_{i+2,i} = \cdots = f_{ni} = 0 \\ f_{j1} = f_{j2} = \cdots = f_{j,j-1} = f_{j,j+1} = f_{j,j+2} = \cdots = f_{jn} = 0. \end{aligned} \quad (79)$$

$(i,j)$ 成分を比較すると，

$$f_{ii} = f_{jj}. \quad (80)$$

$(i,j)$ をいろいろな値にすれば，対角成分以外は $0$ で，対角成分がすべて等しくなることがわかる．ゆえに $F$ はスカラー行列となる． (q.e.d.)

(T3) ($\because$) $n$ に関する帰納法による．$n=1$ では明らかに (T3) がなりたつ．ここで $n-1$ でなりたつと仮定する．今，$n$ 次行列 $A, B$ が $AB = E_n$ をみたすとする．このとき，$A$ に基本変形を繰り返して次のようにできることは明らかである．

$$A \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathsf{0} \\ \mathsf{0} & A_1 \end{pmatrix} \quad (81)$$

ここに，$A_1$ はある $n-1$ 次行列である．これより，適当な基本行列の積を $P, Q$ とおけば，$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathsf{0} \\ \mathsf{0} & A_1 \end{pmatrix}$ を得る．ここで $AB = E_n$ なので，

$$(PAQ)(Q^{-1}BP^{-1}) = P(AQQ^{-1}B)P^{-1} = P(AB)P^{-1} = PE_nP^{-1} = E_n. \quad (82)$$

すなわち，$Q^{-1}BP^{-1} = R$ とおけば，$(PAQ)R = E_n$ を得る．これを区分けを用いて表示すれば，

$$\begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathsf{0} \\ \mathsf{0} & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathsf{0} \\ \mathsf{0} & E_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (83)$$

したがって，$A_1R_{22} = E_{n-1}$ を得る．よって，帰納法の仮定より $A_1$ は正則となり，$R_{22} = A_1^{-1}$．ゆえに，

$$\begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathsf{0} \\ \mathsf{0} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathsf{0} \\ \mathsf{0} & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathsf{0} \\ \mathsf{0} & E_{n-1} \end{pmatrix} = E_n. \quad (84)$$

すなわち，$\begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathsf{0} \\ \mathsf{0} & R_{22} \end{pmatrix} = \tilde{R}$ とおけば $\tilde{R}(PAQ) = E_n$．

$$\therefore\ Q\tilde{R}(PAQ)Q^{-1} = E_n. \qquad \therefore\ (Q\tilde{R}P)A = E_n. \quad (85)$$

こうして，$B'A = E_n$ をみたす行列 $B'$ が存在する．このとき，

$$B = E_nB = (B'A)B = B'(AB) = B'E_n = B' \quad (86)$$

なので，結局 $BA = E_n$ が得られた．これで帰納法が完成した． (q.e.d.)

- 12 -（ベクトルの内積）複素数 $z=x+yi$ に対して，$\overline{z}=x-yi$ を $z$ の共役複素数という．$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ を $z$ の絶対値という．$w$ をもう 1 つの複素数とするとき，次がなりたつ．

$$\begin{gathered}\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w} \qquad \overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w} \\ |z+w|\le|z|+|w| \qquad |zw|=|z|\cdot|w| \\ z\,\overline{z}=|z|^2\end{gathered} \tag{87}$$

一般に複素行列 $A=(a_{ij})$ に対して，その成分をすべて共役複素数に替えたものを $\overline{A}$ で表す．すなわち，

$$\overline{A}=(\overline{a_{ij}}). \tag{88}$$

空間ベクトルと同様に，$n$ 項列ベクトルに対しても，内積を定義できる．2 つの $n$ 項複素列ベクトル $\mathtt{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$，$\mathtt{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ に対して，

$$(\mathtt{x},\mathtt{y})={}^t\mathtt{x}\overline{\mathtt{y}}=x_1\overline{y_1}+\cdots+x_n\overline{y_n} \tag{89}$$

によって，内積を定義する．特に実ベクトルの場合には，

$$(\mathtt{x},\mathtt{y})={}^t\mathtt{x}\mathtt{y}=x_1y_1+\cdots+x_ny_n \tag{90}$$

となる．実ベクトルの内積と区別するために，複素ベクトルの内積をエルミート積ということもある．

$c$ を複素数とするとき，内積は以下の法則をみたす．

$$\begin{gathered}(\mathtt{x},\mathtt{y})=\overline{(\mathtt{y},\mathtt{x})} \\ (\mathtt{x},\mathtt{y}+\mathtt{z})=(\mathtt{x},\mathtt{y})+(\mathtt{x},\mathtt{z}) \qquad (\mathtt{x}+\mathtt{y},\mathtt{z})=(\mathtt{x},\mathtt{z})+(\mathtt{y},\mathtt{z}) \\ (c\mathtt{x},\mathtt{y})=c(\mathtt{x},\mathtt{y}) \qquad (\mathtt{x},c\mathtt{y})=\overline{c}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \\ (\mathtt{x},\mathtt{x})\ge 0 \quad \text{であり，} \quad (\mathtt{x},\mathtt{x})=0 \iff \mathtt{x}=\mathtt{0}\end{gathered} \tag{91}$$

内積が持つ (91) 第 1–3 行の性質を共役線形性という．第 4 行の性質を正値性という．正値性より，$\sqrt{(\mathtt{x},\mathtt{x})}$ は非負実数になる．そこで，

$$\sqrt{(\mathtt{x},\mathtt{x})}=||\mathtt{x}|| \tag{92}$$

とかき，これを $\mathtt{x}$ の大きさまたはノルムという．次がなりたつ．

$$\begin{aligned}&||c\mathtt{x}||=|c|\cdot||\mathtt{x}|| \\ &|(\mathtt{x},\mathtt{y})|\le||\mathtt{x}||\cdot||\mathtt{y}|| \quad \text{（シュワルツの不等式）} \\ &||\mathtt{x}+\mathtt{y}||\le||\mathtt{x}||+||\mathtt{y}|| \quad \text{（3 角不等式）}\end{aligned} \tag{93}$$

2 つのベクトル $\mathtt{x}$，$\mathtt{y}$ が $(\mathtt{x},\mathtt{y})=0$ をみたすとき，$\mathtt{x}$ と $\mathtt{y}$ は直交するという．また，$\mathtt{x}=c\mathtt{y}$ または $\mathtt{y}=c\mathtt{x}$ をみたすスカラー $c$ が存在するとき，$\mathtt{x}$ と $\mathtt{y}$ は平行であるという．

大きさが 1 のベクトルを単位ベクトルという．$\mathtt{x}$ に対して，$\pm||\mathtt{x}||^{-1}\mathtt{x}$ は $\mathtt{x}$ と平行な単位ベクトルである．複素ベクトルの場合は，絶対値が 1 の複素数 $\omega$ に対して，$\omega||\mathtt{x}||^{-1}\mathtt{x}$ はすべて $\mathtt{x}$ と平行な単位ベクトルになる．

(ex11) (1) (91)，(93) を示せ． (2) $\begin{pmatrix}2\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\2\\1\\3\end{pmatrix}$ のすべてと直交するような実単位ベクトルを求めよ．

(ans) (1) (93) 第 2–3 式を示す．

($\because$)（シュワルツの不等式）$\mathtt{y}=\mathtt{0}$ のときは両辺とも 0 になるので，$\mathtt{y}\neq\mathtt{0}$ と仮定する．

$$\begin{aligned} 0 &\leq ||\,||\mathrm{y}||^2\mathrm{x}-(\mathrm{x},\mathrm{y})\mathrm{y}||^2 \\ &= ||\mathrm{y}||^4||\mathrm{x}||^2-||\mathrm{y}||^2\overline{(\mathrm{x},\mathrm{y})}(\mathrm{x},\mathrm{y})-(\mathrm{x},\mathrm{y})||\mathrm{y}||^2(\mathrm{y},\mathrm{x})+(\mathrm{x},\mathrm{y})\overline{(\mathrm{x},\mathrm{y})}||\mathrm{y}||^2 \\ &= ||\mathrm{y}||^2(||\mathrm{x}||^2||\mathrm{y}||^2-|(\mathrm{x},\mathrm{y})|^2) \\ \therefore\ & |(\mathrm{x},\mathrm{y})|\leq||\mathrm{x}||\cdot||\mathrm{y}|| \qquad \text{(q.e.d.)} \end{aligned} \tag{94}$$

($\because$)（3 角不等式）右辺の 2 乗 $-$ 左辺の 2 乗 $\geq 0$ を言えばよい．

$$\begin{aligned} &(||\mathrm{x}||+||\mathrm{y}||)^2-||\mathrm{x}+\mathrm{y}||^2 \\ &= ||\mathrm{x}||^2+2||\mathrm{x}||\cdot||\mathrm{y}||+||\mathrm{y}||^2-||\mathrm{x}||^2-(\mathrm{x},\mathrm{y})-(\mathrm{y},\mathrm{x})-||\mathrm{y}||^2 \\ &= 2||\mathrm{x}||\cdot||\mathrm{y}||-(\mathrm{x},\mathrm{y})-\overline{(\mathrm{x},\mathrm{y})} \\ &\geq 2||\mathrm{x}||\cdot||\mathrm{y}||-2|(\mathrm{x},\mathrm{y})|\geq 0 \qquad \text{（シュワルツより）} \qquad \text{(q.e.d.)} \end{aligned} \tag{95}$$

(2) 答のみ示す: $\pm\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- 13 -（いろいろな行列）一般に $(m,n)$ 型複素行列 $A$ に対して，$(n,m)$ 型複素行列 $\overline{{}^tA}$ を $A^*$ とかき，$A$ の随伴行列と呼ぶ．転置行列および随伴行列について，次がなりたつ．ただし，最後の行では $A$ は正則とする．

$$\begin{gathered} {}^t({}^tA)=A \qquad {}^t(A+B)={}^tA+{}^tB \qquad {}^t(AB)={}^tB\,{}^tA \\ (A^*)^*=A \qquad (A+B)^*=A^*+B^* \qquad (AB)^*=B^*A^* \\ {}^t(kA)=k\,{}^tA \qquad (kA)^*=\overline{k}A^* \\ ({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1}) \qquad (A^*)^{-1}=(A^{-1})^* \end{gathered} \tag{96}$$

(ex12) (1) これらを示せ.（第 4 行より，$A$ が正則 $\Longleftrightarrow$ ${}^tA$ が正則 $\Longleftrightarrow$ $A^*$が正則 が従う.） (2) $r(A)=r({}^tA)=r(A^*)$ を示せ.

$A$ を $n$ 次行列とする．特定の条件をみたす $A$ に対して，以下のようにその呼び名が与えられる．対称行列や交代行列の前の “複素” や “実” は紛れのないときは省略される．

| 条件 | 複素行列 or 実行列 | 呼び名 |
|---|---|---|
| $AA^*=A^*A$ | 複素行列 | 正規行列 |
| $A^*=A$ | 複素行列 | エルミート行列 |
| $A^*=-A$ | 複素行列 | 歪エルミート行列 |
| ${}^tA=A$ | 複素行列 | 複素対称行列 |
| ${}^tA=A$ | 実行列 | 実対称行列 |
| ${}^tA=-A$ | 複素行列 | 複素交代行列 |
| ${}^tA=-A$ | 実行列 | 実交代行列 |
| $AA^*=A^*A=E$ | 複素行列 | ユニタリ行列 |
| $A\,{}^tA={}^tAA=E$ | 実行列 | 直交行列 |
| $i>j\Rightarrow a_{ij}=0$ | 複素行列 | 上三角行列 |
| $i<j\Rightarrow a_{ij}=0$ | 複素行列 | 下三角行列 |

(ex13) (1) エルミート行列の対角成分は実数であることを示せ． (2) 交代行列の対角成分は 0 であることを示せ． (3) エルミート行列，歪エルミート行列，ユニタリ行列，および実交代行列は正規行列であることを示せ． (4) 次を示せ．

$$A \text{ がエルミート行列} \Longleftrightarrow iA \text{ が歪エルミート行列} \tag{97}$$

(5) $n$ 次の上三角行列同士の積は，上三角行列になることを示せ．$n$ 次の下三角行列同士の積は，下三角行列になることを示せ．

# 6章　1次方程式系の解法

☆☆☆

キーワード: 1次方程式系，一般解，斉次1次方程式系，行変形，列交換

- 1 -（1次方程式系）$x_1,\dots,x_n$ を変数とする1次方程式系は一般に次の形で表される．

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & c_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & c_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}\right. \tag{1}$$

これを解くことを考えよう．ここで

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad \mathsf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \mathsf{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

とおき，これらをそれぞれ係数行列，変数ベクトル，定数ベクトルと呼ぶ．このとき (1) は簡潔に，

$$A\mathsf{x}=\mathsf{c} \tag{3}$$

とかけるので，これを解けばよいことになる．まず (3) に対して，両辺に左から正則な行列 $P$ を掛けることで，

$$PA\mathsf{x}=P\mathsf{c} \tag{4}$$

に変形できる．ところがこれは，$P$ の逆行列 $P^{-1}$ を左から掛けることで (3) に戻ることがわかるので，(3),(4) は同値な方程式系といえる．すなわち，

$$A\mathsf{x}=\mathsf{c}\quad \underset{P^{-1}}{\overset{P}{\rightleftarrows}}\quad PA\mathsf{x}=P\mathsf{c}. \tag{5}$$

　そこで，(3) を変形した結果として (4) がなるべく簡単になるようにすればよい．そのために行に関する基本変形（行変形）を利用する．正則行列 $P$ は，基本行列の積で，$P=P_1P_2\dots P_s$ と表される．ゆえに，左から $P$ を掛けることは行変形を繰り返し行うことと同値になる．そこで，拡大係数行列 $\tilde{A}=\begin{pmatrix} A & \mathsf{c} \end{pmatrix}$ を考え，これに行変形を繰り返し行うと，

$$\begin{pmatrix} A & \mathsf{c} \end{pmatrix}\quad \underset{P^{-1}}{\overset{P}{\begin{array}{c}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\\ \longleftarrow\cdots\longleftarrow\end{array}}}\quad \begin{pmatrix} PA & P\mathsf{c} \end{pmatrix} \tag{6}$$

のように $\begin{pmatrix} PA & P\mathsf{c} \end{pmatrix}$ が得られる．（逆に戻ることもできる）すなわち，$\tilde{A}$ を行変形することで，方程式系 (4) を得ることができる．

今，(4) を解くのに有利なように $\begin{pmatrix} PA & P\mathtt{c} \end{pmatrix}$ を次のような形にできたとする．

$$\begin{pmatrix} PA & P\mathtt{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & B & \mathtt{d}_1 \\ & O & \mathtt{d}_2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

このとき，(4) は次の形になる．

$$\begin{pmatrix} E_r & B \\ & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathtt{d}_1 \\ \mathtt{d}_2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

区分けによる計算を行うと，

$$\begin{pmatrix} E_r \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \\ \mathtt{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathtt{d}_1 \\ \\ \mathtt{d}_2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

この式の下半分より，(3) が解を持つための必要条件 $\mathtt{d}_2 = \mathtt{0}$ を得る．$\mathtt{d}_2 \neq \mathtt{0}$ ならば，(3) は解を持たないことになる．

そこで $\mathtt{d}_2 = \mathtt{0}$ を仮定して，(9) の上半分を考えると，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \mathtt{d}_1 - B \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{10}$$

を得る．これを解くために，任意の数 $\alpha_i$ $(i = 1, \ldots, n-r)$ を取り，

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix} \tag{11}$$

とおいてみると，(10) より，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \mathtt{d}_1 - B \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix} = \mathtt{d}_1 - \begin{pmatrix} \mathtt{b}_1 & \mathtt{b}_2 & \ldots & \mathtt{b}_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix} \tag{12}$$

を得る．ここで，$B = \begin{pmatrix} \mathtt{b}_1 & \mathtt{b}_2 & \ldots & \mathtt{b}_{n-r} \end{pmatrix}$ とおいた．これより，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \mathtt{d}_1 - \alpha_1 \mathtt{b}_1 - \alpha_2 \mathtt{b}_2 - \cdots - \alpha_{n-r} \mathtt{b}_{n-r}. \tag{13}$$

これで (9) が解けたことになる．(9) は (3) と同値だったので，結局 (3) が解けたことになる．

ここで，$\mathtt{d}_2 = \mathtt{0}$ の仮定のもとで，実際に (3) が解けたことに注目すると，実は $\boxed{\mathtt{d}_2 = \mathtt{0}}$ は (3) が解を持つための必要十分条件であることがわかる．さらに (7) を見ると，

$$\mathtt{d}_2 = \mathtt{0} \iff r(A) = r\left(\widetilde{A}\right) \tag{14}$$

となるので，(3) が解を持つためには $\boxed{r(A) = r\left(\widetilde{A}\right)}$ が必要十分となる．(11),(13) をまとめると，以下の公式を得る．

(T1) $A$ を $(m, n)$ 型行列，$r(A) = r\left(\widetilde{A}\right) = r$ とするとき，(3) の一般解（すべての解を表示した式）は次で与えられる．

$$\mathtt{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathtt{d}_1 \\ \mathtt{0} \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} -\mathtt{b}_1 \\ \mathtt{e}_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -\mathtt{b}_2 \\ \mathtt{e}_2 \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_{n-r} \begin{pmatrix} -\mathtt{b}_{n-r} \\ \mathtt{e}_{n-r} \end{pmatrix} \tag{15}$$

ただし，$\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}$ は任意定数．

一般解 (15) に含まれる $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}$ を（この解の）パラメータという．その数は $n - r =$（変数の数）$- r(A)$ となる．パラメータが 1 つでも含まれれば解は無数に存在し，パラメータが 1 つもなければ解はただ 1 つに決定する．

(note1)（1 次方程式系の方程式の数）$= r(A)$，すなわち $m = r$ のとき，(7) 右辺には $O$ を含む行が存在せず，

$$\begin{pmatrix} E_r & B & \mathtt{d}_1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

の形になる．このときは $\mathtt{d}_2$ がないので解は必ず存在し，それはやはり (15) で表される．

(note2) さらに特殊な場合として，$n = r$ または $m = n = r$ のとき，(7) 右辺において $B$ が存在せず，

$$\begin{pmatrix} E_n & \mathtt{d}_1 \\ O & \mathtt{d}_2 \end{pmatrix} \qquad \text{または} \qquad \begin{pmatrix} E_n & \mathtt{d}_1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

の形となる．左の場合には $\mathtt{d}_2 = \mathtt{0}$ の条件のもとで解があり，右の場合にはつねに解がある．いずれにせよ，その解は $\mathtt{x} = \mathtt{d}_1$ 1 つのみである．なぜならば，(17) は方程式系 $E_n\mathtt{x} = \mathtt{d}_1$，すなわち $\mathtt{x} = \mathtt{d}_1$ に対応するからである．このように解がただ 1 つに決まる場合は一般解 (15) においてパラメータがない場合に相当する．

- 2 -（斉次 1 次方程式系）(1) において定数項 $c_i$ をすべて 0 に変えたものを，((1) に随伴する（対応する））斉次（同次）1 次方程式系と呼ぶ．斉次（同次）でないときは非斉次（非同次）という．さて，斉次 1 次方程式系を行列でかけば，

$$A\mathtt{x} = \mathtt{0} \tag{18}$$

の形になる．このとき $\widetilde{A}$ の右端の列は $\mathtt{0}$ なので行変形しても $\mathtt{0}$ のままで，$\mathtt{d}_1 = \mathtt{0}$，$\mathtt{d}_2 = \mathtt{0}$ となる．ゆえに (18) はつねに解を持ち，その一般解は (15) の右辺から第 1 項を除いた形となる．特に 1 つの解として $\mathtt{x} = \mathtt{0}$ を持つが，これを自明な解という．斉次 1 次方程式系を解く場合は，係数行列 $A$ のみを行変形して $\begin{pmatrix} E_r & B \\ & O \end{pmatrix}$ の形にすれ

ば十分である．ここで $A$ を行変形し，$\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}$ または $E_n$ になる場合は，上の (note2) で見たことから解は $\mathtt{x} = \mathtt{0}$ のみである．それ以外の場合は，自明でない解が存在する．すなわち，

(T2) $A$ を $(m, n)$ 型行列とするとき，

$$r(A) < n \iff \text{(18) は自明でない解を持つ} \tag{19}$$

$m < n$ のときは，(18) はつねに自明でない解を持つ．特に $A$ が $n$ 次行列のとき，

$$A \text{ が正則でない} \iff \text{(18) は自明でない解を持つ} \tag{20}$$

(3) と (18) の解の間には次の関係がある．

(T3) (3) の一般解は (3) の 1 つの解と (18) の一般解の和で表される．

(∵) 実際，(15) 右辺の第 1 項は (3) の 1 つの解になっており，パラメータのついた部分は (18) の一般解を表している．(15) を持ち出さなくても，(3) の 1 つの解を $\mathtt{x}_0$，すなわち $A\mathtt{x}_0 = \mathtt{c}$ とするとき，

$$A\mathtt{y} = \mathtt{0} \iff A(\mathtt{x}_0 + \mathtt{y}) = \mathtt{c} \tag{21}$$

がなりたつことから (T3) が得られる．(q.e.d.)

(ex1) 1 次方程式系 $\begin{cases} 2x & +y & +z & & = & 5 \\ & -2y & -z & +w & = & -5 \\ x & & +2z & -w & = & 3 \end{cases}$ を解け．

(ans) $\widetilde{A}$ を行変形して，

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{7} & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{7} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{7} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{\alpha} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}. \qquad (\alpha = 7\tilde{\alpha}) \tag{22}$$

(ex2) 1次方程式系 $\left\{\begin{array}{lllll} 3x & +y & -4z & +5w & = & 2 \\ 8x & +y & -9z & +15w & = & 12 \end{array}\right.$ を解け．

(ans)

$$\begin{aligned} \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & -9 & 15 & 12 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \\ \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & -6 \\ 3 & 1 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \\ \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & 5 & 20 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \\ \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}. & \\ \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. & \end{aligned} \tag{23}$$

(ex3) 1次方程式系 $\left\{\begin{array}{llllll} & 2y & -z & = & a \\ 3x & +y & +z & = & b \\ 2x & & +z & = & c \end{array}\right.$ が解を持つための必要十分条件を求め，その条件のもとで解け．ただし，解は $a, b$ のみで表すこと．

(ans)

$$\begin{aligned} \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & a \\ 3 & 1 & 1 & b \\ 2 & 0 & 1 & c \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 & b-c \\ 2 & 0 & 1 & c \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & b-c \\ 0 & 2 & -1 & a \\ 2 & 0 & 1 & c \end{pmatrix} \\ \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & b-c \\ 0 & 2 & -1 & a \\ 0 & -2 & 1 & -2b+3c \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & b-c \\ 0 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & a-2b+3c \end{pmatrix} \\ \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & b-c \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a-2b+3c \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{a}{2}+b-c \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a-2b+3c \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{24}$$

これより，解を持つための必要十分条件は $a-2b+3c=0$．このとき，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2}+b-c \\ \frac{a}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{6}+\frac{b}{3} \\ \frac{a}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{\alpha} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

- 3 -（例外と列の並べ替え）以上の方法で大抵の1次方程式系は解けるのだが，たまに行変形だけでは $\widetilde{A}$ を (7) 右辺の形に変形できないことがある．その場合，$\widetilde{A}$ の右端以外の列（すなわち $A$ に当たる部分の列）の順序を並べ替えることで，(7) 右辺に到達できる．ただし，$A$ の列は変数に対応しているので，列の順序の並べ替えを行うときは，変数も同じように並べ替えなければならない．この方法は，行変形のみで変形できるときでも用いてよいが，混乱の元になるのでやみくもに使わないようにする．以下の具体例において理解されたい．

(ex4) 1次方程式系 $\left\{\begin{array}{rrrrcr} 2x & -y & +4z & +3w & = & 5 \\ x & -y & +z & +w & = & 5 \\ & -y & -2z & +3w & = & 1 \end{array}\right.$ を解け.

(ans)

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & w & \phantom{-5} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & w & z & \phantom{-5} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

# 7章　行列式とその応用

☆13☆

キーワード: 行列式，1対1対応，置換，置換の積，符号，互換，
偶置換，奇置換，巡回置換，多重線形性，交代性，基本変形，正則性，
余因子展開，余因子行列，逆行列，クラメルの公式，特殊な行列式

- 1 -（行列式）$n$ 次行列 $A$ に対して，$A$ の行列式，あるいは $n$ 次 (の) 行列式と呼ばれる $A$ の成分たちの多項式を考えることがしばしばある．行列式はかなり複雑であるが，それによって $A$ の正則性を判定したり，逆行列の明示的な公式を作ることができる．$A$ の行列式を $|A|$ や $\det A$ で表す．まずその定義を見てみよう．$A = (a_{ij})$ とするとき，

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{j_1,\ldots,j_n} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}. \end{aligned} \tag{1}$$

ここに，1 行目右辺の和の $S_n$ は，$n$ 文字の置換の集合であり，2 行目右辺の和は $1, 2, \ldots, n$ のすべての順列 $j_1, j_2, \ldots, j_n$ を亘る．これらの式は表現が違うだけで全く同じ内容なので，定義としてどちらを採用しても差し支えない．いずれにせよ，行列式は置換を使って定義されているので，まず置換の説明から入らなければならない．

- 2 -（1 対 1 対応）$A, B$ を集合とする．$f$ を $A$ から $B$ への関数とする．これを記号的に

$$f : A \longrightarrow B \tag{2}$$

と表す．$A$ の任意の異なる 2 元 $x, x'$ に対して，$f(x) \neq f(x')$ となるとき，$f$ を単射という．$B$ の任意の元 $y$ に対して，$f(x) = y$ となる $A$ の元 $x$ が存在するとき，$f$ を全射という．$f$ が全射かつ単射のとき，全単射または 1 対 1 対応という．$f : A \longrightarrow B$ が 1 対 1 対応ならば，$g : B \longrightarrow A$ であって，

$$\begin{array}{ll} (g\circ f)(x) = g(f(x)) = x & \qquad (x \in A) \\ (f\circ g)(y) = f(g(y)) = y & \qquad (y \in B) \end{array} \tag{3}$$

をみたすものが存在する．この $g$ を $f$ の逆関数といい，$g = f^{-1}$ で表す．このとき，$f$ もまた $g$ の逆関数になっている．

- 3 -（置換）簡単のため，$\{1, 2, \ldots, n\} = [n]$ とかくことにする．$[n]$ から $[n]$ への 1 対 1 対応を $n$ 文字の置換という．たとえば $n = 3$ として，

$$\begin{array}{c} 1 \longrightarrow 3 \\ 2 \longrightarrow 1 \\ 3 \longrightarrow 2 \end{array} \tag{4}$$

のような対応は，各数を別々の数に対応させているので，1 対 1 対応になっている．したがってこれは 3 文字の置換となる．これをよく見ると結局 1,2,3 の順序を入れ替え

ることに相当している．したがって，3 文字の置換は全部で $3! = 6$ 個ある．(4) の置換を記号的に，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

で表す．これを $\sigma$ とおけば，$\sigma(1) = 3$，$\sigma(2) = 1$，$\sigma(3) = 2$ となる．$n$ 文字の置換であれば，その表示は一般に以下のようになる．このような表示については，数字の上下の組合せのみが問題となっているので，$\boxed{\text{列の順序を入れ替えても同じ意味}}$ になる．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \ldots & j_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

$n$ 文字の置換 (6) については，$j_1$ が $n$ 通り，$j_2$ が $(n-1)$ 通り，…，$j_n$ が 1 通りの値を取りうるので，その総数は $n!$ となる．それらの置換全体の集合を $\boxed{S_n}$ で表す．たとえば，

$$\begin{aligned} S_3 = \ & \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \right. \\ & \left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \tag{7}$$

はじめにある置換は順列を変えないので，恒等置換（または単位置換）といい $e$ で表す．一般に，$n$ 文字の恒等置換 $e$ は次のようになる．

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} \tag{8}$$

- 4 -（置換の積）置換は 1 対 1 対応だった．それは関数の一種であることを意味する．したがって合成することが可能である．今置換の積を合成であると定義する．すなわち $\sigma, \tau$ を $n$ 文字の置換とするとき，$\sigma\tau$ を次で定める．

$$(\sigma\tau)(x) = \sigma(\tau(x)) \qquad (x \in [n]) \tag{9}$$

これは新たな $n$ 文字の置換となる．$\sigma\tau = \tau\sigma$ は一般にはなりたたない．たとえば，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{10}$$

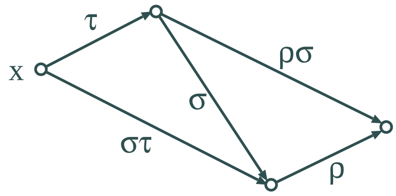
明らかに，

$$\sigma e = e\sigma = \sigma. \tag{11}$$

(T1) $\rho, \sigma, \tau$ を置換とするとき，次の結合律がなりたつ．

$$(\rho\sigma)\tau = \rho(\sigma\tau) \tag{12}$$

($\because$) 任意の $x \in [n]$ を取る．図より明らかに，$((\rho\sigma)\tau)(x) = (\rho(\sigma\tau))(x)$．　$\therefore$　$(\rho\sigma)\tau = \rho(\sigma\tau)$．　(q.e.d.)



(T1) より，置換の積:

$$\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_s \tag{13}$$

の結果は括弧のつけ方によらないことが示され，通常括弧は省略される．

$\sigma$ を $n$ 文字の置換とするとき，次をみたす $n$ 文字の置換 $\tau$ が存在する．

$$\sigma\tau = \tau\sigma = e \tag{14}$$

このような $\tau$ を $\sigma$ の逆置換といい，$\sigma^{-1}$ で表す．このとき，$\tau^{-1} = \sigma$ でもある．すなわち，$\tau$ と $\sigma$ は互いに逆置換になっている．逆置換を求めることは簡単である．単に逆関数を求めればよい．たとえば,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

(T2) 次がなりたつ．

$$(\sigma\tau)^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1} \tag{16}$$

($\because$) 実際,

$$\begin{aligned} &(\sigma\tau)(\tau^{-1}\sigma^{-1}) = \sigma(\tau\tau^{-1})\sigma^{-1} = \sigma e\sigma^{-1} = \sigma\sigma^{-1} = e \\ &(\tau^{-1}\sigma^{-1})(\sigma\tau) = \tau^{-1}(\sigma^{-1}\sigma)\tau = \tau^{-1}e\tau = \tau^{-1}\tau = e. \quad \text{(q.e.d.)} \end{aligned} \tag{17}$$

同様にして，次も示される．

$$(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_s)^{-1} = \sigma_s^{-1}\ldots\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1} \tag{18}$$

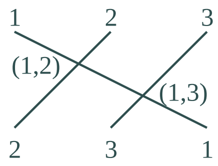
- 5 -（置換の符号）置換のうちで，2 つの文字を入れ替える以外は何も変えないもののことを互換という．$S_3$ の中には互換が 3 つある．$i$ と $j$ を入れ替える互換を $(i,j)$ または $(j,i)$ で表す．次は容易に確かめられる．

$$(i,j)^{-1} = (i,j) \tag{19}$$

$n$ 文字の置換は必ず互換の積で表すことができる．その方法を以下に示す．置換:

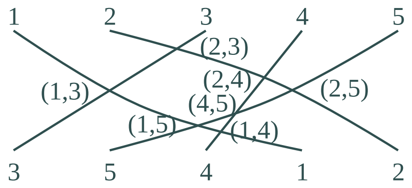
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{20}$$

の場合で説明する．置換に対して次のような図を描き，$i$ を繋いだ線と $j$ を繋いだ線の交点に互換 $(i,j)$ を記入する．これらの互換を下から上の順序で左から右に並べていけば，互換への分解が得られる．ここで，線は曲線でもよいが，必ず上から下に単調に降りていることとし，2 つの線が接したり，3 つ以上の線が 1 点で交わることを禁止する．



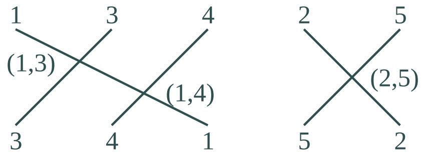

I

(i)




II

(ii)




II においては，はじめに置換の表示を (ii) のように列交換して単純化したほうが分解が簡単になる．こうして，

$$\sigma = (1,3)(1,2), \qquad \tau = \begin{cases} (1,4)(1,5)(4,5)(1,3)(2,5)(2,4)(2,3) \\ (1,4)(2,5)(1,3) \end{cases} \tag{21}$$

置換の図において，水平に位置する互換たちについては,(他の互換との順序が正しければ）それらを並べる順序は任意でよい．たとえば II(i) の (1,3),(2,5) の順序などは逆でもよい．

このような操作で互換への分解が得られる理由について考えよう．置換の図において，縦軸は時間の経過を示し，上から下に時間が進む．1 は線に沿って動き，下の 1 の場所に来る．他も同様である．ある時刻において，1 から $n$ がどのように置換されているかは，その時刻を水平の線で表して図の中で交点を求め，1 から $n$ がどこにいるかを調べる．左から 1,3,4,2,5 と並んでいれば，その時刻までで，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \tag{22}$$

の置換が行われたことになる．そして最終的には，与えられた置換になっている．途中の変化については，図の描き方から，交点を挟んで互換が行われていることは明らかだろう．こうして互換を積み重ねて与えられた置換が表示できた．

以上で互換への分解ができたが，一般には分解は何通りもある．また，いくつの互換に分解されるかも 1 通りには決まらない．しかし，その互換の数が偶数か奇数かは決定することがわかっている．1 つの置換を互換に分解したとき，互換の数が偶数ならば偶置換，奇数ならば奇置換という．そして，

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} \;\;1 & (\sigma \text{ が偶置換}) \\ -1 & (\sigma \text{ が奇置換}) \end{cases} \tag{23}$$

と定義する．これを置換の符号という．つまり，置換の図を描いたとき，交点が偶数か奇数かを調べれば符号がわかる．

互換への分解をしたとき，互換の数が偶数か奇数かが決まるわけについて簡単に触れておく．そのためには，

$$\Delta = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \tag{24}$$

という式を考える．これを差積と呼ぶ．ここで $\Delta$ に置換を作用させてみる．すなわち，置換で番号が入れ替わるとき，それに応じて変数の添字を入れ替えて，その結果変数が入れ替わるようにする．$\Delta$ に互換を作用させると，必ず $-\Delta$ になることが示

される．よって，一般に置換 $\sigma$ が $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_s = \sigma'_1 \dots \sigma'_t$ のように，偶数 $s$ 個の互換と奇数 $t$ 個の互換に 2 通りに分解されれば，

$$\begin{aligned} \sigma\Delta &= \sigma_1 \dots \sigma_s \Delta = (-1)^s \Delta = \Delta, \\ \sigma\Delta &= \sigma'_1 \dots \sigma'_t \Delta = (-1)^t \Delta = -\Delta \end{aligned} \tag{25}$$

となって矛盾する．

(T3) 2 つの置換 $\sigma$，$\tau$ が与えられたとき，積と逆置換の符号については，次がなりたつ．

$$\begin{aligned} &\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau) \\ &\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma) \end{aligned} \tag{26}$$

($\because$) $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_s$，$\tau = \tau_1\tau_2 \dots \tau_t$ と互換に分解されたとする．

$$\begin{aligned} &\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma_1 \dots \sigma_s\tau_1 \dots \tau_t) = (-1)^{s+t} = (-1)^s(-1)^t = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau) \\ &\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}\left((\sigma_1 \dots \sigma_s)^{-1}\right) = \mathrm{sgn}\left(\sigma_s^{-1} \dots \sigma_1^{-1}\right) = \mathrm{sgn}(\sigma_s \dots \sigma_1) = (-1)^s \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma) \end{aligned} \tag{27}$$

ゆえになりたつ．逆置換については，置換の図が上下逆になるだけだから明らかとしてもよい． (q.e.d.)

$n$ 文字の置換のうち，以下のような文字の入れ替えを行うもの（他の文字は動かさない）のことを長さ $s$ の巡回置換という．この置換を $(i_1i_2 \dots i_s)$ で表す．

$$i_1 \longrightarrow i_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow i_s \longrightarrow i_1 \tag{28}$$

ただし，$(i_1i_2 \dots i_s)$ の数字を順繰りに入れ替えた記号は同じ巡回置換を表す．たとえば $(235) = (352) = (523)$ である．

一般に，$n$ 文字の置換は互いに異なる文字を用いた巡回置換たちの積で表される．たとえば，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 6 & 4 & 2 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} = (152)(36)(78)(4) \tag{29}$$

のようにかける．このような分解を巡回置換分解（サイクル分解）という．巡回置換分解は，積の順序を除いて一意的である．置換を巡回置換分解したとき，各巡回置換の長さを大きい順に並べたものをその置換の型（巡回置換型）という．この例では $(3, 2, 2, 1)$ になる．

置換を巡回置換に分解し，それぞれの巡回置換をさらに互換に分解すると，もとの置換を互換に分解することができる．巡回置換 $(i_1i_2 \dots i_s)$ は，

$$(i_1i_2 \dots i_s) = (i_1, i_s) \dots (i_1, i_3)(i_1, i_2) \tag{30}$$

のように，$s-1$ 個の互換に分解される．したがって，$n$ 文字の置換 $\sigma$ が $r$ 個の巡回置換に分解されたとき，$n-r$ 個の互換に分解されることになり，

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{n-r} \tag{31}$$

がなりたつ．

(ex1) (1) 3 文字の置換をすべてあげ，その符号を求めよ． (2) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を互換の積に分解し，符号を求めよ． (3) $n = 3$ のとき，行列式の定義 (1) を用いてサラスの公式がなりたつことを確かめよ．

- 6 -（行列式の性質）以上の準備により，行列式の定義 (1) の意味が理解される．直感的に言うと，$n$ 次の行列式とは，各行，各列から 1 つずつ，$n$ 個の成分を選んで作った $n!$ 個の項に，適当に符号をつけて総和した式ということになる．ただし，この式は実際に計算するときには余り使われない．(1) から導かれる行列式の性質や公式によって，行列式を計算することが多い．

行列式には，以下に示すように多重線形性と交代性と呼ばれる 2 つの性質がある．

(T4)（行に関する多重線形性）

$$\begin{vmatrix} \mathsf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_i + \tilde{\mathsf{a}}'_i \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathsf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_i \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathsf{a}'_1 \\ \vdots \\ \tilde{\mathsf{a}}'_i \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_n \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \mathsf{a}'_1 \\ \vdots \\ c\mathsf{a}'_i \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_n \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} \mathsf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_i \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_n \end{vmatrix}. \tag{32}$$

(T4')（列に関する多重線形性）

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \mathsf{a}_1 & \ldots & \mathsf{a}_j + \tilde{\mathsf{a}}_j & \ldots & \mathsf{a}_n \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \mathsf{a}_1 & \ldots & \mathsf{a}_j & \ldots & \mathsf{a}_n \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} \mathsf{a}_1 & \ldots & \tilde{\mathsf{a}}_j & \ldots & \mathsf{a}_n \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} \mathsf{a}_1 & \ldots & c\mathsf{a}_j & \ldots & \mathsf{a}_n \end{vmatrix} &= c \begin{vmatrix} \mathsf{a}_1 & \ldots & \mathsf{a}_j & \ldots & \mathsf{a}_n \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{33}$$

(T5)（行に関する交代性）$\tau \in S_n$ に対して，

$$\begin{vmatrix} \mathsf{a}'_{\tau(1)} \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_{\tau(n)} \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}(\tau) \begin{vmatrix} \mathsf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_n \end{vmatrix}. \tag{34}$$

(T5')（列に関する交代性）$\tau \in S_n$ に対して，

$$\begin{vmatrix} \mathsf{a}_{\tau(1)} & \ldots & \mathsf{a}_{\tau(n)} \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}(\tau) \begin{vmatrix} \mathsf{a}_1 & \ldots & \mathsf{a}_n \end{vmatrix}. \tag{35}$$

ここで，(32) 左の式を繰り返し用いれば，行ベクトルのいくらかの和について，

$$\begin{vmatrix} \mathsf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_i + \mathsf{b}'_i + \cdots + \mathsf{c}'_i \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathsf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_i \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathsf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathsf{b}'_i \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_n \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \mathsf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathsf{c}'_i \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_n \end{vmatrix} \tag{36}$$

が得られる．これは (32) 左の式と同値な式としてよく用いられる．同様に (33) 上の式から得られる同値な式

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \mathsf{a}_1 & \ldots & \mathsf{a}_j + \mathsf{b}_j + \cdots + \mathsf{c}_j & \ldots & \mathsf{a}_n \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \mathsf{a}_1 & \ldots & \mathsf{a}_j & \ldots & \mathsf{a}_n \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} \mathsf{a}_1 & \ldots & \mathsf{b}_j & \ldots & \mathsf{a}_n \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \mathsf{a}_1 & \ldots & \mathsf{c}_j & \ldots & \mathsf{a}_n \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{37}$$

もよく用いられる．

$(\because)$(T4) (1) より，

$$
\begin{vmatrix} \mathsf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_i + \tilde{\mathsf{a}}'_i \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_n \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots \Big( a_{i\sigma(i)} + \tilde{a}_{i\sigma(i)} \Big) \dots a_{n\sigma(n)}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma \in S_n} \Big( \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} + \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots \tilde{a}_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \Big) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots \tilde{a}_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)}
\end{aligned} \tag{38}
$$

$$
= \begin{vmatrix} \mathsf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_i \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathsf{a}'_1 \\ \vdots \\ \tilde{\mathsf{a}}'_i \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_n \end{vmatrix}. \qquad \text{同様に (1) より，}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \mathsf{a}'_1 \\ \vdots \\ c\mathsf{a}'_i \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_n \end{vmatrix} &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots \Big( c a_{i\sigma(i)} \Big) \dots a_{n\sigma(n)} \\
&= c \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} = c \begin{vmatrix} \mathsf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_n \end{vmatrix}. \qquad \text{(q.e.d.)}
\end{aligned} \tag{39}
$$

$(\because)$(T5) (1) より，

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \mathsf{a}'_{\tau(1)} \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_{\tau(n)} \end{vmatrix} &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\tau(1)\sigma(1)} a_{\tau(2)\sigma(2)} \dots a_{\tau(n)\sigma(n)} \\
&\qquad \text{積の順序を } \tau^{-1} \text{ で入れ替えて，} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\tau(\tau^{-1}(1)),\sigma(\tau^{-1}(1))}\, a_{\tau(\tau^{-1}(2)),\sigma(\tau^{-1}(2))} \dots a_{\tau(\tau^{-1}(n)),\sigma(\tau^{-1}(n))} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1,(\sigma\tau^{-1})(1)}\, a_{2,(\sigma\tau^{-1})(2)} \dots a_{n,(\sigma\tau^{-1})(n)} \\
&\qquad \text{ここで，固定された } \tau \text{ について，} \sigma \text{ が } S_n \text{ 全体を動くとき，} \\
&\qquad \rho = \sigma\tau^{-1} \text{ もまた } S_n \text{ 全体を動くことになるので，} \\
&= \sum_{\rho \in S_n} \mathrm{sgn}(\rho\tau) a_{1\rho(1)}\, a_{2\rho(2)} \dots a_{n\rho(n)} \\
&= \sum_{\rho \in S_n} \mathrm{sgn}(\rho)\mathrm{sgn}(\tau) a_{1\rho(1)}\, a_{2\rho(2)} \dots a_{n\rho(n)} \\
&= \mathrm{sgn}(\tau) \sum_{\rho \in S_n} \mathrm{sgn}(\rho) a_{1\rho(1)}\, a_{2\rho(2)} \dots a_{n\rho(n)} = \mathrm{sgn}(\tau) \begin{vmatrix} \mathsf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_n \end{vmatrix}. \qquad \text{(q.e.d.)}
\end{aligned} \tag{40}
$$

列に関する性質については，後に示す．交代性については，実用上，$\tau$ が互換のときが重要である．そのときは，定理は次のようになる．

(T5-) 行列式の 2 つの行を入れ替えると符号が変わり，行列式の 2 つの列を入れ替えると符号が変わる．

次に転置行列の行列式に関する定理をあげる．

(T6) $A$ を $n$ 次行列とするとき，

$$|A| = |{}^tA|. \tag{41}$$

($\because$) (1) より，

$$\begin{aligned}
|{}^tA| &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n} \\
&\qquad \text{積の順序を } \sigma^{-1} \text{ で入れ替えて,} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(\sigma^{-1}(1)),\sigma^{-1}(1)} a_{\sigma(\sigma^{-1}(2)),\sigma^{-1}(2)} \dots a_{\sigma(\sigma^{-1}(n)),\sigma^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma^{-1}(1)} a_{2,\sigma^{-1}(2)} \dots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \\
&\qquad \sigma \text{ が } S_n \text{ 全体を動くとき，} \rho = \sigma^{-1} \text{ もまた} \\
&\qquad S_n \text{ 全体を動くので,} \\
&= \sum_{\rho\in S_n} \mathrm{sgn}(\rho^{-1}) a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \dots a_{n\rho(n)} \\
&= \sum_{\rho\in S_n} \mathrm{sgn}(\rho) a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \dots a_{n\rho(n)} = |A|. \qquad \text{(q.e.d.)}
\end{aligned} \tag{42}$$

(T6) を用いると，列に関する性質 (33)，(35) を示せる．なぜならば，すでに行に関する性質 (32)，(34) は示されており，(32)，(34) の両辺を転置すると，証明すべき列に関する性質になっていることがわかる．ところが，(T6) より，転置行列の行列式はもとの行列の行列式と同じなので，列に関する性質もなりたつことになる．

- 7 -（基本変形と行列式）行列式の性質を用いれば，行列式と基本変形の関係がわかる．

R1: 行列式の 2 つの行を入れ替えたとき，行列式の符号が変わる．($(-1)$ 倍される)

R2: 行列式の 1 つの行を $c$ 倍したとき，行列式は $c$ 倍になる．

R3: 行列式のある行の $c$ 倍を他の行に加えても，行列式は変わらない．

C1: 行列式の 2 つの列を入れ替えたとき，行列式の符号が変わる．($(-1)$ 倍される)

C2: 行列式の 1 つの列を $c$ 倍したとき，行列式は $c$ 倍になる．

C3: 行列式のある列の $c$ 倍を他の列に加えても，行列式は変わらない．

R1,R2,C1,C2 は行列式の性質そのものなので，R3,C3 について考えてみる．まず，$\boxed{\text{同じ行または同じ列を持つ行列式は 0 に等しい}}$ ことを見てみよう．$i$ 行と $j$ 行が等しい行列 $A$ について，$i$ 行と $j$ 行を入れ替えても $A$ のままである．ところが，行列式の交代性より，

$$|A| = -|A|, \qquad \therefore\ |A| = 0 \tag{43}$$

を得る．列についても同様．そこで，$A$ の $i$ 行に $j$ 行の $c$ 倍を加えた行列を $B$ とすると，

$$|B| = \begin{vmatrix} \mathsf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_i + c\mathsf{a}'_j \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_j \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathsf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_i \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_j \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathsf{a}'_1 \\ \vdots \\ c\mathsf{a}'_j \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_j \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_n \end{vmatrix} = |A| + c \begin{vmatrix} \mathsf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_j \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_j \\ \vdots \\ \mathsf{a}'_n \end{vmatrix} = |A|. \tag{44}$$

列についても同様．

ある行，たとえば $i$ 行が $0$ ベクトルになっている行列式についても考えておく．それは (1) にあてはめると，$a_{i\sigma(i)}$ がつねに $0$ なのですべての項が $0$ になり，行列式は $0$ になる．その転置を考えると，ある列が $0$ ベクトルになっている行列式も $0$ となる．

(ex2) 基本変形を利用して，次の行列式を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 5 & 100 & 15 \\ 4 & 50 & 6 \\ 7 & 80 & 8 \end{vmatrix} \tag{45}$$

(ans)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5 & 100 & 15 \\ 4 & 50 & 6 \\ 7 & 80 & 8 \end{vmatrix} &= 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 20 & 3 \\ 4 & 50 & 6 \\ 7 & 80 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix} = 50 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 50 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 50 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 150. \end{aligned} \tag{46}$$

- 8 -（正則性と行列式）(1) は直接計算するには不便な式だが，$A$ が簡単な場合には使えることもある．$E_n$ の行列式を考えよう．$A = E_n$ のとき，(1) の中辺（または右辺）の項はほとんどが $0$ になる．逆に $0$ でない場合を考えると，

$$a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \ldots, a_{n\sigma(n)} \tag{47}$$

がすべて対角成分になっていなければならない．すなわち，$\sigma = e$ でなければならない．したがって $0$ でない項は $1$ つだけで，

$$|E_n| = \mathrm{sgn}(e)1 \ldots 1 = 1 \tag{48}$$

となる．同様にして対角行列については，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & O \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}(e) a_{11} a_{22} \ldots a_{nn} = a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}. \tag{49}$$

ここで，$n$ 次行列 $A$ の正則性と行列式の関係について見てみる．$A$ を基本変形するときに，行列式 $|A|$ はどのような変化をするだろうか．それは，符号が変わるか，$c$ 倍になるか，変わらないかのいずれかであった．ここで，$c \neq 0$ に注意する．こう考え

ると，$\boxed{|A| \text{ が } 0 \text{ であるかどうか}}$ という性質が，基本変形の前と後で変わらないことがわかる．そして，$A$ が正則ならば $r(A)=n$ なので，基本変形を繰り返して $E_n$ にでき，$|E_n|=1\neq 0$ なので，$|A|\neq 0$ がいえる．$A$ が正則でないならば $r(A)=r<n$ なので，基本変形を繰り返して $F_{nn}(r)$ になり，$|F_{nn}(r)|=0$ なので $|A|=0$ がいえる．

(T7) $n$ 次行列 $A$ について，次がなりたつ．

$$\begin{array}{ccc} A \text{ が正則} & \Longleftrightarrow & |A|\neq 0 \\ A \text{ が正則でない} & \Longleftrightarrow & |A|=0 \end{array} \tag{50}$$

- 9 -（行列式の公式）行列式の公式として重要なものをあげる．

(T8) $A,B$ を $n$ 次行列とするとき，

$$|AB|=|A||B|. \tag{51}$$

(T9) $A$ を $r$ 次行列，$C$ を $s$ 次行列とするとき，

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ B' & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ O & C \end{vmatrix} = |A||C|. \tag{52}$$

($\because$)(T8) まず $A$ が正則のときに示す．$A$ が正則なので，行変形のみを繰り返して，

$$A \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_n \tag{53}$$

とできる．この変形は左から基本行列をいくらか掛けることで実現できるので，結局左から $A^{-1}$ をかけたことと同等となる．(53) と全く同じ基本変形を $AB$ に対して行えば，

$$AB \longrightarrow \cdots \longrightarrow A^{-1}AB=B \tag{54}$$

のようになる．ところで，2 つの行列に同じ基本変形を行えば，行列式の値は同じように変化し，同じ定数倍になる．ここで (53) をみれば，この変形でもとの行列式の値が $\frac{1}{|A|}$ になっていることがわかる．ゆえに (54) より，

$$|AB|\cdot\frac{1}{|A|}=|B|. \qquad \therefore\ |AB|=|A||B|. \tag{55}$$

次に $A$ が正則でないとする．このとき，$AB$ はまた正則でない．なぜならば，$AB$ が正則ならば，$X=(AB)^{-1}$ が存在して

$$ABX=XAB=E_n \tag{56}$$

となるが，これより，正則な行列に関する定理（5 章 (T3)）を用いて，

$$A^{-1}=BX. \qquad \text{（矛盾）} \tag{57}$$

ゆえに (T7) より，(51) の両辺は 0 となる． (q.e.d.)

($\because$)(T9) 他も同様なので，(52) 最左辺と最右辺の等号のみを示す．$A,C$ 共に正則とする．$A$ が正則なので，$\begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix}$ の $A$ のある列に列変形を繰り返して，

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix} \longrightarrow \overset{\times\frac{1}{|A|}}{\cdots} \longrightarrow \begin{vmatrix} E_r & B \\ O & C \end{vmatrix} \tag{58}$$

を得る．この変形で行列式の値は $\frac{1}{|A|}$ になっている．次に列変形により，$E_r$ の右の $B$ をすべて掃き出し $O$ にする．この変形では，行列式の値が不変である．そして最後に，$C$ が正則なので $C$ のある列に列変形を繰り返して $E_s$ にする．この変形で行列式は $\frac{1}{|C|}$ になる．すなわち，

$$\begin{vmatrix} E_r & B \\ O & C \end{vmatrix} \longrightarrow \overset{\times 1}{\cdots} \longrightarrow \begin{vmatrix} E_r & O \\ O & C \end{vmatrix} \longrightarrow \overset{\times \frac{1}{|C|}}{\cdots} \longrightarrow \begin{vmatrix} E_r & O \\ O & E_s \end{vmatrix} = 1. \tag{59}$$

(58),(59) より，

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{|A|} \cdot \frac{1}{|C|} = 1. \qquad \therefore \quad \begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix} = |A||C|. \tag{60}$$

次に $A$ または $C$ が正則でないとする．このとき $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$ はやはり正則ではない．なぜならばそれが正則とすると，

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & E_s \end{pmatrix} \tag{61}$$

なので，

$$CX_{22} = E_s, \qquad X_{11}A = E_r \tag{62}$$

を得る．ここで正則な行列に関する定理（5 章 (T3)）を用いて，$A, C$ 共に正則となる．（矛盾） ゆえに (T7) より，(52) の 最左辺 = 最右辺 = 0 となる． (q.e.d.)

(note) 上三角行列，および下三角行列の行列式について，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} \tag{63}$$

がなりたつ．なぜならば，上三角行列の場合，(T9) 最左辺と最右辺の等号より，与式はより小さい上三角の行列式の積に次々と分解されていき，結局，$a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ となるから．下三角行列の場合も同様である．

- 10 -（行列式の余因子展開）ここでは行列式をより小さい次数の行列式を使って展開する方法について考えよう．$n$ 次行列 $A = (a_{ij})$ を取る．

$$A = \begin{pmatrix} \mathtt{a}_1 & \dots & \mathtt{a}_j & \dots & \mathtt{a}_n \end{pmatrix} \tag{64}$$

と表示し，基本ベクトル $\mathtt{e}_i$ を用いて $\mathtt{a}_j$ を

$$\mathtt{a}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathtt{e}_i \tag{65}$$

と表す．すると，行列式の列に関する多重線形性 (37)，(33) 下より，

$$\begin{aligned} |A| = & \quad \begin{vmatrix} \mathtt{a}_1 & \dots & \overset{j)}{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathtt{e}_i} & \dots & \mathtt{a}_n \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \mathtt{a}_1 & \dots & \overset{j)}{a_{ij}\mathtt{e}_i} & \dots & \mathtt{a}_n \end{vmatrix} \\ = & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \begin{vmatrix} \mathtt{a}_1 & \dots & \overset{j)}{\mathtt{e}_i} & \dots & \mathtt{a}_n \end{vmatrix} . \end{aligned} \tag{66}$$

ここで簡単のため和の中身について考える．$j$ 列にある $\mathtt{e}_i$ を左隣りの列と次々に入れ替えていくと，$(j-1)$ 回入れ替えれば 1 列に至る．すなわち，

$$a_{ij}\begin{vmatrix} \mathtt{a}_1 & \dots & \overset{j)}{\mathtt{e}_i} & \dots & \mathtt{a}_n \end{vmatrix} = (-1)^{j-1}a_{ij}\begin{vmatrix} \mathtt{e}_i & \mathtt{a}_1 & \dots & \hat{\mathtt{a}_j} & \dots & \mathtt{a}_n \end{vmatrix} \tag{67}$$

ただし，$\hat{\mathtt{a}_j}$ は，$\mathtt{a}_j$ が削除されていることを示す．(“ ^ ” を除外記号という.) 次に $i$ 行をすぐ上の行と次々に入れ替えていくと，$(i-1)$ 回入れ替えれば 1 行に至る．すなわち，

$$(67) = (-1)^{i-1+j-1}a_{ij}\left|\begin{array}{ccccccc}
1 & a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\
0 & a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\
0 & a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\
\multicolumn{7}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
0 & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\
0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\
\multicolumn{7}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
0 & a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n}
\end{array}\right| \tag{68}$$

ここで (T9) を用いて，

$$(68) = (-1)^{i+j}a_{ij}\left|\begin{array}{cccccc}
a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\
\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\
a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\
\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n}
\end{array}\right|. \tag{69}$$

(69) における行列式は $A$ から $i$ 行と $j$ 列を取り去った行列の行列式になっている．この行列式を，$A$ の $\boxed{(i,j)\text{ 小行列式}}$ といい，$\boxed{\Delta_{ij}}$ とかく．さらに $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ を $A$ の $\boxed{(i,j)\text{ 余因子}}$ といい，$\boxed{\tilde{a}_{ij}}$ とかく．この記法を用いれば，(66)–(69) より次の定理の (70) を得る．

(T10) $n$ 次行列 $A$ に対して，

$$|A| = a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nj} \tag{70}$$

$$|A| = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in}. \tag{71}$$

(71) も (70) の場合と全く同様に示せる．あるいは，(70) の転置を取れば直ちに得られる．

(70) を $|A|$ の $\boxed{j\text{ 列に関する余因子展開}}$，(71) を $|A|$ の $\boxed{i\text{ 行に関する余因子展開}}$ という．

(ex3) 次の行列式を計算せよ．

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \tag{72}$$

(ans)

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 5\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{余因子展開}}{\overset{3\text{ 列に関する}}{=}} 5\cdot(-1)^{4+3}1\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -5\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{余因子展開}}{\overset{2\text{ 行に関する}}{=}} -5\left((-1)^{2+1}5\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}(-1)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\right) \\
&= -5(-30-9) = 195.
\end{aligned}
\tag{73}
$$

(note) 4 次以上の行列式では，サラスの公式はなりたたない．

- 11 -（逆行列の明示的公式）これまで行列式の計算について考えてきたが，その副産物として，逆行列の公式を得ることができる．その鍵となるのは (70),(71) および次の式である．

$$a_{1i}\tilde{a}_{1j} + a_{2i}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{ni}\tilde{a}_{nj} = 0 \qquad (i \neq j) \tag{74}$$

$$a_{j1}\tilde{a}_{i1} + a_{j2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{jn}\tilde{a}_{in} = 0 \qquad (i \neq j) \tag{75}$$

これらの式を示すには，$A$ の $j$ 列を $i$ 列におきかえた行列 $B$ および，$A$ の $i$ 行を $j$ 行におきかえた行列 $C$ を考える．$B, C$ 共に，同じ列または同じ行があるので行列式は 0 である．ところが $B$ を $j$ 列に関して展開すれば (74) が得られ，$C$ を $i$ 行に関して展開すれば (75) が得られる．

そこで，$n$ 次行列 $A$ に対して次の $n$ 次行列を考える．

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \ldots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{n2} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \ldots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} \tag{76}$$

これは $A$ の $(i,j)$ 余因子を $(j,i)$ 成分として持つ行列なので，$A$ の $\boxed{\text{余因子行列}}$ と呼ばれる．簡潔にかけば $\widetilde{A} = {}^t(\tilde{a}_{ij})$ となる．この行列は，余因子を並べた行列の転置行列であることに注意する．このとき，

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = |A|E_n \tag{77}$$

を得る．見やすくするために成分でかくと，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \ldots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{n2} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \ldots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & O \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ O & & & |A| \end{pmatrix}, \tag{78}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \ldots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{n2} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \ldots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & O \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ O & & & |A| \end{pmatrix}. \tag{79}$$

実際，(78) 左辺を計算するとき，$(i,i)$ 成分は (71) で得られ，$(j,i)$ 成分 $(i \neq j)$ は (75) で得られる．(79) 左辺を計算するときは，$(j,j)$ 成分は (70) で得られ，$(j,i)$ 成分 $(i \neq j)$ は (74) で得られる．

ここで $A$ を正則としてみると，(T7) より $|A| \neq 0$ なので，(77) を $|A|$ で割って，

$$A\left(\frac{1}{|A|}\widetilde{A}\right) = \left(\frac{1}{|A|}\widetilde{A}\right)A = E_n. \tag{80}$$

ゆえに，

(T11) $A$ が正則のとき，

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}. \tag{81}$$

(ex4) 次の行列 $A$ の逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{82}$$

(ans)

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 & -3 & -8 \\ -13 & 6 & 10 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{83}$$

(note) 逆行列の公式は理論上重要な結果であり，$n \leq 3$ のときには十分実用的でもある．$n$ が大きい場合は，基本変形による方法の方が早い場合が多い．

- 12 -（クラメルの公式）逆行列の公式を用いて，正則な $n$ 次行列 $A = (a_{ij})$ に対する 1 次方程式系

$$A\mathsf{x} = \mathsf{c} \tag{84}$$

を解くことができる．まず $A^{-1}$ を左からかけて，

$$\mathsf{x} = A^{-1}\mathsf{c} = |A|^{-1}\widetilde{A}\mathsf{c}. \tag{85}$$

ここで，$\mathsf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ の $j$ 成分 $x_j$ を書き下してみると，

$$x_j = |A|^{-1}\left(\tilde{a}_{1j}c_1 + \tilde{a}_{2j}c_2 + \cdots + \tilde{a}_{nj}c_n\right). \tag{86}$$

これを (70) と比べてみる．$|A|$ の $j$ 列を $\mathsf{c}$ におきかえた行列式を $|A_j|$ とすると，(86) の括弧の中身は $|A_j|$ の $j$ 列に関する展開になっているので，次を得る．

(T12)（クラメルの公式）

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|} = \frac{\overset{j)}{\begin{vmatrix} \mathtt{a}_1 & \dots & \mathtt{c} & \dots & \mathtt{a}_n \end{vmatrix}}}{\begin{vmatrix} \mathtt{a}_1 & \dots & \mathtt{a}_n \end{vmatrix}}. \tag{87}$$

この公式は，係数行列 $A$ が正則の場合にしか適用できないことに注意する．

(ex5) クラメルの公式を用いて次の 1 次方程式系を解け．

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} 3x_1 & -5x_2 & +x_3 & = & 8 \\ 5x_1 & +3x_2 & -5x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = & 7 \end{array} \right. \tag{88}$$

(ans)

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 8 & -5 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -5 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 2\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2(48+5) = 106. \\
|A_1| &= \begin{vmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \\ 7 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -5 \\ 7 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 1 & 3 & -5 \\ 7 & -2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 18 + 14 - 20 + 147 = 159. \\
|A_2| &= \begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 5 & 1 & -5 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 7 & 12 & 5 \end{vmatrix} \\
&= -60 + 7 = -53. \\
|A_3| &= \begin{vmatrix} 3 & -5 & 8 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 5 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} \\
&= 2(-10 + 63) = 106. \\
\therefore\ x_1 &= \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{159}{106} = \frac{3}{2},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-53}{106} = -\frac{1}{2},\ x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{106}{106} = 1.
\end{aligned} \tag{89}$$

すなわち， $\mathtt{x} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- 13 -（特殊な行列式）行列式の中にはきれいな式で表せるものが数多くある．ここでは，その中の 2-3 の例について見てみる．はじめに準備として，証明に用いる定理を述べる．

(T13)（多変数多項式の剰余定理）多変数多項式 $p(x_1,\dots,x_n)$ に対して，ある 1 つの変数，たとえば $x_1$ を選び，ある $(n-1)$ 変数多項式 $q(x_2,\dots,x_n)$ を $p(x_1,\dots,x_n)$ における $x_1$ に代入したとき，それが 0 になるならば，$p(x_1,\dots,x_n)$ は $x_1-q(x_2,\dots,x_n)$ で割り切れる．

1.（ヴァンデルモンドの行列式）

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i) \tag{90}$$

(note) (1) 右辺は (24) の差積である． (2) 左辺は転置の形でかかれることもある．

(∵) 左辺において $x_j=x_i$ $(i\neq j)$ とおくと $i$ 行と $j$ 行が一致するので 0 になる．したがって，多変数多項式の剰余定理より左辺は $x_j-x_i$ で割り切れる．$1\le i<j\le n$ をみたすすべての $i,j$ に対する $n(n-1)/2$ 個の因数 $x_j-x_i$ はどの 2 つも互いに素なので，左辺はそれらの積

$$\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i), \tag{91}$$

すなわち右辺で割り切れる．ここで，左辺と右辺のすべての変数に関する次数は $n(n-1)/2$ で等しいので，右辺と左辺は定数倍の差しかなく，さらに $x_2x_3^2\dots x_n^{n-1}$ の係数は両辺とも 1 なので，両辺は一致する． (q.e.d.)

2.（巡回行列式）

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \dots & x_{n-2} \\ x_{n-2} & x_{n-1} & x_0 & \dots & x_{n-3} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_0 \end{vmatrix} = \prod_{\omega^n=1}(x_0+\omega x_1+\omega^2x_2+\dots+\omega^{n-1}x_{n-1}) \tag{92}$$

ここに，右辺の積は $n$ 個の 1 の $n$ 乗根 $\omega$ を亘る．

(∵) 勝手な 1 の $n$ 乗根 $\omega$ を取る．$j=2,\dots,n$ に対して，$j$ 列の $\omega^{j-1}$ 倍を 1 列に加える．このとき，$(i,1)$ 成分は，

$$\omega^{i-1}(x_0+\omega x_1+\omega^2x_2+\dots+\omega^{n-1}x_{n-1}) \tag{93}$$

とかける．そこで

$$x_0=-\omega x_1-\omega^2x_2-\dots-\omega^{n-1}x_{n-1} \tag{94}$$

とおけは，1 列が 0 になるので左辺は 0 になる．ゆえに多変数多項式の剰余定理より左辺は

$$g(\omega)=x_0+\omega x_1+\omega^2x_2+\dots+\omega^{n-1}x_{n-1} \tag{95}$$

で割り切れる．$n$ 個の $\omega$ の値に対して $g(\omega)$ は互いに素なので，左辺はそれらの積，すなわち右辺で割り切れる．ここで，左辺と右辺の次数は $n$ で等しいので，右辺と左辺は定数倍の差しかなく，$x_0^n$ の係数は両辺とも 1 なので，両辺は一致する． (q.e.d.)

3.（パフィアン）$A$ を $n$ 次交代行列（${}^tA=-A$ をみたす行列）とする．$n$ が奇数のとき，$|A|=0$ となるが，$n$ が偶数のとき，$|A|$ は $A$ の成分のある多項式の 2 乗になる．すなわち，

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \dots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1,n-1} & -a_{2,n-1} & -a_{3,n-1} & \dots & 0 & a_{n-1,n} \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \dots & -a_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix} \tag{96}$$

とするとき，$n$ が偶数ならば，

$$|A|=[p(a_{12},a_{13},\dots,a_{n-1,n})]^2 \tag{97}$$

をみたすような，$A$ の成分の多項式 $p(a_{12},a_{13},\dots,a_{n-1,n})$ が（2 つ）存在することが知られている．そのうち，$p(1,1,\dots,1)=1$ となるものを，$A$ のパフィアンと呼び，pf$A$ で表す．以下に $n$ が小さいときの例をあげる．

$$\mathrm{pf}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}=a \qquad \mathrm{pf}\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}=af-be+cd$$

$$\mathrm{pf}\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 & a_{45} & a_{46} \\ -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & 0 & a_{56} \\ -a_{16} & -a_{26} & -a_{36} & -a_{46} & -a_{56} & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{r} a_{12}a_{34}a_{56}-a_{12}a_{35}a_{46}+a_{12}a_{36}a_{45} \\ -a_{13}a_{24}a_{56}+a_{13}a_{25}a_{46}-a_{13}a_{26}a_{45} \\ +a_{14}a_{23}a_{56}-a_{14}a_{25}a_{36}+a_{14}a_{26}a_{35} \\ -a_{15}a_{23}a_{46}+a_{15}a_{24}a_{36}-a_{15}a_{26}a_{34} \\ +a_{16}a_{23}a_{45}-a_{16}a_{24}a_{35}+a_{16}a_{25}a_{34} \end{array} \tag{98}$$

(ex6) (1) 奇数次の交代行列の行列式が 0 になることを示せ．

(2) (98) 第 1,2 式を示せ．

# 8章　線形空間とその基底

☆ 12 ☆

キーワード: 体，線形空間，公理，部分空間，線形独立，従属，有限次元，
基底，次元，$K^n$ の基底，生成，和空間，共通部分，次元公式，直和

- 0 -（演算）集合 $S$ がある演算について閉じているとは，$S$ にその演算が定義されていて，$S$ の任意の元たちにその演算を行った結果が，また $S$ に属するということである．たとえば，すべての整数の集合 $\mathbf{Z}$ は，加法，減法，乗法については閉じているが除法については閉じていない．数学では種々の演算について閉じている集合を考え，その性質を研究することがよく行われる．

- 1 -（線形空間）体とは，簡潔に言うと，四則演算（0 で割ることを除く）について閉じていて，加法と乗法について交換律，結合律，分配律をみたす[1] 集合のことである．体の例としては，

$$\mathbf{Q} = \{\,\text{有理数全体}\,\},\ \mathbf{R} = \{\,\text{実数全体}\,\},\ \mathbf{C} = \{\,\text{複素数全体}\,\} \tag{1}$$

などがある．これらを左から順に，有理数体，実数体，複素数体と呼ぶ．

$K$ を体とする．集合 $V$ が和（加法）と $K$ の元によるスカラー倍（の演算）について閉じていて，以下の [$L1$]–[$L8$] をみたすとき，$V$ を $K$ 上の $\boxed{\text{線形空間}}$ という．$K$ を $V$ の係数体あるいはスカラー体という．[$L1$]–[$L8$] を $\boxed{\text{線形空間の公理}}$ という．

$$\begin{array}{lcl}
[L1] & \mathtt{x}+\mathtt{y}=\mathtt{y}+\mathtt{x} & (\mathtt{x},\mathtt{y}\in V) \\
[L2] & (\mathtt{x}+\mathtt{y})+\mathtt{z}=\mathtt{x}+(\mathtt{y}+\mathtt{z}) & (\mathtt{x},\mathtt{y},\mathtt{z}\in V) \\
[L3] & \begin{array}{l} V\text{ の中に }0\text{ ベクトル }\mathtt{0}\text{ が存在し，任意の }\mathtt{x}\in V \\ \text{に対して }\mathtt{x}+\mathtt{0}=\mathtt{0}+\mathtt{x}=\mathtt{x}\text{ をみたす．}\end{array} & \\
[L4] & \begin{array}{l} \text{各 }\mathtt{x}\in V\text{ に対して，その逆ベクトル }-\mathtt{x}\text{ が }V\text{ の} \\ \text{中に存在し，}\mathtt{x}+(-\mathtt{x})=(-\mathtt{x})+\mathtt{x}=\mathtt{0}\text{ をみたす．}\end{array} & \\
[L5] & k(\mathtt{x}+\mathtt{y})=k\mathtt{x}+k\mathtt{y} & (\mathtt{x},\mathtt{y}\in V;\ k\in K) \\
[L6] & (k+l)\mathtt{x}=k\mathtt{x}+l\mathtt{x} & (\mathtt{x}\in V;\ k,l\in K) \\
[L7] & (kl)\mathtt{x}=k(l\mathtt{x}) & (\mathtt{x}\in V;\ k,l\in K) \\
[L8] & 1\mathtt{x}=\mathtt{x} & (\mathtt{x}\in V)
\end{array} \tag{2}$$

ただし，以後本講で実際に現れる問題では，集合 $V$ が和とスカラー倍について閉じている場合には，上の公理が明らかになりたつ場合が殆んどなので，$V$ が和とスカラー倍について閉じている，すなわち次をみたすことが線形空間の定義とみて実用上差し支えない．

$V$ の任意の元 $\mathtt{x},\mathtt{y}$ および $K$ の任意の元 $k$ に対して，

$$\begin{array}{rl} \mathtt{x}+\mathtt{y} & \in V \\ k\mathtt{x} & \in V. \end{array} \tag{3}$$

[1] $x+y=y+x$, $(x+y)+z=x+(y+z)$, $xy=yx$, $(xy)z=x(yz)$, $x(y+z)=xy+xz$, $(x+y)z=xz+yz$.

$K=\mathbf{C}$ のとき，$V$ を複素線形空間，$K=\mathbf{R}$ のとき，$V$ を実線形空間という．$K$ が何であるかは大筋には影響しないので，一般論では $K$ 上の線形空間で説明する．

線形空間の元のことを，ベクトルという．いままで扱ってきた狭い意味でのベクトルのことは，数ベクトルと呼んで区別することがある．$K$ の元をスカラーという．

$[L2]$ によれば，ベクトルの和に関する結合律がなりたつので，いくらかのベクトルの和

$$\mathtt{x}_1+\mathtt{x}_2+\cdots+\mathtt{x}_s \tag{4}$$

についてはどのように括弧をつけても結果は変わらない．よって通常括弧は省略される．さらに $[L1]$ の交換律により，和の順序も自由に入れ替え可能である．その他にも，線形空間の公理から以下が導かれる．

(A)（0 ベクトルの一意性） 線形空間 $V$ の 0 ベクトルはただ 1 つである．

(B)（逆ベクトルの一意性） $V$ の各元 $\mathtt{x}$ に対して $-\mathtt{x}$ はただ 1 つである．

(C)（簡約律） $\mathtt{x}+\mathtt{z}=\mathtt{y}+\mathtt{z} \Rightarrow \mathtt{x}=\mathtt{y}; \quad \mathtt{z}+\mathtt{x}=\mathtt{z}+\mathtt{y} \Rightarrow \mathtt{x}=\mathtt{y} \quad (\mathtt{x},\mathtt{y},\mathtt{z}\in V)$

(D) $0\mathtt{x}=\mathtt{0} \quad (\mathtt{x}\in V); \qquad k\mathtt{0}=\mathtt{0} \quad (k\in K)$

(E) $k\mathtt{x}=\mathtt{0} \Rightarrow \mathtt{x}=\mathtt{0}$ または $k=0 \qquad (\mathtt{x}\in V;\ k\in K)$

(F) $(-k)\mathtt{x}=k(-\mathtt{x})=-(k\mathtt{x}) \qquad (\mathtt{x}\in V;\ k\in K)$

$K$ 上の線形空間の代表的な例として，

$$K^n=\left\{\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \mid x_1,\ldots,x_n\in K\right\} \tag{5}$$

がある.[2] これは，$K=\mathbf{C}$ のときは複素線形空間 $\mathbf{C}^n$，$K=\mathbf{R}$ のときは実線形空間 $\mathbf{R}^n$ になる. 特に，$\mathbf{R}^3=V^3$ である．

(ex1) 次の集合 $V$ は実線形空間か？ また，複素線形空間か？

$$(1)\ V=\left\{\begin{pmatrix} x\\ x+zi\\ z\end{pmatrix} \mid x,z\in\mathbf{R}\right\} \qquad (2)\ V=\left\{\begin{pmatrix} x\\ x+zi\\ z\end{pmatrix} \mid x,z\in\mathbf{C}\right\} \tag{6}$$

(ans) (1) $V$ の任意の元 $\begin{pmatrix} x\\ x+zi\\ z\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x'\\ x'+z'i\\ z'\end{pmatrix}$，および任意の $k\in\mathbf{R}$ に対して，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x\\ x+zi\\ z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x'\\ x'+z'i\\ z'\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix} x+x'\\ x+x'+(z+z')i\\ z+z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \tilde{x}\\ \tilde{x}+\tilde{z}i\\ \tilde{z}\end{pmatrix}\in V\\ k\begin{pmatrix} x\\ x+zi\\ z\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix} kx\\ kx+kzi\\ kz\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x''\\ x''+z''i\\ z''\end{pmatrix}\in V.\end{aligned} \tag{7}$$

これより，$V$ は実線形空間である．ところが $i\in\mathbf{C}$ に対しては，

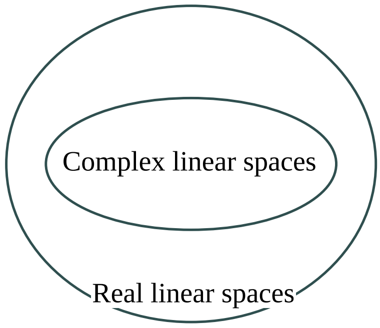
$$i\begin{pmatrix} x\\ x+zi\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ix\\ -z+ix\\ iz\end{pmatrix}\notin V \qquad \text{（第 1 または第 3 成分が虚数だから）} \tag{8}$$

なので，$V$ は複素線形空間ではないことがわかる．

---

[2] $K^n$ 以外にも，$K$ 上の線形空間の典型例として以下のものがある．(i) $K$ の元を成分とする $(m,n)$ 型行列全体のなす線形空間 $M_{mn}(K)$: 0 ベクトルは $O_{mn}$，$X\in M_{mn}(K)$ の逆ベクトルは $-X$．特に $M_{nn}(K)=M_n(K)$ とかく．(ii) $K$ の元を係数とする $t$ の多項式全体のなす線形空間 $K[t]$: 0 ベクトルは 0，$p(t)\in K[t]$ の逆ベクトルは $-p(t)$．(iii) 空でない適当な集合 $X$ から $K$ への関数全体のなす線形空間 $K^X$: 0 ベクトルは $0(x)=0$ $(x\in X)$，$f\in K^X$ の逆ベクトルは $-f=(-1)f$．ここに，$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$，$(kf)(x)=kf(x)$ $(x\in X)$ と定義する．

(2)（略解）(1) と同様だが，和と複素数のスカラー倍について閉じていることが示せるので，複素線形空間になる．したがってまた，実線形空間ともみなせる．




(note) $V$ が複素線形空間であれば，任意の $\mathtt{x},\mathtt{y}\in V$，および任意の複素数 $c$ に対して，$\mathtt{x}+\mathtt{y}\in V$ かつ $c\mathtt{x}\in V$ でなければならない．このとき，任意の実数 $k$ に対して $k\mathtt{x}\in V$ は明らかになりたつ.（実数は複素数だから） したがって，複素線形空間は実線形空間ともみなせる．逆に，$V$ が実線形空間で $\mathtt{x}\in V \Rightarrow i\mathtt{x}\in V$ がなりたてば，$V$ は複素スカラー倍について閉じており,（複素スカラー倍についての公理をみたすという前提の下では）$V$ を複素線形空間ともみなせる．

(note) 以後，線形空間の元（ベクトル）という意味でも，あるいは基本ベクトルという意味でも，$\mathsf{e}_1,\mathsf{e}_2,\ldots,\mathsf{e}_n$ という記号を用いる．どちらの意味で使っているかは文脈で判断する．

- 2 -（部分空間）$K$ 上の線形空間 $V$ の $\boxed{\text{部分集合}}$ $W$ が，$V$ と同じ演算に関して $K$ 上の線形空間になっているならば，$W$ を $V$ の $\boxed{\text{部分空間}}$ という．言い換えると，$W$ が $V$ の演算（和とスカラー倍）について閉じているとき，$W$ を $V$ の部分空間という．

$\{0\}$ および $V$ 自身は $V$ の部分空間である．それ以外のものを，真 (の) 部分空間という．

(ex2) $V=V^3$ とする．次のうち，$V$ の部分空間はどれか？

$$(1)\ W_1=\left\{\begin{pmatrix} t\\ t+u\\ u\end{pmatrix} \mid t,u\in\mathbf{R}\right\} \qquad (2)\ W_2=\left\{t\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} \mid t\in\mathbf{R}\right\}$$

$$(3)\ W_3=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} \mid t,u\in\mathbf{R}\right\}$$

(note) $V^3$ の部分空間は，$V^3$，原点を通る平面，原点を通る直線，原点 のいずれかである．

- 3 -（線形独立）$K$ 上の線形空間 $V$ のベクトル $\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \ldots, \mathsf{a}_s$ に対して，

$$k_1\mathsf{a}_1 + k_2\mathsf{a}_2 + \cdots + k_s\mathsf{a}_s \qquad (k_1, \ldots, k_s \in K) \tag{9}$$

の形の式を，$\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \ldots, \mathsf{a}_s$ の $\boxed{\text{線形結合}}$ という[3]．$V$ が和とスカラー倍について閉じているので，線形結合は $V$ のベクトルになる．ベクトル $\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \ldots, \mathsf{a}_s$ の間の関係

$$k_1\mathsf{a}_1 + k_2\mathsf{a}_2 + \cdots + k_s\mathsf{a}_s = \mathsf{0} \tag{10}$$

を $\boxed{\text{線形関係}}$ という．この関係は，係数 $k_i$ がすべて 0 であればつねになりたつ．そのような線形関係を，$\boxed{\text{自明な線形関係}}$ という．係数に 1 つでも 0 でないものがあれば，$\boxed{\text{自明でない線形関係}}$ という．

ここで，ベクトル $\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \ldots, \mathsf{a}_s$ が $\boxed{\text{線形独立}}$ であるとは，$\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \ldots, \mathsf{a}_s$ の間の自明でない線形関係が存在しないことであると定義する．自明でない線形関係が存在するときは，$\boxed{\text{線形従属}}$ であるという．

この定義は，$V^3$ における線形独立，従属の定義を一般化したものである．

$\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \ldots, \mathsf{a}_s$ が線形独立であることの定義として，

$$\boxed{k_1\mathsf{a}_1 + k_2\mathsf{a}_2 + \cdots + k_s\mathsf{a}_s = \mathsf{0} \ \Rightarrow\ k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0} \tag{11}$$

を用いてもよい．これは上に述べた定義と同値である．

(ex3) (1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ は線形独立か？

(2) 次の 2 つの条件が同値であることを示せ． (i) $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_s$ が線形従属である． (ii) $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_s$ のうちのあるベクトルが他のベクトルたちの線形結合で表される．

(3) $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_s$ が線形独立であれば，この中からいくつか選んで得た $\mathsf{a}_{i_1}, \ldots, \mathsf{a}_{i_t}$ もまた線形独立であることを示せ．

(ans) (1)

$$k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k_4\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

とおく．これは

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

と同値．これを基本変形で解くと，$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ を得る．(あるいは，階数または行列式を求めて，係数行列が正則であることがわかるので，$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ を得る.） よって線形独立である．

(T1) $\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \ldots, \mathsf{a}_s$ が線形独立のとき，これらの線形結合で表されないベクトル $\mathsf{a}$ があれば，$\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \ldots, \mathsf{a}_s, \mathsf{a}$ は線形独立である．

[3](9) のある項が $+(-k_i)\mathsf{a}_i$ の形のときは，通常 $k_1\mathsf{a}_1 + \cdots - k_i\mathsf{a}_i + \cdots + k_s\mathsf{a}_s$ と略記する．

(∵) $\mathtt{a}_1, \mathtt{a}_2, \ldots, \mathtt{a}_s, \mathtt{a}$ に線形関係

$$k_1\mathtt{a}_1 + k_2\mathtt{a}_2 + \cdots + k_s\mathtt{a}_s + k\mathtt{a} = \mathtt{0} \tag{14}$$

があったとする．ここでもし，$k \neq 0$ ならば，

$$\mathtt{a} = -\frac{k_1}{k}\mathtt{a}_1 - \frac{k_2}{k}\mathtt{a}_2 - \cdots - \frac{k_s}{k}\mathtt{a}_s \tag{15}$$

となり，仮定に反するので $k = 0$．すると (14) より，

$$k_1\mathtt{a}_1 + k_2\mathtt{a}_2 + \cdots + k_s\mathtt{a}_s = \mathtt{0} \tag{16}$$

となり，$\mathtt{a}_1, \mathtt{a}_2, \ldots, \mathtt{a}_s$ が線形独立なので，$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$．ゆえに $\mathtt{a}_1, \mathtt{a}_2, \ldots,$ $\mathtt{a}_s, \mathtt{a}$ は線形独立である． (q.e.d.)

(T2) ベクトル $\mathtt{c}$ が $\mathtt{b}_1, \mathtt{b}_2, \ldots, \mathtt{b}_t$ の線形結合で表され，各 $\mathtt{b}_j$ が $\mathtt{a}_1, \mathtt{a}_2, \ldots, \mathtt{a}_s$ の線形結合で表されるとき，$\mathtt{c}$ は $\mathtt{a}_1, \mathtt{a}_2, \ldots, \mathtt{a}_s$ の線形結合で表される．

(∵) $\mathtt{c} = \sum_{j=1}^{t} k_j\mathtt{b}_j$，かつ，$\mathtt{b}_j = \sum_{i=1}^{s} l_{ji}\mathtt{a}_i$ なので，

$$\mathtt{c} = \sum_{j=1}^{t} k_j \sum_{i=1}^{s} l_{ji}\mathtt{a}_i = \sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{s} k_j l_{ji}\mathtt{a}_i = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} k_j l_{ji}\mathtt{a}_i = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{t} k_j l_{ji}\right)\mathtt{a}_i. \qquad \text{(q.e.d.)} \tag{17}$$

- 4 -（有限次元）線形空間 $V$ から有限個のベクトルをうまく選び，$V$ の任意のベクトルをそれら有限個のベクトルの線形結合で表せるようにできるとき，$V$ は有限次元であるという．有限次元でないときは，無限次元という．今後，線形空間は有限次元のものだけを考えることにする．

- 5 -（基底）線形空間 $V$ のベクトル $\mathtt{e}_1, \mathtt{e}_2, \ldots, \mathtt{e}_n$ が次の 2 つの条件をみたすとき，$\mathtt{e}_1, \mathtt{e}_2, \ldots, \mathtt{e}_n$ をまとめて $V$ の（1 組の）$\boxed{\text{基底}}$ という．

I: $\boxed{\mathtt{e}_1, \mathtt{e}_2, \ldots, \mathtt{e}_n \text{ は線形独立である．}}$

II: $\boxed{V \text{ の任意のベクトルは，} \mathtt{e}_1, \mathtt{e}_2, \ldots, \mathtt{e}_n \text{ の線形結合で表される．}}$

これらの条件は，次のように 1 つの条件にまとめることもできる．

III: $V$ の任意のベクトルは，$\mathtt{e}_1, \mathtt{e}_2, \ldots, \mathtt{e}_n$ の線形結合でただ 1 通りに表される．

(ex4) I かつ II $\iff$ III　を示せ．

(ans) ($\Rightarrow$) I と II がなりたつとする．II より，$V$ の任意のベクトルが $\mathtt{e}_i$ たちで表されることはわかる．そこで $V$ の任意のベクトル $\mathtt{x}$ を取り，

$$\begin{aligned} \mathtt{x} &= k_1\mathtt{e}_1 + k_2\mathtt{e}_2 + \cdots + k_n\mathtt{e}_n \\ \mathtt{x} &= l_1\mathtt{e}_1 + l_2\mathtt{e}_2 + \cdots + l_n\mathtt{e}_n \end{aligned} \tag{18}$$

と表されたとする．ここで辺々引いて

$$\mathtt{0} = (k_1 - l_1)\mathtt{e}_1 + (k_2 - l_2)\mathtt{e}_2 + \cdots + (k_n - l_n)\mathtt{e}_n. \tag{19}$$

I より $\mathtt{e}_1, \ldots, \mathtt{e}_n$ は線形独立なので，$k_1 - l_1 = k_2 - l_2 = \cdots = k_n - l_n = 0$． ∴ $k_1 = l_1$，$k_2 = l_2$，…，$k_n = l_n$．ゆえに III がなりたつ． (q.e.d.)

(⇐) III がなりたつとする．このとき II は明らかになりたつ．今，

$$k_1\mathtt{e}_1 + k_2\mathtt{e}_2 + \cdots + k_n\mathtt{e}_n = \mathtt{0} \tag{20}$$

とおくと，III より，$\mathtt{0}$ はやはり 1 通りにしか表されないので，すべての係数 $k_i$ が 0 にならなければならない．これは，$\mathtt{e}_1, \ldots, \mathtt{e}_n$ が線形独立であることを意味する．(q.e.d.)

(note) 基底に含まれるベクトルの順序が違うときは，異なる基底とみなす．基底を表示するときは，$\langle \mathtt{e}_1, \mathtt{e}_2, \ldots, \mathtt{e}_n \rangle$ のようにかく．

(T3) $V$ を線形空間とし，$\mathtt{a}_1, \mathtt{a}_2, \ldots, \mathtt{a}_r$ を線形独立な $V$ のベクトルとする．このとき，いくらか $V$ のベクトルを追加して，$\langle \mathtt{a}_1, \mathtt{a}_2, \ldots, \mathtt{a}_{r+s} \rangle$ を $V$ の基底にすることができる．

(∵) $V$ が有限次元なので，$V$ の適当なベクトル $\mathtt{b}_1, \ldots, \mathtt{b}_n$ を取り，$V$ の任意のベクトルをこれらの線形結合で表すことができる．ここで，$\mathtt{b}_1, \ldots, \mathtt{b}_n$ のすべてが $\mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_r$ で表せるのであれば，操作を終了する．$\mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_r$ で表せないものがあれば，その中の 1 つを $\mathtt{b}_i$ とする．(T1) より，$\mathtt{b}_i$ を $\mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_r$ に追加して $\mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_r, \mathtt{b}_i$ を作ってもこれらは線形独立である．ここで，$\mathtt{b}_1, \ldots, \mathtt{b}_n$ のすべてが $\mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_r, \mathtt{b}_i$ で表されるのであれば，操作を終了する．それらで表せないものがあれば，その中の 1 つを $\mathtt{b}_j$ とする．(T1) より，$\mathtt{b}_j$ を $\mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_r, \mathtt{b}_i$ に追加してもこれらは線形独立である．以上の操作を繰り返せば，線形独立なベクトル $\mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_r, \mathtt{a}_{r+1}, \ldots, \mathtt{a}_{r+s}$ であって，$\mathtt{b}_1, \ldots, \mathtt{b}_n$ すべてを表せるものが得られる．$V$ の任意のベクトルは $\mathtt{b}_1, \ldots, \mathtt{b}_n$ で表せるので，(T2) より，$V$ の任意のベクトルが $\mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_{r+s}$ で表せることがわかる．これより，$\langle \mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_{r+s} \rangle$ は $V$ の基底となる． (q.e.d.)

(T3) より，$\{\mathtt{0}\}$ でない線形空間にはつねに基底が存在することがわかる．$\{\mathtt{0}\}$ には基底は存在しない．

- 6 -（次元および基底の拡大）線形空間 $V$ の次元を次のように定義する．

(T4) $\{\mathtt{0}\}$ でない線形空間 $V$ を 1 つ取る．$V$ の基底は幾通りも存在するが，それら基底に含まれるベクトルの数は一定である．その数を $V$ の $\boxed{\text{次元}}$ といい，$\dim V$ で表す．

(∵) 9 章 (T1) 参照．

(note) $\{\mathtt{0}\}$ の次元は 0 とする．$\{\mathtt{0}\}$ でない線形空間には基底があるので，その次元は 1 以上である．ゆえに，$\dim V = 0 \iff V = \{\mathtt{0}\}$ がなりたつ．

$V$ を線形空間，$W \neq \{\mathtt{0}\}$ をその部分空間とする．$W$ の基底 $\langle \mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_r \rangle$ を取る．このとき $\langle \mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_r \rangle$ は線形独立なので，(T3) より $V$ の基底 $\langle \mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_r, \mathtt{a}_{r+1}, \ldots, \mathtt{a}_{r+s} \rangle$ を作れる．このような $V$ の基底を，$W$ の基底を拡大して得られた基底という．

(T5) $V$ を線形空間，$W \neq \{\mathtt{0}\}$ をその部分空間とするとき，$W$ の基底を拡大して $V$ の基底を得ることができる．

- 7 -（$K^n$ の基底）$n$ 項基本ベクトルを $\mathtt{e}_1, \ldots, \mathtt{e}_n$ で表すとき，$K^n$ の基底として，$\langle \mathtt{e}_1, \mathtt{e}_2, \ldots, \mathtt{e}_n \rangle$ を取ることができる．ゆえに，

$$\dim K^n = n \tag{21}$$

である．$K^n$ の基底は他にもたくさんあるが，$K^n$ の $n$ 個のベクトル $\mathtt{a}_1, \mathtt{a}_2, \ldots, \mathtt{a}_n$ が $K^n$ の基底であるかどうかについては次の判定法がある．

(T6)

$$\langle \mathtt{a}_1, \mathtt{a}_2, \ldots, \mathtt{a}_n \rangle \text{ が } K^n \text{ の基底} \iff \begin{vmatrix} \mathtt{a}_1 & \mathtt{a}_2 & \ldots & \mathtt{a}_n \end{vmatrix} \neq 0 \tag{22}$$

(∵) 9 章 (T2) 参照．

(ex5) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \mid x, y, z, w \in K \right\}$ は，$K$ 上の線形空間である．$V$ の基底として，$\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ を取れることを確認せよ．したがって，$\dim V = 4$ である．

- 8 -（ベクトルで生成される部分空間）$V$ を $K$ 上の線形空間，$\mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_s$ を $V$ のベクトルとする．このとき集合:

$$W = \{k_1\mathtt{a}_1 + \cdots + k_s\mathtt{a}_s \mid k_1, \ldots, k_s \in K\} \tag{23}$$

は $V$ の部分空間になる．これを $\mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_s$ で生成される（張られる）部分空間（あるいは単に $W$ は $\mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_s$ で生成される）といい，$W = \mathrm{span}\{\mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_s\}$ で表す．[4] $\{\mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_s\}$ を $W$ の生成系という．この用語を用いると，基底の条件 II は次の II' または II" のように言い換えられる．

II': $\boxed{V \text{ は } \mathtt{e}_1, \ldots, \mathtt{e}_n \text{ で生成される．}}$

II": $\boxed{V = \mathrm{span}\{\mathtt{e}_1, \ldots, \mathtt{e}_n\}.}$

(ex6) 上記 $W$ が $V$ の部分空間となることを示せ．

(ans) $W$ の任意のベクトル $\mathtt{x} = k_1\mathtt{a}_1 + \cdots + k_s\mathtt{a}_s$，$\mathtt{x}' = k'_1\mathtt{a}_1 + \cdots + k'_s\mathtt{a}_s$，および任意の $k \in K$ に対して，

$$\begin{aligned} \mathtt{x} + \mathtt{x}' &= (k_1\mathtt{a}_1 + \cdots + k_s\mathtt{a}_s) + (k'_1\mathtt{a}_1 + \cdots + k'_s\mathtt{a}_s) \\ &= (k_1 + k'_1)\mathtt{a}_1 + \cdots + (k_s + k'_s)\mathtt{a}_s = \tilde{k}_1\mathtt{a}_1 + \cdots + \tilde{k}_s\mathtt{a}_s \in W, \\ k\mathtt{x} &= k(k_1\mathtt{a}_1 + \cdots + k_s\mathtt{a}_s) = kk_1\mathtt{a}_1 + \cdots + kk_s\mathtt{a}_s \\ &= k''_1\mathtt{a}_1 + \cdots + k''_s\mathtt{a}_s \in W. \qquad \text{(q.e.d.)} \end{aligned} \tag{24}$$

- 9 -（和空間）$V$ を $K$ 上の線形空間，$W_1, W_2$ を $V$ の 2 つの部分空間とする．

$$W_1 + W_2 = \{\mathtt{w}_1 + \mathtt{w}_2 \mid \mathtt{w}_1 \in W_1,\ \mathtt{w}_2 \in W_2\} \tag{25}$$

を $W_1$ と $W_2$ の $\boxed{\text{和}}$ または $\boxed{\text{和空間}}$ という．これは $V$ の部分空間である．$W_1$ と $W_2$ の $\boxed{\text{共通部分}}$ $W_1 \cap W_2$ もまた $V$ の部分空間になる．

(ex7) $W_1 + W_2$ および $W_1 \cap W_2$ が $V$ の部分空間になることを示せ．

(ans) $W_1 + W_2$ が部分空間になることを示す．$W_1 + W_2$ の任意のベクトル $\mathtt{w}_1 + \mathtt{w}_2$，$\mathtt{w}'_1 + \mathtt{w}'_2$ ($\mathtt{w}_1, \mathtt{w}'_1 \in W_1$, $\mathtt{w}_2, \mathtt{w}'_2 \in W_2$) を取る．また任意の $k \in K$ を取る．$W_1, W_2$ が部分空間なので，$\mathtt{w}_1 + \mathtt{w}'_1 \in W_1$，$\mathtt{w}_2 + \mathtt{w}'_2 \in W_2$ がなりたつ．ゆえに，

$$(\mathtt{w}_1 + \mathtt{w}_2) + (\mathtt{w}'_1 + \mathtt{w}'_2) = (\mathtt{w}_1 + \mathtt{w}'_1) + (\mathtt{w}_2 + \mathtt{w}'_2) \in W_1 + W_2. \tag{26}$$

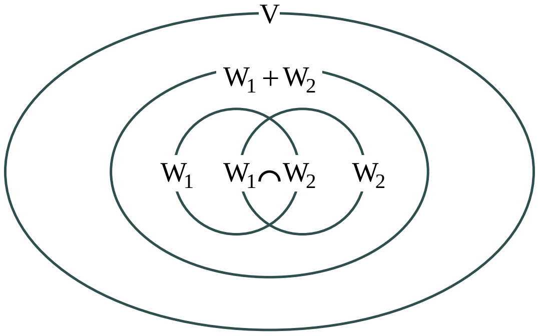
同様に $W_1, W_2$ が部分空間なので，$k\mathtt{w}_1 \in W_1$，$k\mathtt{w}_2 \in W_2$ がなりたつ．ゆえに，

$$k(\mathtt{w}_1 + \mathtt{w}_2) = k\mathtt{w}_1 + k\mathtt{w}_2 \in W_1 + W_2. \qquad \text{(q.e.d.)} \tag{27}$$

$W_1 \cap W_2$ が部分空間になることを示す．$W_1 \cap W_2$ の任意のベクトル $\mathtt{x}, \mathtt{y}$，および任意の $k \in K$ を取る．$\mathtt{x}, \mathtt{y} \in W_1$ より，$\mathtt{x} + \mathtt{y} \in W_1$．同様に $\mathtt{x}, \mathtt{y} \in W_2$ より，$\mathtt{x} + \mathtt{y} \in W_2$．

[4] $W = \mathrm{span}\{\mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_s\}$ は，$\{\mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_s\}$ を含むような $V$ のすべての部分空間の共通部分となっている．したがって $W$ はまた，$\{\mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_s\}$ を含む最小の部分空間でもある．

それゆえ，$\mathtt{x}+\mathtt{y} \in W_1 \cap W_2$．全く同様にして，$k\mathtt{x} \in W_1$，$k\mathtt{x} \in W_2$ も言えるので，$k\mathtt{x} \in W_1 \cap W_2$．　(q.e.d.)




(note) 3 つ以上の部分空間の共通部分も部分空間になる．

(note) 一般に $W_1 \cup W_2$ は $V$ の部分空間にはならない．

部分空間の次元について次がなりたつ．これを 部分空間の次元公式 という.

(T7) $W_1$，$W_2$ を $V$ の部分空間とするとき，

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2). \tag{28}$$

(∵) $W_1 \cap W_2$ の基底を $\langle \mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_r \rangle$ とする．(T5) より，この基底を拡大して，$W_1$ の基底: $\langle \mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_r, \mathtt{b}_1, \ldots, \mathtt{b}_s \rangle$，および $W_2$ の基底: $\langle \mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_r, \mathtt{c}_1, \ldots, \mathtt{c}_t \rangle$ を作れる．ここで，$\langle \mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_r, \mathtt{b}_1, \ldots, \mathtt{b}_s, \mathtt{c}_1, \ldots, \mathtt{c}_t \rangle$ が $W_1 + W_2$ の基底となることを示す．

まず線形独立であることを示す．次の線形関係があったとする．

$$\begin{aligned} & k_1\mathtt{a}_1 + \cdots + k_r\mathtt{a}_r + l_1\mathtt{b}_1 + \cdots + l_s\mathtt{b}_s + m_1\mathtt{c}_1 + \cdots + m_t\mathtt{c}_t = \mathtt{0}. \\ \therefore \quad & k_1\mathtt{a}_1 + \cdots + k_r\mathtt{a}_r + l_1\mathtt{b}_1 + \cdots + l_s\mathtt{b}_s = -m_1\mathtt{c}_1 - \cdots - m_t\mathtt{c}_t. \end{aligned} \tag{29}$$

ここで，左辺は明らかに $W_1$ のベクトルを表し，右辺は明らかに $W_2$ のベクトルを表している．したがって，両辺は $W_1 \cap W_2$ のベクトルを表している．ところが $\langle \mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_r, \mathtt{b}_1, \ldots, \mathtt{b}_s \rangle$ が $W_1$ の基底なので，左辺を基底で表す方法の一意性より，$l_1 = \cdots = l_s = 0$．(29) に戻って，

$$k_1\mathtt{a}_1 + \cdots + k_r\mathtt{a}_r + m_1\mathtt{c}_1 + \cdots + m_t\mathtt{c}_t = \mathtt{0}. \tag{30}$$

さらに $\langle \mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_r, \mathtt{c}_1, \ldots, \mathtt{c}_t \rangle$ が $W_2$ の基底なので，

$$k_1 = \cdots = k_r = m_1 = \cdots = m_t = 0. \tag{31}$$

次に，$W_1 + W_2$ の任意のベクトルは，$\mathtt{w}_1 + \mathtt{w}_2$ ($\mathtt{w}_1 \in W_1$, $\mathtt{w}_2 \in W_2$) の形にかける．ここで，$\mathtt{w}_1, \mathtt{w}_2$ は基底を用いて，

$$\begin{aligned} \mathtt{w}_1 &= k_1\mathtt{a}_1 + \cdots + k_r\mathtt{a}_r + l_1\mathtt{b}_1 + \cdots + l_s\mathtt{b}_s \\ \mathtt{w}_2 &= k_1'\mathtt{a}_1 + \cdots + k_r'\mathtt{a}_r + m_1\mathtt{c}_1 + \cdots + m_t\mathtt{c}_t \end{aligned} \tag{32}$$

と表せるので，

$$\begin{aligned} \mathtt{w}_1 + \mathtt{w}_2 \quad &= (k_1 + k_1')\mathtt{a}_1 + \cdots + (k_r + k_r')\mathtt{a}_r + l_1\mathtt{b}_1 + \cdots + l_s\mathtt{b}_s \\ &\quad + m_1\mathtt{c}_1 + \cdots + m_t\mathtt{c}_t \end{aligned} \tag{33}$$

となり，$\mathtt{w}_1 + \mathtt{w}_2$ は $\mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_r, \mathtt{b}_1, \ldots, \mathtt{b}_s, \mathtt{c}_1, \ldots, \mathtt{c}_t$ の線形結合で表せる．

これで $\langle \mathtt{a}_1,\ldots,\mathtt{a}_r,\mathtt{b}_1,\ldots,\mathtt{b}_s,\mathtt{c}_1,\ldots,\mathtt{c}_t\rangle$ が $W_1+W_2$ の基底となることがわかった．そこで各部分空間の次元を考えると，

$$\begin{aligned}&\dim W_1+\dim W_2=(r+s)+(r+t)=(r+s+t)+r\\&=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2).\qquad\text{(q.e.d.)}\end{aligned}\tag{34}$$

- 10 -（直和）$W=W_1+W_2$ の任意のベクトルが，

$$\mathtt{w}_1+\mathtt{w}_2\qquad(\mathtt{w}_1\in W_1,\ \mathtt{w}_2\in W_2)\tag{35}$$

の形でただ 1 通りに表されるとき，$W$ は $W_1$ と $W_2$ の $\boxed{\text{直和}}$ であるといい，$W=W_1\oplus W_2$ で表す．この定義は，$\mathtt{w}_1\in W_1$，$\mathtt{w}_2\in W_2$ とするとき，

$$\mathtt{w}_1+\mathtt{w}_2=\mathtt{0}\ \Rightarrow\ \mathtt{w}_1=\mathtt{w}_2=\mathtt{0}\tag{36}$$

と同値である．

(T8) $W=W_1+W_2$ とするとき，

$$W=W_1\oplus W_2\ \overset{(1)}{\Longleftrightarrow}\ W_1\cap W_2=\{\mathtt{0}\}\ \overset{(2)}{\Longleftrightarrow}\ \dim W=\dim W_1+\dim W_2.\tag{37}$$

($\because$) (2) は (T7) より明らか．(1) を示す．

($\Rightarrow$) 背理法による．$W=W_1\oplus W_2$ とする．ここで，$W_1\cap W_2\neq\{\mathtt{0}\}$ とすると，$\mathtt{a}\in W_1\cap W_2$ であって，$\mathtt{a}\neq\mathtt{0}$ となるものがある．このとき，$W_1\cap W_2$ は部分空間なので，$-\mathtt{a}\in W_1\cap W_2$ は明らか．すると $\mathtt{0}\in W$ は，$\mathtt{0}=\mathtt{0}+\mathtt{0}=\mathtt{a}+(-\mathtt{a})$ というように，$W_1$ のベクトルと $W_2$ のベクトルの和で 2 通りに表される．（矛盾） (q.e.d.)

($\Leftarrow$) $W_1\cap W_2=\{\mathtt{0}\}$ とする．このとき，$W$ の任意のベクトル $\mathtt{w}$ に対して，

$$\mathtt{w}=\mathtt{w}_1+\mathtt{w}_2=\mathtt{w}_1'+\mathtt{w}_2'\qquad(\mathtt{w}_1,\mathtt{w}_1'\in W_1,\ \mathtt{w}_2,\mathtt{w}_2'\in W_2)\tag{38}$$

となったとすると，

$$W_1\ni\mathtt{w}_1-\mathtt{w}_1'=\mathtt{w}_2'-\mathtt{w}_2\in W_2\tag{39}$$

を得る．よって，両辺は $W_1\cap W_2$ のベクトル，すなわち $\mathtt{0}$ である．

$$\therefore\quad\mathtt{w}_1-\mathtt{w}_1'=\mathtt{w}_2'-\mathtt{w}_2=\mathtt{0}.\qquad\therefore\quad\mathtt{w}_1=\mathtt{w}_1',\quad\mathtt{w}_2=\mathtt{w}_2'.\tag{40}$$

これは $W=W_1\oplus W_2$ を示す． (q.e.d.)

- 11 -（いくらかの部分空間の和，直和）$V$ を $K$ 上の線形空間，$W_1,W_2,\ldots,W_s$ を $V$ の部分空間とする．

$$W_1+\cdots+W_s=\{\mathtt{w}_1+\cdots+\mathtt{w}_s\mid\ \mathtt{w}_i\in W_i\quad(i=1,\ldots,s)\}\tag{41}$$

を，$W_1,\ldots,W_s$ の和または和空間という．これは $V$ の部分空間になる．なぜならば，$W_1+\cdots+W_s$ の任意のベクトル $\mathtt{w}_1+\cdots+\mathtt{w}_s$，$\mathtt{w}_1'+\cdots+\mathtt{w}_s'$，および任意の $k\in K$ に対して，

$$\begin{aligned}(\mathtt{w}_1+\cdots+\mathtt{w}_s)+(\mathtt{w}_1'+\cdots+\mathtt{w}_s')&=(\mathtt{w}_1+\mathtt{w}_1')+\cdots+(\mathtt{w}_s+\mathtt{w}_s')\in W_1+\cdots+W_s,\\k(\mathtt{w}_1+\cdots+\mathtt{w}_s)&=k\mathtt{w}_1+\cdots+k\mathtt{w}_s\in W_1+\cdots+W_s\end{aligned}\tag{42}$$

となるからである．

$W=W_1+\cdots+W_s$ の任意のベクトルが，

$$\mathtt{w}_1+\cdots+\mathtt{w}_s \qquad (\mathtt{w}_1\in W_1,\ldots,\mathtt{w}_s\in W_s) \tag{43}$$

の形でただ 1 通りに表されるとき，$W$ は $W_1,\ldots,W_s$ の直和であるといい，$W=W_1\oplus\cdots\oplus W_s$ で表す．この定義は，$\mathtt{w}_1\in W_1$，...，$\mathtt{w}_s\in W_s$ とするとき，

$$\mathtt{w}_1+\cdots+\mathtt{w}_s=\mathtt{0} \ \Rightarrow\ \mathtt{w}_1=\cdots=\mathtt{w}_s=\mathtt{0} \tag{44}$$

と同値である．次がなりたつ．

(T9) $W=W_1\oplus\cdots\oplus W_s$ とする．$W_1,\ldots,W_s$ の各基底をすべて並べたものは $W$ の基底をなす．

($\because$) $W_1$ の基底を $\langle\mathtt{a}_1,\mathtt{a}_2,\ldots,\mathtt{a}_p\rangle$，$W_2$ の基底を $\langle\mathtt{b}_1,\mathtt{b}_2,\ldots,\mathtt{b}_q\rangle$，...，$W_s$ の基底を $\langle\mathtt{c}_1,\mathtt{c}_2,\ldots,\mathtt{c}_r\rangle$ とする．これらの基底を並べて $\mathbf{E}=\langle\mathtt{a}_1,\ldots,\mathtt{a}_p,\mathtt{b}_1,\ldots,\mathtt{b}_q,\ldots,\mathtt{c}_1,\ldots,\mathtt{c}_r\rangle$ を作ると，これが $W$ の基底になることを示す．

（$W$ を生成すること）$W$ の任意のベクトル $\mathtt{w}$ に対して，$\mathtt{w}=\mathtt{w}_1+\cdots+\mathtt{w}_s$ ($\mathtt{w}_i\in W_i$) と表され，$\mathtt{w}_i$ が $\mathbf{E}$ で表されるので，$\mathtt{w}$ は $\mathbf{E}$ で表される．

（線形独立なこと）$k_1\mathtt{a}_1+\cdots+k_p\mathtt{a}_p+l_1\mathtt{b}_1+\cdots+l_q\mathtt{b}_q+\cdots+m_1\mathtt{c}_1+\cdots+m_r\mathtt{c}_r=\mathtt{0}$ とおく．$k_1\mathtt{a}_1+\cdots+k_p\mathtt{a}_p=\mathtt{w}_1$，$l_1\mathtt{b}_1+\cdots+l_q\mathtt{b}_q=\mathtt{w}_2$，... とかけば，$\mathtt{w}_1+\mathtt{w}_2+\cdots+\mathtt{w}_s=\mathtt{0}$ となるが，$W$ が直和であることから $\mathtt{0}$ の表し方は 1 通りなので，$\mathtt{w}_1=\mathtt{w}_2=\cdots=\mathtt{w}_s=\mathtt{0}$ となる．したがって，係数 $k_1,\ldots,k_p,\ldots,m_1,\ldots,m_r$ はすべて 0 になる．

こうして $\mathbf{E}$ が $W$ の基底となる． (q.e.d.)

(T10) $W=W_1+\cdots+W_s$ とするとき，

$$W=W_1\oplus\cdots\oplus W_s \iff \dim W=\dim W_1+\cdots+\dim W_s. \tag{45}$$

($\because$) ($\Rightarrow$) (T9) より明らか．

($\Leftarrow$) $\dim W=\dim W_1+\cdots+\dim W_s$ とする．(T9) の証明同様，$W_1,W_2,\ldots,W_s$ の基底を並べて $\mathbf{E}=\langle\mathtt{a}_1,\ldots,\mathtt{a}_p,\mathtt{b}_1,\ldots,\mathtt{b}_q,\ldots,\mathtt{c}_1,\ldots,\mathtt{c}_r\rangle$ を作ると，これが $W$ の基底になることを示す．

（$W$ を生成すること）(T9) の証明と同様．

（線形独立なこと）もし $\mathbf{E}$ が線形従属であるならば，$\mathbf{E}$ のあるベクトルが他のベクトルで表されるはずで，したがって，そのベクトルを除いて $\mathbf{E}'$ を作っても $W$ を生成する．この操作を繰り返せばやがて $W$ の基底 $\mathbf{E}^{(u)}$ に到達するが，$\dim W=\dim W_1+\cdots+\dim W_s$ より $u=0$ でなければならない．すなわち，$\mathbf{E}$ は $W$ の基底になる．

そこで，$W$ の任意のベクトル $\mathtt{w}$ が，$\mathtt{w}=\mathtt{w}_1+\cdots+\mathtt{w}_s=\mathtt{w}'_1+\cdots+\mathtt{w}'_s$ と表せたとすると，各 $\mathtt{w}_i$，$\mathtt{w}'_i$ を $W_i$ の上述の基底で表すことで，$\mathtt{w}$ は $\mathbf{E}$ により 2 通りに表される:

$$\begin{aligned}\mathtt{w}&=k_1\mathtt{a}_1+\cdots+k_p\mathtt{a}_p+l_1\mathtt{b}_1+\cdots+l_q\mathtt{b}_q+\cdots+m_1\mathtt{c}_1+\cdots+m_r\mathtt{c}_r\\ \mathtt{w}&=k'_1\mathtt{a}_1+\cdots+k'_p\mathtt{a}_p+l'_1\mathtt{b}_1+\cdots+l'_q\mathtt{b}_q+\cdots+m'_1\mathtt{c}_1+\cdots+m'_r\mathtt{c}_r.\end{aligned} \tag{46}$$

これらの係数が等しいことから，$\mathtt{w}_i=\mathtt{w}'_i$ $(i=1,\ldots,s)$ が言える． (q.e.d.)

(ex8) $V=V^3$ の部分空間 $W,X$ を次のように定める．

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid 2x+3y-3z=0\right\},\quad X=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid \begin{array}{l}x-y+6z=0\\3x+2y+3z=0\end{array}\right\} \tag{47}$$

(1) $W+X$ の基底を求めよ． (2) $W\cap X$ の基底を求めよ．

(3) $W+X$ は直和か？

(ans) (1) まず $W$ の基底を求めるために，$2x+3y-3z=0$ を解く．

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}. \qquad \therefore\ \mathtt{x} = \alpha\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \tilde{\alpha}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{\beta}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{48}$$

ゆえに $W$ の基底は，$\left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

次に $X$ の 1 次方程式系を解く．

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & 5 & -15 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}. \\ &\therefore\ \mathtt{x} = \alpha\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{49}$$

ゆえに $X$ の基底は，$\left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

これより $W+X$ の基底を求める．基底を並べた行列を列変形して階段状にする．

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{50}$$

ゆえに $W+X$ の基底は，$\left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(2) $W \cap X$ を求めるには

$$\begin{cases} 2x+3y-3z=0 \\ x-y+6z=0 \\ 3x+2y+3z=0 \end{cases} \tag{51}$$

を解けばよい．

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & 5 & -15 \\ 0 & 5 & -15 \end{pmatrix} \longrightarrow \\ &\begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \therefore\ \mathtt{x} = \alpha\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{52}$$

ゆえに $W \cap X$ の基底は，$\left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(3) $W \cap X \neq \{\mathtt{0}\}$ なので，直和ではない．

（別解）$\dim(W+X) = 2$，$\dim W + \dim X = 2+1 = 3$． $\therefore\ \dim(W+X) \neq \dim W + \dim X$．ゆえに直和ではない．

# 9章 基底に関する基本定理

☆☆

キーワード: 線形空間の基底，次元，$K^n$ の基底

- 1 -（線形空間の次元）線形空間の次元を定義するのには次の定理が必要である．

(T1) 線形空間 $V$ を 1 つ固定する．このとき $V$ の基底に含まれるベクトルの数は基底の選び方によらずに一定である．この数を $V$ の次元と呼ぶ．

($\because$) 背理法による．$V$ の 2 つの基底 $\mathbf{E} = \langle \mathtt{e}_1, \mathtt{e}_2, \dots, \mathtt{e}_m \rangle$，$\mathbf{F} = \langle \mathtt{f}_1, \mathtt{f}_2, \dots, \mathtt{f}_n \rangle$ $(m < n)$ があったとする．このとき $\mathtt{e}_1, \dots, \mathtt{e}_m$ のうちで $\mathtt{f}_2, \dots, \mathtt{f}_n$ の線形結合では表せないものが必ず存在する．なぜならば，仮に $\mathtt{e}_1, \dots, \mathtt{e}_m$ のすべてが $\mathtt{f}_2, \dots, \mathtt{f}_n$ で表せるとしよう．すると $\mathtt{f}_1$ が $\mathtt{e}_1, \dots, \mathtt{e}_m$ で表されることを考え合わせると，$\mathtt{f}_1$ が $\mathtt{f}_2, \dots, \mathtt{f}_n$ で表せることになってしまう．これは $\mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_n$ の線形独立性に反する．そこで $\mathtt{f}_2, \dots, \mathtt{f}_n$ で表せないもののうちの 1 つを選びそれを $\mathtt{e}_i$ とする．すると $\mathbf{F}' = \langle \mathtt{e}_i, \mathtt{f}_2, \mathtt{f}_3 \dots, \mathtt{f}_n \rangle$ は $V$ の基底となる．以下それを示そう．

まず，$\mathbf{F}'$ は線形独立なベクトルに，これで表せないベクトルを追加したので線形独立である．(8 章 (T1))

次に $\mathtt{f}_1$ が $\mathbf{F}'$ で表せることを示す．$\mathbf{F}$ は基底だから $\mathtt{e}_i = c_1\mathtt{f}_1 + \cdots + c_n\mathtt{f}_n$．ここでもし $c_1 = 0$ ならば $\mathtt{e}_i$ が $\mathtt{f}_2, \dots, \mathtt{f}_n$ で表されることになってしまうので $c_1 \neq 0$．$\therefore$ $\mathtt{f}_1 = \frac{1}{c_1}(\mathtt{e}_i - c_2\mathtt{f}_2 - \cdots - c_n\mathtt{f}_n)$．ゆえに $\mathtt{f}_1$ が $\mathbf{F}'$ で表せることがわかった．また $\mathbf{F}'$ は $\mathtt{f}_2, \dots, \mathtt{f}_n$ を含んでおり，$\mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_n$ で $V$ の任意のベクトルが表されるので，結局 $\mathbf{F}'$ で $V$ の任意のベクトルが表されることになる．

こうして $\mathbf{F}'$ は $V$ の基底となる．そこで $\mathbf{F}$ から $\mathbf{F}'$ を作ったのと同様にして，今度は $\mathtt{f}_2$ を $\mathtt{e}_1, \dots, \mathtt{e}_m$ のうちのどれかでおきかえることができる．こうして新たな $V$ の基底 $\mathbf{F}''$ が得られる．これを繰り返すと，$\mathbf{F}$ のすべてのベクトルが $\mathtt{e}_1, \dots, \mathtt{e}_m$ のどれかに次々におきかえられていき，最後には $V$ の基底 $\mathbf{G} = \langle \mathtt{e}_{i_1}, \mathtt{e}_{i_2}, \dots, \mathtt{e}_{i_n} \rangle$ を得る．ところが $m < n$ だから $\mathbf{G}$ には同じベクトルが含まれている．よって $\mathbf{G}$ は線形独立にはならない．これは $\mathbf{G}$ が基底であることに反する．(矛盾)　(q.e.d.)

- 2 -（$K^n$ の基底）$K^n$ の $n$ 個のベクトル $\mathtt{a}_1, \mathtt{a}_2, \dots, \mathtt{a}_n$ が $K^n$ の基底であるかどうかについては次の判定法がある．

(T2)

$$\langle \mathtt{a}_1, \mathtt{a}_2, \dots, \mathtt{a}_n \rangle \text{ が } K^n \text{ の基底} \iff \left| \begin{array}{cccc} \mathtt{a}_1 & \mathtt{a}_2 & \dots & \mathtt{a}_n \end{array} \right| \neq 0 \qquad (1)$$

($\because$) この式の左の条件を (L)，右の条件を (R) とし，さらに次の条件を考える．

(R'): $A = \begin{pmatrix} \mathtt{a}_1 & \mathtt{a}_2 & \dots & \mathtt{a}_n \end{pmatrix}$ が正則．

(I): $\mathtt{a}_1, \mathtt{a}_2, \dots, \mathtt{a}_n$ が線形独立．

(II): $K^n$ の任意のベクトルが，$\mathtt{a}_1, \mathtt{a}_2, \dots, \mathtt{a}_n$ の線形結合で表される．

これらの条件について次の関係が証明され，その結果 (L) と (R) の同値性が得られる．

$$\boxed{\boxed{(\mathrm{L})} \iff \left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I}) \overset{(\mathrm{i})}{\iff} \\ \\ (\mathrm{II}) \overset{(\mathrm{ii})}{\iff} \end{array}\right. \boxed{(\mathrm{R'})} \iff \boxed{(\mathrm{R})}} \tag{2}$$

ここでは，(i) および (ii) の $\iff$ を示す．

(i)($\iff$) $A = \begin{pmatrix} \mathtt{a}_1 & \mathtt{a}_2 & \dots & \mathtt{a}_n \end{pmatrix}$ として，対偶:

$$A \text{ が正則でない} \iff \mathtt{a}_1, \dots, \mathtt{a}_n \text{ は線形従属} \tag{3}$$

を示せばよい．6 章 (T2) より，

$$A \text{ が正則でない} \iff A\mathtt{x} = \mathtt{0} \text{ は自明でない解を持つ} \tag{4}$$

ここで,『$A\mathtt{x} = \mathtt{0}$ は自明でない解を持つ $\iff$ $\mathtt{a}_1, \dots, \mathtt{a}_n$ は線形従属』が言えるので，(3) が示された． (q.e.d.)

（別証）1 次方程式系の理論を使わない証明も載せておく．(i)($\Rightarrow$) の代わりに (3)($\Rightarrow$) を示す．$A$ が正則でなく，$r(A) = r < n$ とする．$A$ は基本変形により，$F_{nn}(r)$ にできる．すなわち正則行列 $P, Q$ により，$PAQ = F_{nn}(r)$．よって，

$$AQ = P^{-1}F_{nn}(r) = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

ここに，右辺の $\mathtt{0}$ の列数は $(n-r)$．そこで，$Q$ の $(r+1)$ 列を $\mathtt{q} = {}^t(q_1, \dots, q_n)$ とすれば，$A\mathtt{q} = \mathtt{0}$ を得る．ゆえに，$q_1\mathtt{a}_1 + q_2\mathtt{a}_2 + \cdots + q_n\mathtt{a}_n = \mathtt{0}$．ここで，$Q$ の正則性より $\mathtt{q} \neq \mathtt{0}$ なので，$q_i$ たちの中に 0 でないものが存在する．これより $\mathtt{a}_1, \dots, \mathtt{a}_n$ の自明でない線形関係が得られたので，$\mathtt{a}_1, \dots, \mathtt{a}_n$ は線形従属となる． (q.e.d.)

(i)($\Leftarrow$) $A$ を正則とする．$k_1\mathtt{a}_1 + k_2\mathtt{a}_2 + \cdots + k_n\mathtt{a}_n = \mathtt{0}$ とする．これは，$\mathtt{k} = {}^t(k_1, \dots, k_n)$ とおけば，$A\mathtt{k} = \mathtt{0}$ とかける．ところが $A$ が正則なので，$\mathtt{k} = \mathtt{0}$．すなわち，$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$．したがって，$\mathtt{a}_1, \dots, \mathtt{a}_n$ は線形独立である． (q.e.d.)

(ii)($\Rightarrow$) $K^n$ の任意のベクトルが，$\mathtt{a}_1, \mathtt{a}_2, \dots, \mathtt{a}_n$ の線形結合で表されるとする．したがって，特に $n$ 項基本ベクトル: $\mathtt{e}_1, \mathtt{e}_2, \dots, \mathtt{e}_n$ についても，各々が $\mathtt{a}_1, \dots, \mathtt{a}_n$ の線形結合で表される．それを行列で表すと，

$$AQ = \begin{pmatrix} \mathtt{a}_1 & \dots & \mathtt{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathtt{e}_1 & \dots & \mathtt{e}_n \end{pmatrix} = E_n. \tag{6}$$

これは，$A$ が正則であることを示す． (q.e.d.)

(ii)($\Leftarrow$) $A$ を正則とする．$K^n$ の任意のベクトル $\mathtt{x}$ を取る．$k_1\mathtt{a}_1 + k_2\mathtt{a}_2 + \cdots + k_n\mathtt{a}_n = \mathtt{x}$ とおくとき，これを行列でかけば，

$$A\mathtt{k} = \mathtt{x}. \tag{7}$$

$A$ は正則なので，これをみたす係数は，$\mathtt{k} = A^{-1}\mathtt{x}$ と求まる．これで，$\mathtt{x}$ は $\mathtt{a}_1, \mathtt{a}_2, \dots, \mathtt{a}_n$ の線形結合で表された． (q.e.d.)

(ex1) $V = \mathbf{C}^4$ とする．$\left\langle \begin{pmatrix} c \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ c \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ c \end{pmatrix} \right\rangle$ が $V$ の基底となるための必要十分条件を求めよ．

(ans)

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} c & 1 & 2 & 3 \\ 3 & c & 1 & 2 \\ 2 & 3 & c & 1 \\ 1 & 2 & 3 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & 1 & 2 & c+6 \\ 3 & c & 1 & c+6 \\ 2 & 3 & c & c+6 \\ 1 & 2 & 3 & c+6 \end{vmatrix} = (c+6)\begin{vmatrix} c & 1 & 2 & 1 \\ 3 & c & 1 & 1 \\ 2 & 3 & c & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (c+6)\begin{vmatrix} c & 1-c & 1 & 1 \\ 3 & c-3 & 1-c & 1 \\ 2 & 1 & c-3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (c+6)\begin{vmatrix} c-1 & -c & 0 & 1 \\ 2 & c-4 & -c & 1 \\ 1 & 0 & c-4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (c+6)\begin{vmatrix} c-1 & -c & 0 \\ 2 & c-4 & -c \\ 1 & 0 & c-4 \end{vmatrix} = (c+6)\left[(c-1)(c-4)^2 + c^2 + 2c(c-4)\right] \\
&= (c+6)(c^3 - 6c^2 + 16c - 16) = (c+6)(c-2)(c^2 - 4c + 8). \\
&\therefore\ \ c \neq -6, 2, 2 \pm 2i.
\end{aligned} \tag{8}$$

# 10章　線形写像の基礎

☆9☆

キーワード: 写像，変換，全射，単射，1対1対応，合成，逆写像，
制限，拡張，線形性，線形写像，線形変換，和，スカラー倍，同型写像，同型，
線形写像の像，核，階数，行列が表す線形写像，像と核の基底，
極大線形独立系，小行列式，次元公式

- 0 -（写像と変換）$V, W$ を集合とする．$V$ の各元 $x$ に対し，$x$ を $W$ のただ1つの元 $T(x)$ に対応させる規則 $T$ を，$V$ から $W$ への写像または関数という．この $T$ を記号的に

$$T : V \longrightarrow W \tag{1}$$

で表す．$V$ を $T$ の始域（定義域）といい，$W$ を $T$ の終域という．$W$ の部分集合:

$$\{T(x) \mid x \in V\} \tag{2}$$

のことを $T$ の像といい，$\mathrm{Im}\, T$ または $T(V)$ で表す．なお，$T$ が大文字なので，$T(x) = Tx$ と略記することが多い．$V$ の部分集合 $X$ に対して，

$$T(X) = \{Tx \mid x \in X\} \tag{3}$$

を $T$ による $X$ の像という．特に，$x \in V$ に対して $Tx$ を $T$ による $x$ の像という．また，$W$ の部分集合 $Y$ に対して，

$$T^{-1}(Y) = \{x \in V \mid Tx \in Y\} \tag{4}$$

を $T$ による $Y$ の逆像という．$Y = \{y\}$ のときは，$T^{-1}(\{y\}) = T^{-1}(y)$ と略記する．すなわち，

$$T^{-1}(y) = \{x \in V \mid Tx = y\}. \tag{5}$$

$T$ が $V$ から $V$ への写像のときは，$T$ を $V$ の変換という．

$T$ を $V$ から $W$ への写像とする．$W$ の任意の元 $y$ に対して，$Tx = y$ となる $V$ の元 $x$ が存在するとき，$T$ を全射という．全射は $\mathrm{Im}\, T = W$ をみたすことと定義しても同じことである．$x, x' \in V$ のとき，$x \neq x' \Rightarrow Tx \neq Tx'$ をみたすとき,（あるいは，$Tx = Tx' \Rightarrow x = x'$ をみたすとき）$T$ を単射という．$T$ が全射かつ単射のとき，全単射または1対1対応という．

$V, W, X$ を集合とし，$V$ から $W$ への写像 $T$ と $W$ から $X$ への写像 $S$ があるとき，$T$ と $S$ の合成 $S \circ T$ を

$$(S \circ T)x = S(Tx) \qquad (x \in V) \tag{6}$$

で定義する．これは $V$ から $X$ への写像とみなされ，$ST$ ともかく．写像の合成を合成写像，変換の合成を合成変換という．

写像 $T:V\longrightarrow W$ が1対1対応ならば，写像 $S:W\longrightarrow V$ であって，

$$\begin{array}{ll} (ST)x=S(Tx)=x & (x\in V) \\ (TS)y=T(Sy)=y & (y\in W) \end{array} \tag{7}$$

をみたすものがただ1つ存在する．この $S$ を $T$ の逆写像といい，$S=T^{-1}$ で表す．このとき，$T$ もまた $S$ の逆写像になっており，$(T^{-1})^{-1}=T$ がなりたつ．$T$ が $V$ の変換の場合は，$T^{-1}$ をその逆変換という．

写像 $T:V\longrightarrow W$ および $X\subset V$ に対して，$T$ の $X$ への制限 $T|_X$ とは，写像 $T|_X:X\longrightarrow W$ であって，$T|_X(x)=Tx\ (x\in X)$ をみたすもののことである．$S$ が $T$ の適当な集合への制限であるとき，$T$ を $S$ の拡張という．

- 1 -（線形写像）$V,W$ を $K$ 上の2つの線形空間とする．$V$ から $W$ への写像 $T$ が $\boxed{\text{線形性}}$ と呼ばれる次の性質を持つとき，$T$ を $V$ から $W$ への $\boxed{\text{線形写像}}$ という.[1]

$$\begin{array}{ll} T(\mathtt{x}+\mathtt{y})=T\mathtt{x}+T\mathtt{y} & (\mathtt{x},\mathtt{y}\in V) \\ T(k\mathtt{x})=k(T\mathtt{x}) & (\mathtt{x}\in V,\ k\in K) \end{array} \tag{8}$$

特に $V$ から $V$ への線形写像のことを，$V$ の $\boxed{\text{線形変換}}$ という．(8) より線形写像 $T$ は，次をみたす:

$$T(k_1\mathtt{x}_1+\cdots+k_n\mathtt{x}_n)=k_1T\mathtt{x}_1+\cdots+k_nT\mathtt{x}_n. \tag{9}$$

$V$ の変換 $T$ が,

$$T\mathtt{x}=\mathtt{x} \qquad (\mathtt{x}\in V) \tag{10}$$

をみたすとき，$T$ を $V$ の恒等変換という．このような変換を $I_V$ または $I$ で表すことにする．$I$ は $V$ の線形変換である．

(ex1) (1) $T(\mathtt{x}_1+\cdots+\mathtt{x}_n)=T\mathtt{x}_1+\cdots+T\mathtt{x}_n$ および (9) を示せ． (2) $I$ は $V$ の線形変換であることを示せ． (3) 線形写像 $T:V\longrightarrow W$ に対して，$T\mathtt{0}=\mathtt{0}$ を示せ．

- 2 -（合成，和，スカラー倍）$V,W,X$ を $K$ 上の3つの線形空間とし，$T$ を $V$ から $W$ への線形写像，$S$ を $W$ から $X$ への線形写像とする．このとき，合成 $S\circ T=ST$ を上記 (6) で作ることができる．

(T1) $V$ から $W$ への線形写像 $T$ と，$W$ から $X$ への線形写像 $S$ の合成 $ST$ は，$V$ から $X$ への線形写像である．

($\because$) $ST$ が $V$ から $X$ への写像であることは確かなので，$ST$ の線形性を示す．任意の $\mathtt{x},\mathtt{y}\in V$ に対して，

$$\begin{aligned} (ST)(\mathtt{x}+\mathtt{y}) &= S(T(\mathtt{x}+\mathtt{y}))=S(T\mathtt{x}+T\mathtt{y})=S(T\mathtt{x})+S(T\mathtt{y}) \\ &= (ST)\mathtt{x}+(ST)\mathtt{y}. \end{aligned} \tag{11}$$

任意の $\mathtt{x}\in V$，$k\in K$ に対して，

$$(ST)(k\mathtt{x})=S(T(k\mathtt{x}))=S(kT\mathtt{x})=kS(T\mathtt{x})=k(ST)\mathtt{x}. \qquad \text{(q.e.d.)} \tag{12}$$

[1] 紛れのない場合は，$k(T\mathtt{x})=kT\mathtt{x}$ とかく．

次に，$S, T$ を共に $V$ から $W$ への線形写像とするとき，$S$ と $T$ の和 $S+T$ および $T$ のスカラー倍 $aT$ $(a \in K)$ を次のように定義する．

$$\begin{array}{ll} (S+T)\mathtt{x} = S\mathtt{x} + T\mathtt{x} & \qquad (\mathtt{x} \in V) \\ (aT)\mathtt{x} = a(T\mathtt{x}) & \qquad (\mathtt{x} \in V) \end{array} \tag{13}$$

(T2) $S, T$ を $V$ から $W$ への線形写像とするとき，$S+T$ および $aT$ $(a \in K)$ は $V$ から $W$ への線形写像となる．

($\because$) （$S+T$ の場合を示す）任意の $\mathtt{x}, \mathtt{y} \in V$ に対して，

$$\begin{aligned} (S+T)(\mathtt{x}+\mathtt{y}) &= S(\mathtt{x}+\mathtt{y}) + T(\mathtt{x}+\mathtt{y}) = (S\mathtt{x}+S\mathtt{y}) + (T\mathtt{x}+T\mathtt{y}) \\ &= (S\mathtt{x}+T\mathtt{x}) + (S\mathtt{y}+T\mathtt{y}) \\ &= (S+T)\mathtt{x} + (S+T)\mathtt{y}. \end{aligned} \tag{14}$$

任意の $\mathtt{x} \in V$，$k \in K$ に対して，

$$\begin{aligned} (S+T)(k\mathtt{x}) &= S(k\mathtt{x}) + T(k\mathtt{x}) = kS\mathtt{x} + kT\mathtt{x} \\ &= k(S\mathtt{x}+T\mathtt{x}) = k(S+T)\mathtt{x}. \qquad \text{(q.e.d.)} \end{aligned} \tag{15}$$

(ex2) $aT$ の場合を示せ．

線形写像の合成，和，スカラー倍については，次がなりたつ．

(T3) $T : V \longrightarrow W$，$\tilde{T} : V \longrightarrow W$，$\tilde{\tilde{T}} : V \longrightarrow W$，$S : W \longrightarrow X$，$\tilde{S} : W \longrightarrow X$，$R : X \longrightarrow Y$ を線形写像，$a \in K$ とするとき，

$$\begin{array}{c} (RS)T = R(ST) \\ T + \tilde{T} = \tilde{T} + T \qquad\qquad (T+\tilde{T}) + \tilde{\tilde{T}} = T + (\tilde{T} + \tilde{\tilde{T}}) \\ S(T+\tilde{T}) = ST + S\tilde{T} \qquad\qquad (S+\tilde{S})T = ST + \tilde{S}T \\ a(T+\tilde{T}) = aT + a\tilde{T} \\ a(ST) = (aS)T = S(aT) \end{array} \tag{16}$$

($\because$) 第 1 式は一般の写像でもなりたつ基本的な性質である．ここでは，第 4 式を示す．任意の $\mathtt{x} \in V$ に対して，

$$\begin{aligned} (S(T+\tilde{T}))\mathtt{x} &= S((T+\tilde{T})\mathtt{x}) = S(T\mathtt{x}+\tilde{T}\mathtt{x}) = S(T\mathtt{x}) + S(\tilde{T}\mathtt{x}) \\ &= (ST)\mathtt{x} + (S\tilde{T})\mathtt{x} = (ST + S\tilde{T})\mathtt{x}. \end{aligned} \tag{17}$$

ゆえに，$S(T+\tilde{T}) = ST + S\tilde{T}$．(q.e.d.)

(ex3) (16) の残りの式を示せ．

(T3) 第 1 式（合成の結合律）より，幾らかの線形写像の合成については，括弧を省略できる．このことは一般の写像の合成についても言える．また，第 3 式（和の結合律）より幾らかの線形写像の和についても括弧は省略でき，第 2 式（和の交換律）より和の順序交換が可能である．さらに，第 4–5 式（分配律）より次がなりたつ．

$$\begin{array}{c} S(T + \tilde{T} + \cdots + \tilde{\tilde{T}}) = ST + S\tilde{T} + \cdots + S\tilde{\tilde{T}} \\ (S + \tilde{S} + \cdots + \tilde{\tilde{S}})T = ST + \tilde{S}T + \cdots + \tilde{\tilde{S}}T \end{array} \tag{18}$$

(T1),(T2) によれば，いくらかの線形写像に対して，合成，和，スカラー倍を有限回行って得られる写像はまた線形写像である．このことは線形変換についても同様である．特に $V$ の線形変換 $T$ に対して，$T^l = TT\dots T$ ($l$ 個) とかくとき，

$$a_0T^s + a_1T^{s-1} + \cdots + a_{s-1}T + a_sI \qquad (a_0, \dots, a_s \in K) \tag{19}$$

は $V$ の線形変換になることがわかる．

- 3 -（同型写像）$T$ が $V$ から $W$ への線形写像であって，さらに $V$ から $W$ への 1 対 1 対応であるとき，$T$ を $V$ から $W$ への（または $V$，$W$ の間の）$\boxed{\text{同型写像}}$ という．線形空間 $V, W$ に対し，$V$ から $W$ への同型写像が存在するとき，$V$ と $W$ は $\boxed{\text{同型}}$ であるといい，記号で $V \simeq W$ と表す．

(note) $V$ から $W$ への同型写像の逆写像は，$W$ から $V$ への同型写像になる．

(T4) $K$ 上の線形空間 $V, W$ に対して，次がなりたつ．

$$V \simeq W \iff \dim V = \dim W \tag{20}$$

(T4') $V \simeq W$ とし，$\phi : V \longrightarrow W$ を同型写像とする．$V$ の基底 $\langle \mathtt{e}_1, \mathtt{e}_2, \dots, \mathtt{e}_n \rangle$ を取ると，$\langle \phi(\mathtt{e}_1), \phi(\mathtt{e}_2), \dots, \phi(\mathtt{e}_n) \rangle$ は $W$ の基底となる．

(T4') の (∵) （$W$ を生成すること） $\phi$ が同型写像なので全射となる．ゆえに任意の $\mathtt{y} \in W$ に対して，$\phi(\mathtt{x}) = \mathtt{y}$ となる $\mathtt{x}$ が存在し，$\mathtt{x} = k_1\mathtt{e}_1 + \cdots + k_n\mathtt{e}_n$ と表せるので，

$$\begin{aligned} \mathtt{y} &= \phi(\mathtt{x}) = \phi(k_1\mathtt{e}_1 + \cdots + k_n\mathtt{e}_n) = \phi(k_1\mathtt{e}_1) + \cdots + \phi(k_n\mathtt{e}_n) \\ &= k_1\phi(\mathtt{e}_1) + \cdots + k_n\phi(\mathtt{e}_n). \end{aligned} \tag{21}$$

（線形独立性）$k_1\phi(\mathtt{e}_1) + \cdots + k_n\phi(\mathtt{e}_n) = \mathtt{0}$ とおく．$k_1\phi(\mathtt{e}_1) + \cdots + k_n\phi(\mathtt{e}_n) = \phi(k_1\mathtt{e}_1 + \cdots + k_n\mathtt{e}_n) = \mathtt{0}$ となる．ここで，$\phi$ が同型写像なので単射となるから，$k_1\mathtt{e}_1 + \cdots + k_n\mathtt{e}_n = \mathtt{0}$ となって，$k_1 = \cdots = k_n = 0$ を得る． (q.e.d.)

(T4) の (∵) (⇒) $V \simeq W$ とし，$\phi : V \longrightarrow W$ を同型写像とする．(T4') より，$V$ の基底 $\langle \mathtt{e}_1, \mathtt{e}_2, \dots, \mathtt{e}_n \rangle$ から $W$ の基底 $\langle \phi(\mathtt{e}_1), \phi(\mathtt{e}_2), \dots, \phi(\mathtt{e}_n) \rangle$ を作れる．よって，$\dim V = n = \dim W$．

(⇐) $\dim V = \dim W$ とすると，$V$ の基底 $\langle \mathtt{e}_1, \dots, \mathtt{e}_n \rangle$，$W$ の基底 $\langle \mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_n \rangle$ を取れる．ここで，$\phi : V \longrightarrow W$ として，$\phi(\mathtt{e}_j) = \mathtt{f}_j$ $(j = 1, \dots, n)$ で定まる線形写像を取ると，これは $V$ から $W$ への同型写像となる．実際 $\phi$ を $\mathtt{x} = k_1\mathtt{e}_1 + \cdots + k_n\mathtt{e}_n \in V$ に対して，

$$\phi(\mathtt{x}) = k_1\mathtt{f}_1 + \cdots + k_n\mathtt{f}_n \tag{22}$$

で定義できる．ここで任意の $\mathtt{x}$ および $\mathtt{y} = l_1\mathtt{e}_1 + \cdots + l_n\mathtt{e}_n \in V$，$k \in K$ に対して，

$$\begin{aligned} \phi(\mathtt{x} + \mathtt{y}) &= \phi((k_1\mathtt{e}_1 + \cdots + k_n\mathtt{e}_n) + (l_1\mathtt{e}_1 + \cdots + l_n\mathtt{e}_n)) \\ &= \phi((k_1 + l_1)\mathtt{e}_1 + \cdots + (k_n + l_n)\mathtt{e}_n) \\ &= (k_1 + l_1)\mathtt{f}_1 + \cdots + (k_n + l_n)\mathtt{f}_n \\ &= (k_1\mathtt{f}_1 + \cdots + k_n\mathtt{f}_n) + (l_1\mathtt{f}_1 + \cdots + l_n\mathtt{f}_n) \\ &= \phi(\mathtt{x}) + \phi(\mathtt{y}), \\ \phi(k\mathtt{x}) &= \phi(k(k_1\mathtt{e}_1 + \cdots + k_n\mathtt{e}_n)) = \phi(kk_1\mathtt{e}_1 + \cdots + kk_n\mathtt{e}_n) \\ &= kk_1\mathtt{f}_1 + \cdots + kk_n\mathtt{f}_n = k(k_1\mathtt{f}_1 + \cdots + k_n\mathtt{f}_n) \\ &= k\phi(\mathtt{x}). \end{aligned} \tag{23}$$

ゆえに $\phi$ は $V$ から $W$ への線形写像．次に $\phi$ が 1 対 1 対応であることを示す．まず

$$
\begin{aligned}
& \mathtt{x} = k_1\mathtt{e}_1 + \cdots + k_n\mathtt{e}_n \neq l_1\mathtt{e}_1 + \cdots + l_n\mathtt{e}_n = \mathtt{y} \\
\Longleftrightarrow \quad & \phi(\mathtt{x}) = k_1\mathtt{f}_1 + \cdots + k_n\mathtt{f}_n \neq l_1\mathtt{f}_1 + \cdots + l_n\mathtt{f}_n = \phi(\mathtt{y})
\end{aligned}
\tag{24}
$$

より，$\phi$ は単射．また，任意の $\tilde{\mathtt{x}} = k_1\mathtt{f}_1 + \cdots + k_n\mathtt{f}_n \in W$ に対して，$\phi(\mathtt{x}) = \tilde{\mathtt{x}}$ となる $\mathtt{x} = k_1\mathtt{e}_1 + \cdots + k_n\mathtt{e}_n$ があるので $\phi$ は全射．これらより $\phi$ は 1 対 1 対応．こうして $\phi : V \longrightarrow W$ は同型写像となる．ゆえに $V \simeq W$． (q.e.d.)

- 4 -（線形写像の像と核）$T$ を $V$ から $W$ への線形写像とする．$T$ の $\boxed{\text{像}}$ $\mathrm{Im}\, T = T(V)$ を前述の (2) で定義する．より一般に，$X$ を $V$ の部分空間とするとき，$T$ による $X$ の像 $T(X)$ を (3) で定義する．また，$Y$ を $W$ の部分空間とするとき，$T$ による $Y$ の逆像 $T^{-1}(Y)$ を (4) で定義する．特に

$$
T^{-1}(\mathtt{0}) = \{\mathtt{x} \in V \mid T\mathtt{x} = \mathtt{0}\}
\tag{25}
$$

を $T$ の $\boxed{\text{核}}$ と呼び，$\mathrm{Ker}\, T$ で表す．

(T5) (i) $\mathrm{Im}\, T$ は $W$ の部分空間である． (ii) $\mathrm{Ker}\, T$ は $V$ の部分空間である．
(iii) $X$ を $V$ の部分空間とするとき，$T(X)$ は $W$ の部分空間である．
(iv) $Y$ を $W$ の部分空間とするとき，$T^{-1}(Y)$ は $V$ の部分空間である．
（(i),(ii) はそれぞれ (iii),(iv) の特別な場合である．）

($\because$) それぞれ和とスカラー倍について閉じていることを言えばよい．

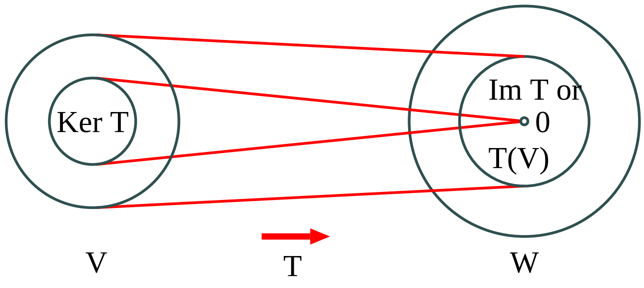
(i) $\mathrm{Im}\, T$ の任意の元 $\mathtt{x}', \mathtt{y}'$ を取ると，$V$ のある元 $\mathtt{x}, \mathtt{y} \in V$ が存在して $\mathtt{x}' = T\mathtt{x}$，$\mathtt{y}' = T\mathtt{y}$ と表せる．ゆえに $\mathtt{x}' + \mathtt{y}' = T\mathtt{x} + T\mathtt{y} = T(\mathtt{x} + \mathtt{y}) \in \mathrm{Im}\, T$．また任意のスカラー $k$ を取ると，$k\mathtt{x}' = kT\mathtt{x} = T(k\mathtt{x}) \in \mathrm{Im}\, T$． よって，$\mathrm{Im}\, T$ は $W$ の部分空間である． (q.e.d.)

(ii) $\mathrm{Ker}\, T$ の任意の元 $\mathtt{x}, \mathtt{y}$ を取る．すると $T(\mathtt{x} + \mathtt{y}) = T\mathtt{x} + T\mathtt{y} = \mathtt{0} + \mathtt{0} = \mathtt{0}$ なので $\mathtt{x} + \mathtt{y} \in \mathrm{Ker}\, T$． さらに任意のスカラー $k$ に対して，$T(k\mathtt{x}) = kT\mathtt{x} = k\mathtt{0} = \mathtt{0}$ なので $k\mathtt{x} \in \mathrm{Ker}\, T$． よって，$\mathrm{Ker}\, T$ は $V$ の部分空間である． (q.e.d.)

(iii) (i) と同様．

(iv) $T^{-1}(Y)$ の任意の元 $\mathtt{x}, \mathtt{y}$ を取る．$T\mathtt{x}, T\mathtt{y} \in Y$ なので，$T(\mathtt{x} + \mathtt{y}) = T\mathtt{x} + T\mathtt{y} \in Y$． $\therefore$ $\mathtt{x} + \mathtt{y} \in T^{-1}(Y)$． さらに任意のスカラー $k$ に対して，$T(k\mathtt{x}) = kT\mathtt{x} \in Y$ なので $k\mathtt{x} \in T^{-1}(Y)$． よって，$T^{-1}(Y)$ は $V$ の部分空間である． (q.e.d.)

(Def) $\dim \mathrm{Im}\, T$ のことを $T$ の階数と呼び，$r(T)$ で表す．



(T6) $T$ を $V$ から $W$ への線形写像とするとき，

$$T\text{ が同型写像 } \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} T = \{\mathtt{0}\} \text{ かつ } \operatorname{Im} T = W. \tag{26}$$

($\because$) $T$ が線形写像ならば，

$$T\text{ が同型写像 } \Longleftrightarrow T\text{ が 1 対 1 対応 } \Longleftrightarrow T\text{ が全射かつ単射} \tag{27}$$

であり，

$$T\text{ が全射 } \Longleftrightarrow \operatorname{Im} T = W \tag{28}$$

なので，(T6) を示すには，次を示せば十分である．

$$T\text{ が単射 } \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} T = \{\mathtt{0}\} \tag{29}$$

($\Rightarrow$) 線形写像 $T$ が単射とする．$T$ が線形写像なので，$T\mathtt{0} = \mathtt{0}$．$T$ が単射なので，$\mathtt{x} \neq \mathtt{0}$ ならば，$T\mathtt{x} \neq \mathtt{0}$．ゆえに，$\operatorname{Ker} T = \{\mathtt{0}\}$．

($\Leftarrow$) 線形写像 $T$ が $\operatorname{Ker} T = \{\mathtt{0}\}$ をみたすとする．$T\mathtt{x} = T\mathtt{y}$ とする．このとき，$T\mathtt{x} - T\mathtt{y} = T(\mathtt{x} - \mathtt{y}) = \mathtt{0}$．　$\therefore\ \mathtt{x} - \mathtt{y} \in \operatorname{Ker} T = \{\mathtt{0}\}$．　$\therefore\ \mathtt{x} - \mathtt{y} = \mathtt{0}$．　$\therefore\ \mathtt{x} = \mathtt{y}$．ゆえに $T$ は単射．(q.e.d.)

(ex4) (1) $V = V^3 = \mathbf{R}^3$, $W = \{$ 実 2 次行列全体 $\}$ とすると，$V, W$ は実線形空間とみなせる．写像 $T : V \longrightarrow W$ を $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$ で定義するとき，$T$ は線形写像になることを示せ．

(2) $Y = \{$ 実 2 次対称行列全体 $\}$ とすると，$Y$ は $W$ の部分空間になることを示せ．また，(1) で定義される $T : V \longrightarrow Y$ は同型写像になることを示せ．

- 5 -（行列が表す線形写像）$V = K^n$，$W = K^m$ とおく．$(m, n)$ 型行列 $A$（成分は $K$ の元とする）を取る．$V$ から $W$ への写像 $T_A$ を

$$T_A(\mathtt{x}) = A\mathtt{x} \qquad (\mathtt{x} \in V) \tag{30}$$

で定める．$T_A$ は，$V$ から $W$ への線形写像となる．これを $\boxed{A\text{ が表す (定める) 線形写像}}$ という．

(ex5) $T_A$ が線形写像であることを示せ．

実際には (ex5) の逆もなりたつことがわかっている．すなわち，

(T7) $V = K^n$，$W = K^m$ とおく．$V$ から $W$ への任意の線形写像は，適当な行列 $A$ を用いて $T_A$ で表される．

($\because$) $V$ から $W$ への任意の線形写像 $T$ を取る．$V$ の基本ベクトルを $\mathtt{e}_1, \mathtt{e}_2, \ldots, \mathtt{e}_n$ で表す．ここで $T\mathtt{e}_j = \mathtt{a}_j$ とおき，行列 $A$ を

$$A = \begin{pmatrix} \mathtt{a}_1 & \mathtt{a}_2 & \ldots & \mathtt{a}_n \end{pmatrix} \tag{31}$$

で定める．このとき，任意の $\mathtt{x} = x_1\mathtt{e}_1 + \cdots + x_n\mathtt{e}_n \in V$ に対して，$T$ の線形性より，

$$\begin{aligned} T\mathtt{x} &= T(x_1\mathtt{e}_1 + \cdots + x_n\mathtt{e}_n) = T(x_1\mathtt{e}_1) + \cdots + T(x_n\mathtt{e}_n) \\ &= x_1T\mathtt{e}_1 + \cdots + x_nT\mathtt{e}_n = x_1\mathtt{a}_1 + \cdots + x_n\mathtt{a}_n. \end{aligned} \tag{32}$$

一方，

$$A\mathtt{x} = \begin{pmatrix} \mathtt{a}_1 & \mathtt{a}_2 & \ldots & \mathtt{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\mathtt{a}_1 + \cdots + x_n\mathtt{a}_n. \tag{33}$$

ゆえに $T\mathtt{x} = A\mathtt{x}$．これより，$T = T_A$．(q.e.d.)

行列が表す線形写像の合成，和，スカラー倍については次がなりたつことがわかる．

(T8) $A, C$ を $(m, n)$ 型行列，$B$ を $(n, p)$ 型行列とし，$a \in K$ とするとき，

$$\begin{gathered} T_AT_B = T_{AB} \\ T_A + T_C = T_{A+C} \\ aT_A = T_{aA} \end{gathered} \tag{34}$$

($\because$) 第 1 式を示す．任意の $\mathtt{x} \in K^p$ に対して，

$$(T_AT_B)\mathtt{x} = T_A(T_B(\mathtt{x})) = A(B\mathtt{x}) = (AB)\mathtt{x} = T_{AB}(\mathtt{x}). \tag{35}$$

ゆえに，$T_AT_B = T_{AB}$．(q.e.d.)

(ex6) (34) の第 2–3 式を示せ．

- 6 -（$T_A$ の像と核の基底）$A$ を $(m, n)$ 型行列とする．$A$ が表す線形写像

$$T_A : K^n \longrightarrow K^m \tag{36}$$

の像と核について考える．まず $T_A$ の像

$$\operatorname{Im} T_A = \{A\mathtt{x} \mid \mathtt{x} \in K^n\} \tag{37}$$

は $A$ を (31) のように表したとき，

$$\operatorname{Im} T_A = \{x_1\mathtt{a}_1 + \cdots + x_n\mathtt{a}_n \mid x_1, \ldots, x_n \in K\} = \operatorname{span}\{\mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_n\} \tag{38}$$

とかけるので，$\operatorname{Im} T_A$ は列ベクトルで生成される部分空間である．その基底を求めるには次のようにすればよい．$\boxed{A\ \text{を列変形して}\ 0\ \text{以外の部分が階段状になるようにする}}$．このとき，$\boxed{0\ \text{ベクトル以外の列ベクトルを並べれば，}\operatorname{Im} T_A\ \text{の基底となる}}$．なぜならば，列変形の際には，変形後の列ベクトルは変形前の列ベクトルで表せる．また，列変形は逆にも戻れるので，変形前の列ベクトルは変形後の列ベクトルでも表せる．こうしてみると，列ベクトルで生成される部分空間は，列変形の前後で変わらないことがわかる．ゆえに（0 ベクトル以外の）列ベクトルが線形独立になるように列変形すればそれらが $\operatorname{Im} T_A$ の基底となる．特に 0 以外の部分が階段状になれば，それらの線形結合 $= 0$ とおいてみれば明らかに係数が 0 になるので,（0 ベクトル以外の）列ベクトルは線形独立になる．よってそれらの列ベクトルは $\operatorname{Im} T_A$ の基底となる．

また，階段状の列ベクトルが $r$ 個得られたときは，その行列を基本変形により，$F_{mn}(r)$ に変形できるので，$\mathrm{Im}\,T_A$ の次元は $A$ の階数に等しくなることがわかる．

(T9) 次がなりたつ．

$$\dim \mathrm{Im}\,T_A = r(T_A) = r(A) \tag{39}$$

次に $T_A$ の核

$$\mathrm{Ker}\,T_A = \{\mathtt{x} \in K^n \mid A\mathtt{x} = \mathtt{0}\} \tag{40}$$

を見てみると，これは $A\mathtt{x} = \mathtt{0}$ の解の集合を表しているにすぎない．ゆえに一般解を基本変形で求めて，

$$\mathtt{x} = \alpha_1 \mathtt{g}_1 + \alpha_2 \mathtt{g}_2 + \cdots + \alpha_s \mathtt{g}_s \tag{41}$$

となったとき，$\langle \mathtt{g}_1, \mathtt{g}_2, \ldots, \mathtt{g}_s \rangle$ が $\mathrm{Ker}\,T_A$ の基底である．(これらが線形独立であることはベクトルの形より明らか.） ここで，6 章 (T1) より $s = n - r(A)$ となる．したがって次を得る．

(T10) $A$ を $(m, n)$ 型行列とするとき，

$$\dim \mathrm{Ker}\,T_A = n - r(A). \tag{42}$$

これは $T = T_A$ の場合の次元公式 (T12) に他ならない．

(ex7) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ とする．$T_A$ の像および核の基底を求めよ．

(ans) ($\mathrm{Im}\,T_A$ の基底) $A$ を列変形して，

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{43}$$

ゆえに $\mathrm{Im}\,T_A$ の基底は $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

($\mathrm{Ker}\,T_A$ の基底) $A\mathtt{x} = \mathtt{0}$ を解く．$A$ を行変形して，

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \therefore\ \mathtt{x} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{44}$$

ゆえに $\mathrm{Ker}\,T_A$ の基底は $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(note) 基底は1通りには決まらないので他にもいろいろな答えがある．たとえば，像の基底を求めるには，列ベクトルからなるべく多くの線形独立な列ベクトルを選べばよく，それには，$A$ を行変形して0以外の部分を階段状にし，階段の角に当たる部分の列をもとの $A$ から選べばよい．この方法は核を同時に求めるときには効率がよいとも言えるが，核を求めるとき列交換をしている場合は注意を要する．

- 7 -（行列の階数，極大線形独立系，小行列式）線形空間 $V$ の部分集合 $S$ に対して，$V$ の部分空間であって $S$ を含むものすべてを考え，それらの共通部分を取ると，新たな $V$ の部分空間 $W$ が得られる．これを $S$ で生成される（張られる）$V$ の部分空間といい，$W = \mathrm{span}(S)$ で表す．$\mathrm{span}(S)$ は実は $S$ を含む最小の部分空間に他ならない．別の言い方をすると，$\mathrm{span}(S)$ は $S$ のベクトルの可能な線形結合すべてからなる部分空間である．

今，$S$ から選んだベクトル $\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \ldots, \mathsf{e}_r$ が次の2つの条件をみたすとき，$\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \ldots, \mathsf{e}_r$ を $S$ の極大線形独立系という．

I: $\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \ldots, \mathsf{e}_r$ は線形独立である．

II: $S$ の任意のベクトルは，$\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \ldots, \mathsf{e}_r$ の線形結合で表される．

この定義は基底の定義と同様であって，結局 $S$ の極大線形独立系は，$\mathrm{span}(S)$ の基底になることが示される．

ここで，$A$ を $(m, n)$ 型行列とし，$S$ を $A$ の列ベクトルの集合とする．上で述べたことと - 6 - より，$S$ の極大線形独立系は，列ベクトルで生成される部分空間，すなわち $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底である．したがって，$A$ の線形独立な列ベクトルの最大数は，$\dim \mathrm{Im}\, T_A = r(A)$ に等しい．[2] このことは，$B = {}^tA$ についても言える．つまり，$B$ の線形独立な列ベクトルの最大数（$= A$ の線形独立な行ベクトルの最大数）は，$\dim \mathrm{Im}\, T_B = r(B)$ に等しい．ところが $r(B) = r({}^tA) = r(A)$ だから，$A$ の線形独立な列ベクトルの最大数，$A$ の線形独立な行ベクトルの最大数は共に $r(A)$ に等しい．

さらに $r(A)$ を行列式に関連づけることができる．$A$ の行と列を $r$ 個ずつ取り出してできる $r$ 次行列の行列式を，$A$ の $r$ 次小行列式という．それは行と列の選び方の数だけ作れるので，$\binom{m}{r}\binom{n}{r}$ 個の $r$ 次小行列式が存在する．ここで，固定された $r$ に対して，$r$ 次小行列式がすべて0であるという性質は，基本変形の前後で保たれることが示される．[3] これは裏を返せば，$r$ 次小行列式の中に0でないものがあるという性質も基本変形の前後で保たれることを意味する．したがって，0でない小行列式の最大次数 $s(A)$ も変形の前後で不変である．そこで，基本変形を繰り返して $A \longrightarrow \cdots \longrightarrow F = F_{mn}(r)$ となったとき，明らかに $r(F) = s(F)$ なので，$r(A) = s(A)$ がなりたつ．

(T11) $(m, n)$ 型行列 $A$ に対して次の量は等しい． (i) $r(A)$. (ii) $\dim \mathrm{Im}\, T_A = r(T_A)$. (iii) $A$ の線形独立な列ベクトルの最大数． (iv) $A$ の線形独立な行ベクトルの最大数． (v) $A$ の0でない小行列式の最大次数．

---

[2]最大数の線形独立な列ベクトルを選べば，8章 (T1) より，他の列ベクトルはそれらの線形結合で表されるので，極大線形独立系をなす．

[3]基本変形: $A \longrightarrow B$ を行ったとき，$B$ の任意の $r$ 次小行列式 $\Delta$ が $A$ の $r$ 次小行列式たちの線形結合で表されることを言えばよい．基本変形が入れ替えか，スカラー倍のときはわかりやすいので，$i$ 行に $j$ 行の $c$ 倍を加える場合を考える．$\Delta$ に $i$ 行が入っている場合を考えればよい．このとき，$\Delta = \Delta_1 + c\Delta_2$ とかける．ただし，$\Delta_1$ は $A$ から $\Delta$ と同じ行と列を取り出して作った $r$ 次小行列式であり，$\Delta_2$ は $\Delta_1$ の $i$ 行を $j$ 行と入れ替えたものなので，$A$ の $r$ 次小行列式の符号をつけたものか，$j$ 行が重複して0になるかのいずれかである．よって題意は示された．この議論は列の場合も同様． (q.e.d.)

- 8 -（次元公式）線形写像の核と像については，次の $\boxed{\text{核と像の次元公式}}$ がなりたつ．

(T12) 線形写像 $T: V \longrightarrow W$ に対して，

$$\dim V = \dim \mathrm{Im}\, T + \dim \mathrm{Ker}\, T. \tag{45}$$

（$\dim \mathrm{Im}\, T$ は $r(T)$ とかいても同じことである）

($\because$) $\mathrm{Ker}\, T$ の基底を $\mathbf{E} = \langle \mathtt{e}_1, \ldots, \mathtt{e}_s \rangle$ とし，この基底を拡大して $V$ の基底 $\tilde{\mathbf{E}} = \langle \mathtt{e}_1, \ldots, \mathtt{e}_n \rangle$ を作る．さらに $T\mathtt{e}_i = \mathtt{f}_i$ $(i = s+1, \ldots, n)$ とする．このとき $\mathbf{F} = \langle \mathtt{f}_{s+1}, \ldots, \mathtt{f}_n \rangle$ は $\mathrm{Im}\, T$ の基底となることを以下に示そう．まず $\mathrm{Im}\, T$ の任意の元 $\mathtt{y}$ を取る．このとき $V$ の元 $\mathtt{x}$ があって $T\mathtt{x} = \mathtt{y}$ をみたす．ところで $\mathtt{x}$ を $\tilde{\mathbf{E}}$ で表せるので，$\mathtt{x} = k_1\mathtt{e}_1 + \cdots + k_n\mathtt{e}_n$ とおく．すると $\mathtt{y}$ は

$$\begin{aligned} \mathtt{y} = T\mathtt{x} &= T(k_1\mathtt{e}_1 + \cdots + k_n\mathtt{e}_n) = k_1T\mathtt{e}_1 + \cdots + k_sT\mathtt{e}_s + k_{s+1}T\mathtt{e}_{s+1} + \cdots + k_nT\mathtt{e}_n \\ &= k_{s+1}T\mathtt{e}_{s+1} + \cdots + k_nT\mathtt{e}_n = k_{s+1}\mathtt{f}_{s+1} + \cdots + k_n\mathtt{f}_n \end{aligned} \tag{46}$$

のように $\mathbf{F}$ で表せることになる．

次に $\mathbf{F}$ の元たちの線形独立性を示す．$k_{s+1}\mathtt{f}_{s+1} + k_{s+2}\mathtt{f}_{s+2} + \cdots + k_n\mathtt{f}_n = \mathtt{0}$ とおくと $T\mathtt{e}_i = \mathtt{f}_i$ より次を得る．

$$\begin{aligned} \mathtt{0} &= k_{s+1}\mathtt{f}_{s+1} + \cdots + k_n\mathtt{f}_n = k_{s+1}T\mathtt{e}_{s+1} + \cdots + k_nT\mathtt{e}_n \\ &= T(k_{s+1}\mathtt{e}_{s+1} + \cdots + k_n\mathtt{e}_n) \end{aligned} \tag{47}$$

すなわち，$T(k_{s+1}\mathtt{e}_{s+1} + \cdots + k_n\mathtt{e}_n) = \mathtt{0}$．これは，$\mathtt{x} = k_{s+1}\mathtt{e}_{s+1} + \cdots + k_n\mathtt{e}_n \in \mathrm{Ker}\, T$ であることを示している．よって $\mathtt{x}$ は $\mathrm{Ker}\, T$ の基底 $\mathbf{E}$ を用いて表される．すなわち，

$$\mathtt{x} = k_{s+1}\mathtt{e}_{s+1} + \cdots + k_n\mathtt{e}_n = k_1\mathtt{e}_1 + \cdots + k_s\mathtt{e}_s. \tag{48}$$

これより，$k_1\mathtt{e}_1 + \cdots + k_s\mathtt{e}_s - k_{s+1}\mathtt{e}_{s+1} - \cdots - k_n\mathtt{e}_n = \mathtt{0}$ を得る．ここで，$\tilde{\mathbf{E}} = \langle \mathtt{e}_1, \ldots, \mathtt{e}_n \rangle$ が基底だから $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$．特に $k_{s+1} = \cdots = k_n = 0$ より，$\mathbf{F}$ の元たちが線形独立であることがわかる．

こうして $\mathbf{F}$ は $\mathrm{Im}\, T$ の基底であることが示された．よって $\dim \mathrm{Im}\, T = n - s$ を得る．また $\dim \mathrm{Ker}\, T = s$，$\dim V = n$ であった．これらより $\dim \mathrm{Im}\, T + \dim \mathrm{Ker}\, T = \dim V$ を得る． (q.e.d.)

この定理の系を 1 つあげてみる．$V$ の部分空間 $X$ を取る．$T$ の $X$ への制限 $T|_X$ に (T12) を適用すると，

$$\dim X = \dim \mathrm{Im}\, T|_X + \dim \mathrm{Ker}\, T|_X \tag{49}$$

を得る．ここで，$\mathrm{Im}\, T|_X = T(X)$，$\mathrm{Ker}\, T|_X = X \cap \mathrm{Ker}\, T$ を考え合わせると，次を得る．

(T12') 線形写像 $T: V \longrightarrow W$ および $V$ の部分空間 $X$ に対して，

$$\dim X = \dim T(X) + \dim(X \cap \mathrm{Ker}\, T). \tag{50}$$

(ex8) $T$ を $V$ の線形変換とする．$\mathrm{Ker}\, T = \mathrm{Im}\, T$ のとき，$\dim V$ は偶数になることを示せ．

# 11章　基底の取替えと線形写像

☆6☆

キーワード: 基底，同型写像，基底の取替え，基底に関する線形写像の行列，
像，核，不変部分空間，行列の標準形，線形変換の演算

- 1 -（基底と同型写像）この章を通して，$V$，$W$ を $K$ 上の 2 つの線形空間とし，その次元をそれぞれ $n$，$m$ とする．$T : V \longrightarrow W$ を $V$ から $W$ への線形写像とする．$\mathbf{E} = \langle \mathtt{e}_1, \mathtt{e}_2, \ldots, \mathtt{e}_n \rangle$，$\tilde{\mathbf{E}} = \langle \tilde{\mathtt{e}}_1, \tilde{\mathtt{e}}_2, \ldots, \tilde{\mathtt{e}}_n \rangle$ を $V$ の 2 組の基底とし，$\mathbf{F} = \langle \mathtt{f}_1, \mathtt{f}_2, \ldots, \mathtt{f}_m \rangle$，$\tilde{\mathbf{F}} = \langle \tilde{\mathtt{f}}_1, \tilde{\mathtt{f}}_2, \ldots, \tilde{\mathtt{f}}_m \rangle$ を $W$ の 2 組の基底とする．

$V$ の元 $x$ は 基底 $\mathbf{E}$ の線形結合でただ 1 通りに

$$\boxed{x = x_1\mathtt{e}_1 + x_2\mathtt{e}_2 + \cdots + x_n\mathtt{e}_n = \mathbf{E}\mathtt{x}} \qquad \left( \mathtt{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) \tag{1}$$

のように表される．（基底を含む行列演算は，基底を横ベクトルとみて行うことにする．）　これより，$V$ の各元 $x$ に $\mathtt{x}$ を対応させる写像

$$\begin{array}{rcl} \phi_{\mathbf{E}} : V & \longrightarrow & K^n \\ x & \longmapsto & \mathtt{x} \end{array} \tag{2}$$

が定まる．これは同型写像となり，基底 $\mathbf{E}$ の定める同型写像と呼ばれる．同様にして，

$$\boxed{x = \tilde{x}_1\tilde{\mathtt{e}}_1 + \tilde{x}_2\tilde{\mathtt{e}}_2 + \cdots + \tilde{x}_n\tilde{\mathtt{e}}_n = \tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathtt{x}}} \qquad \left( \tilde{\mathtt{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} \right) \tag{3}$$

により，基底 $\tilde{\mathbf{E}}$ の定める同型写像:

$$\begin{array}{rcl} \phi_{\tilde{\mathbf{E}}} : V & \longrightarrow & K^n \\ x & \longmapsto & \tilde{\mathtt{x}} \end{array} \tag{4}$$

も定義される．

ここで，$\mathtt{x}$ と $\tilde{\mathtt{x}}$ は $x$ を媒介にして対応していることに注目しよう．すなわち，

$$\tilde{\mathtt{x}} \longmapsto x \longmapsto \mathtt{x} \tag{5}$$

のように対応する．これは写像でかけば，

$$\mathtt{x} = \phi_{\mathbf{E}}(\phi_{\tilde{\mathbf{E}}}^{-1}(\tilde{\mathtt{x}})) = (\phi_{\mathbf{E}} \circ \phi_{\tilde{\mathbf{E}}}^{-1})(\tilde{\mathtt{x}}) \tag{6}$$

のように同型写像の合成になるのでやはり同型写像になる．したがって，適当な正則行列 $\boxed{P}$ によって $\boxed{\mathtt{x} = P\tilde{\mathtt{x}}}$ と表されるはずであり，この $P$ は，$\boxed{\text{基底の取替え } \mathbf{E} \to \tilde{\mathbf{E}} \text{ の行列}}$ と呼ばれる．そして $P$ は，$\boxed{\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}P}$ をみたすことがわかっている．以下それを示そう．

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{x} = P\tilde{\mathrm{x}} \quad \text{なので，} & \mathbf{E}\mathrm{x} = \mathbf{E}(P\tilde{\mathrm{x}}) = (\mathbf{E}P)\tilde{\mathrm{x}}. & \\
\text{一方，}\quad x = \mathbf{E}\mathrm{x} = \tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathrm{x}} \quad \text{ゆえ，} & (\mathbf{E}P)\tilde{\mathrm{x}} = \tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathrm{x}}. & (7) \\
\text{これが } K^n \text{ の任意の元 } \tilde{\mathrm{x}} \text{ でなりたつから，} & \mathbf{E}P = \tilde{\mathbf{E}}. \quad \text{(q.e.d.)} &
\end{array}
$$

これと同様なことが，線形空間 $W$ とその 2 つの基底 $\mathbf{F}$，$\tilde{\mathbf{F}}$ についてもいえる．すなわち，$W$ の元 $y$ に対して，$\boxed{y = \mathbf{F}\mathrm{y}}$ により，対応 $\boxed{y \longmapsto \mathrm{y}}$ が，また $\boxed{y = \tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathrm{y}}}$ により，対応 $\boxed{y \longmapsto \tilde{\mathrm{y}}}$ が定まる．このとき，$\boxed{\text{基底の取替え } \mathbf{F} \to \tilde{\mathbf{F}} \text{ の行列 } Q}$ は $\boxed{\mathrm{y} = Q\tilde{\mathrm{y}}}$ で与えられ，それは $\boxed{\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}Q}$ をみたすわけである．

(ex1) $V = \{\,3$ 次以下の $t$ の実係数多項式全体$\}$ とし，$V$ の 2 組の基底 $\mathbf{E} = \langle 1, t, t^2, t^3 \rangle$，$\tilde{\mathbf{E}} = \langle t^2+1, t^2-1, t^3+t, t^3-t \rangle$ を取る．
(1) $p = at^3 + bt^2 + ct + d$ としたとき，$\mathrm{p} = \phi_{\mathbf{E}}(p)$ および $\tilde{\mathrm{p}} = \phi_{\tilde{\mathbf{E}}}(p)$ を求めよ．
(2) 基底の取替え $\mathbf{E} \to \tilde{\mathbf{E}}$ の行列 $P$ を求めよ．

(ans) (1) $p = \mathbf{E}\mathrm{p}$ より，

$$
at^3 + bt^2 + ct + d = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}. \quad \therefore\ \phi_{\mathbf{E}}(p) = \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}. \tag{8}
$$

同様に，$p = \tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathrm{p}}$ より，$\tilde{\mathrm{p}} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \\ \tilde{p}_3 \\ \tilde{p}_4 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
& at^3 + bt^2 + ct + d = \begin{pmatrix} t^2+1 & t^2-1 & t^3+t & t^3-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \\ \tilde{p}_3 \\ \tilde{p}_4 \end{pmatrix} \\
& = (\tilde{p}_3 + \tilde{p}_4)t^3 + (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)t^2 + (\tilde{p}_3 - \tilde{p}_4)t + (\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2). \\
& \therefore\ \tilde{p}_1 = \tfrac{b+d}{2}, \tilde{p}_2 = \tfrac{b-d}{2}, \tilde{p}_3 = \tfrac{a+c}{2}, \tilde{p}_4 = \tfrac{a-c}{2}. \qquad \therefore\ \phi_{\tilde{\mathbf{E}}}(p) = \begin{pmatrix} \frac{b+d}{2} \\ \frac{b-d}{2} \\ \frac{a+c}{2} \\ \frac{a-c}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{9}
$$

(2) $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}P$ より，

$$
\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} t^2+1 & t^2-1 & t^3+t & t^3-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \\
& \therefore\ P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

- 2 -（基底と線形写像）次に線形写像 $T$ について考える．$x, y$ が $\boxed{y = Tx}$ をみたしているとき，$\mathsf{x}$ と $\mathsf{y}$ はいかなる関係をみたすか？ まず $\mathsf{x}$ から $\mathsf{y}$ への対応は，図式:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ \uparrow \phi_{\mathbf{E}}^{-1} & & \downarrow \phi_{\mathbf{F}} \\ K^n & & K^m \end{array} \tag{11}$$

において $K^n$ から $K^m$ へたどっていけばよく，それは対応の合成

$$\mathsf{x} \longmapsto x \longmapsto y \longmapsto \mathsf{y} \tag{12}$$

を与える．これは 線形写像の合成なのでやはり線形写像であって，適当な行列 $\boxed{A}$ で

$$\boxed{\mathsf{y} = A\mathsf{x}} \tag{13}$$

と表されるはずである．この $A$ は，$\boxed{\mathbf{E}, \mathbf{F} \text{ に関する } T \text{ の行列}}$ と呼ばれ，$\boxed{T\mathbf{E} = \mathbf{F}A}$ をみたすことがわかっている．以下それを示そう．ここで，$T\mathbf{E}$ の意味するところは，

$$T\mathbf{E} = T\begin{pmatrix} \mathsf{e}_1 & \mathsf{e}_2 & \ldots & \mathsf{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T\mathsf{e}_1 & T\mathsf{e}_2 & \ldots & T\mathsf{e}_n \end{pmatrix} \tag{14}$$

であると考える．まず，

$$y = Tx \tag{15}$$

であり，右辺と左辺は，

$$Tx = T(\mathbf{E}\mathsf{x}) = T(x_1\mathsf{e}_1 + \cdots + x_n\mathsf{e}_n) \overset{T \text{ の線形性}}{=} x_1(T\mathsf{e}_1) + \cdots + x_n(T\mathsf{e}_n) = (T\mathbf{E})\mathsf{x}, \tag{16}$$

$$y = \mathbf{F}\mathsf{y} = \mathbf{F}(A\mathsf{x}) = (\mathbf{F}A)\mathsf{x}. \tag{17}$$

(15),(16),(17) より，

$$(T\mathbf{E})\mathsf{x} = (\mathbf{F}A)\mathsf{x}. \tag{18}$$

これが任意の $K^n$ の元 $\mathsf{x}$ でなりたつから，

$$T\mathbf{E} = \mathbf{F}A. \qquad \text{(q.e.d.)} \tag{19}$$

この議論は $\boxed{\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{F}} \text{ に関する } T \text{ の行列 } B}$ に関しても同様であって，$\boxed{\tilde{\mathsf{y}} = B\tilde{\mathsf{x}}}$ とするとき，$\boxed{T\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{F}}B}$ がなりたつことがわかる．

(note) $V = W$ で $\mathbf{E} = \mathbf{F}$ のとき，$\mathbf{E}, \mathbf{F}$ に関する $T$ の行列を，単に $\mathbf{E}$ に関する $T$ の行列という．

(ex2) $V$，$\mathbf{E}$，$\tilde{\mathbf{E}}$ を (ex1) と同じとする．さらに

$$W = \{\, 2 \text{ 次以下の } t \text{ の実係数多項式全体} \,\} \tag{20}$$

とし，$W$ の 2 組の基底 $\mathbf{F} = \langle 1, t, t^2 \rangle$，$\tilde{\mathbf{F}} = \langle t^2 + 1, t^2 - 1, t \rangle$ を取る．$V$ から $W$ への線形写像 $T$ を，$T(p(t)) = p'(2t)$ で定める．

(1) $\mathbf{E}, \mathbf{F}$ に関する $T$ の行列 $A$ を求めよ．

(2) $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{F}}$ に関する $T$ の行列 $B$ を求めよ．

(3) 基底の取替え $\mathbf{F} \to \tilde{\mathbf{F}}$ の行列 $Q$ を求め，関係式 $B = Q^{-1}AP$ がなりたつことを確かめよ．

(ans) (1) $T\mathbf{E} = \mathbf{F}A$ より,

$$T\mathbf{E} = T\begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(1) & T(t) & T(t^2) & T(t^3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4t & 12t^2 \end{pmatrix}$$
$$= \mathbf{F}A = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}. \qquad \therefore\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

(2) $T\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{F}}B$ より,

$$T\tilde{\mathbf{E}} = T\begin{pmatrix} t^2+1 & t^2-1 & t^3+t & t^3-t \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} T(t^2+1) & T(t^2-1) & T(t^3+t) & T(t^3-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t & 4t & 12t^2+1 & 12t^2-1 \end{pmatrix}$$
$$= \tilde{\mathbf{F}}B = \begin{pmatrix} t^2+1 & t^2-1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & x & z \\ 0 & 0 & y & w \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
$$\therefore\ (x+y)t^2 + (x-y) = 12t^2+1, \quad (z+w)t^2 + (z-w) = 12t^2-1.$$
$$\therefore\ x = \tfrac{13}{2},\ y = \tfrac{11}{2},\ z = \tfrac{11}{2},\ w = \tfrac{13}{2}. \qquad \therefore\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{13}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{13}{2} \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

(3) $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}Q$ より,

$$\begin{pmatrix} t^2+1 & t^2-1 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \therefore\ Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

$B = Q^{-1}AP$ を示すには,$QB = AP$ を示せばよい.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{13}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{13}{2} \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 12 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(q.e.d.)} \tag{24}$$

- 3 -（基底の取替え）ここで，行列 $A$,$B$ の間の関係について考えてみよう．これまで述べたことをまとめると，可換図式（写像や写像の合成が，途中の矢印のたどり方によらない図）:

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{B} & K^m \\ \downarrow \phi_{\tilde{\mathbf{E}}}^{-1} & & \uparrow \phi_{\tilde{\mathbf{F}}} \\ V & \xrightarrow{T} & W \\ \downarrow \phi_{\mathbf{E}} & & \uparrow \phi_{\mathbf{F}}^{-1} \\ K^n & \xrightarrow{A} & K^m \end{array} \tag{25}$$

が得られ，左上 $K^n$ から 右上 $K^m$ への写像を作るには，$B$ を通っていく方法と，$A$ を通って遠回りする方法があり，これらは写像としては一致する．すなわち 2 つの対応:

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{\mathrm{x}} & & & \xmapsto{B} & & & \tilde{\mathrm{y}} \\ \tilde{\mathrm{x}} & \xmapsto{P} & \mathrm{x} & \xmapsto{A} & \mathrm{y} & \xmapsto{Q^{-1}} & \tilde{\mathrm{y}} \end{array} \tag{26}$$

は同じものであり，よって，

$$\begin{cases} \tilde{\mathrm{y}} = B\tilde{\mathrm{x}}. \\ \tilde{\mathrm{y}} = Q^{-1}\mathrm{y} = Q^{-1}A\mathrm{x} = Q^{-1}AP\tilde{\mathrm{x}}. \end{cases} \tag{27}$$

は同じ線形写像を表す．すなわち，$\boxed{B = Q^{-1}AP}$ となる．

こうして，$V, W$ の基底 $\mathbf{E}, \mathbf{F}$ を $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{F}}$ に取替えたことによって，$T$ を表す行列 $A$ は，$Q^{-1}AP$ に変わることがわかった．もし $W = V$ ならば，ふつう $\mathbf{E} = \mathbf{F}$，$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{F}}$ と考えるので，$\boxed{A}$ は $\boxed{P^{-1}AP}$ に変わることになる．この考えは，うまく基底を選ぶことにより，$T$ をより簡単な行列で表すことに応用される．

- 4 -（線形写像の像と核）ベクトルに行列を掛ける形で表されていないような線形写像 $T$ を調べるときには，これまで述べたような，$T$ を行列に還元する方法が有効である．特に $T$ の像 $\mathrm{Im}\, T$ の基底と $T$ の核 $\mathrm{Ker}\, T$ の基底を具体的に求めたいときは，次のようにするとよい．

(i) まず $V, W$ の適当な基底 $\mathbf{E}, \mathbf{F}$ を選んで $T$ を行列 $A$ で表す．

(ii) $T_A$ の像の基底 $\mathbf{H} = \langle \mathtt{h}_1, \mathtt{h}_2, \ldots, \mathtt{h}_r \rangle$ および，
$T_A$ の核の基底 $\mathbf{G} = \langle \mathtt{g}_1, \mathtt{g}_2, \ldots, \mathtt{g}_s \rangle$ を求める．

(iii) (1) $\tilde{\mathbf{H}} = \langle \mathbf{F}\mathtt{h}_1, \mathbf{F}\mathtt{h}_2, \ldots, \mathbf{F}\mathtt{h}_r \rangle$ が $T$ の像の基底であり，
(2) $\tilde{\mathbf{G}} = \langle \mathbf{E}\mathtt{g}_1, \mathbf{E}\mathtt{g}_2, \ldots, \mathbf{E}\mathtt{g}_s \rangle$ が $T$ の核の基底である．

(∵) (1) 同型写像 $\phi_{\mathbf{F}}$ によって，$\mathrm{Im}\, T$ は $\mathrm{Im}\, T_A$ に移される．それは図で考えれば明らかだが，あえて示せば次のようになる．

$$\mathrm{Im}\, T_A = T_A(K^n) = (\phi_{\mathbf{F}} \circ T \circ \phi_{\mathbf{E}}^{-1})(K^n) = (\phi_{\mathbf{F}} \circ T)(V) = \phi_{\mathbf{F}}(T(V)) = \phi_{\mathbf{F}}(\mathrm{Im}\, T) \tag{28}$$

したがって，$\phi_{\mathbf{F}}$ は $\mathrm{Im}\, T$ から $\mathrm{Im}\, T_A$ への同型写像となり（すなわち $\mathrm{Im}\, T \simeq \mathrm{Im}\, T_A$），$\phi_{\mathbf{F}}$ により $\mathrm{Im}\, T$ の基底は $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底に移り合うので，$\mathrm{Im}\, T_A$ の基底 $\langle \mathtt{h}_1, \mathtt{h}_2, \ldots, \mathtt{h}_r \rangle$ から $\mathrm{Im}\, T$ の基底 $\langle \mathbf{F}\mathtt{h}_1, \mathbf{F}\mathtt{h}_2, \ldots, \mathbf{F}\mathtt{h}_r \rangle$ を作ることができる．

(2) 同型写像 $\phi_{\mathbf{E}}$ によって，$\mathrm{Ker}\, T$ は $\mathrm{Ker}\, T_A$ に移される．なぜならば，$x = \mathbf{E}\mathrm{x}$ とすると，

$$Tx = 0 \iff T\mathbf{E}\mathrm{x} = 0 \iff \mathbf{F}A\mathrm{x} = 0 \iff A\mathrm{x} = \mathsf{0} \tag{29}$$

なので，対応する $x$，$\mathrm{x}$ はつねに同時に核に属すか，または同時に属さないからである．こうして (1) と同様にして，$\mathrm{Ker}\, T \simeq \mathrm{Ker}\, T_A$ となり，$\mathrm{Ker}\, T_A$ の基底 $\langle \mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2, \ldots, \mathrm{g}_s \rangle$ から $\mathrm{Ker}\, T$ の基底 $\langle \mathbf{E}\mathrm{g}_1, \mathbf{E}\mathrm{g}_2, \ldots, \mathbf{E}\mathrm{g}_s \rangle$ を作ることができる． (q.e.d.)

(ex3) $T$ を (ex2) で定められたものとするとき，(1) $T$ の像の基底 $\tilde{\mathbf{H}}$ および (2) $T$ の核の基底 $\tilde{\mathbf{G}}$ を求めよ．

(ans) (1) $T_A$ の像の基底 $\mathbf{H}$ を，$A$ を列変形して階段状にして求める．

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \therefore\ \mathbf{H} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$
$$\therefore\ \tilde{\mathbf{H}} = \langle \mathbf{F}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{F}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{F}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle 1, t, t^2 \rangle. \tag{30}$$

(2) $T_A$ の核の基底 $\mathbf{G}$ を求める．$A\mathrm{x} = \mathsf{0}$ を解けばよいので，

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \\ x \quad y \quad z \quad w \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \end{pmatrix} \\ y \quad z \quad w \quad x \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
$$\therefore\ \begin{pmatrix} y \\ z \\ w \\ x \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \therefore\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \therefore\ \mathbf{G} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle. \tag{31}$$
$$\therefore\ \tilde{\mathbf{G}} = \langle \mathbf{E}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \langle 1 \rangle.$$

(ex4) $V$ を 2 次複素行列全体からなる複素線形空間とする．$S = \begin{pmatrix} 3 & 2i \\ 2i & 1 \end{pmatrix}$ とし，$V$ の変換 $T$ を $TX = SX - XS$ で定める．
(1) $T$ は $V$ の線形変換となることを示せ．
(2) $V$ の基底 $\mathbf{E} = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle R_1, R_2, R_3, R_4 \rangle$ を取るとき，$\mathbf{E}$ に関する $T$ の行列 $A$ を求めよ．
(3) $T_A$ の像の基底 $\mathbf{H}$ と $T_A$ の核の基底 $\mathbf{G}$ を求めることにより，$T$ の像の基底 $\tilde{\mathbf{H}}$ と $T$ の核の基底 $\tilde{\mathbf{G}}$ を求めよ．

(ans) (1) 任意の $X, Y \in V$ および任意の $c \in \mathbf{C}$ に対して，

$$\begin{aligned} T(X+Y) = &\ S(X+Y) - (X+Y)S = SX + SY - XS - YS \\ = &\ (SX - XS) + (SY - YS) = TX + TY. \\ T(cX) = &\ ScX - cXS = cSX - cXS = c(SX - XS) = cTX. \end{aligned} \tag{32}$$

ゆえに $T$ は $V$ の線形変換である． (q.e.d.)

(2) $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ に対して,

$$\begin{aligned} TX &= \begin{pmatrix} 3 & 2i \\ 2i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2i \\ 2i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2iy+2iz & -2ix+2y+2iw \\ 2ix-2z-2iw & 2iy-2iz \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{33}$$

ここで $X = R_i$ とおけば,

$$\begin{aligned} \therefore\ T\mathbf{E} &= T\begin{pmatrix} R_1 & R_2 & R_3 & R_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} TR_1 & TR_2 & TR_3 & TR_4 \end{pmatrix} \\ &= \left( \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} \ \begin{pmatrix} -2i & 2 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} \ \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ -2 & -2i \end{pmatrix} \ \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \mathbf{E}A = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & R_3 & R_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2i & 2i & 0 \\ -2i & 2 & 0 & 2i \\ 2i & 0 & -2 & -2i \\ 0 & 2i & -2i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{34}$$

$$\therefore\ A = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 2i & 0 \\ -2i & 2 & 0 & 2i \\ 2i & 0 & -2 & -2i \\ 0 & 2i & -2i & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) $\mathbf{H}$ を求めるために $A$ を列変形して,

$$\begin{pmatrix} 0 & -2i & 2i & 0 \\ -2i & 2 & 0 & 2i \\ 2i & 0 & -2 & -2i \\ 0 & 2i & -2i & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2i & -2i & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2i & 2i \\ -2 & 0 & 2i & -2i \\ -2i & 2i & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2i & -2i & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2i & 0 \\ -2 & 0 & 2i & 0 \\ -2i & 2i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2i & 0 \\ -2 & -2 & 2i & 0 \\ -2i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \therefore\ \mathbf{H} = \left\langle \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \\ -2 \\ -2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$\therefore\ \tilde{\mathbf{H}} = \left\langle \mathbf{E}\begin{pmatrix} 2i \\ 0 \\ -2 \\ -2i \end{pmatrix}, \mathbf{E}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ -2 & -2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle. \tag{35}$$

$\mathbf{G}$ を求めるために $A\mathrm{x} = 0$ を解く.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2i & 2i & 0 \\ -2i & 2 & 0 & 2i \\ 2i & 0 & -2 & -2i \\ 0 & 2i & -2i & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2i & 2 & 0 & 2i \\ 0 & -2i & 2i & 0 \\ 2i & 0 & -2 & -2i \\ 0 & 2i & -2i & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & -1 \\ 0 & -2i & 2i & 0 \\ 2i & 0 & -2 & -2i \\ 0 & 2i & -2i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & -1 \\ 0 & -2i & 2i & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2i & -2i & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2i & -2i & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore\ \mathbf{G} = \left\langle \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad \therefore\ \tilde{\mathbf{G}} = \left\langle \mathbf{E}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \tag{36}$$

- 5 -（行列の標準形）線形写像 $T : V \longrightarrow W$ に対して，$V$，$W$ の基底をうまく選ぶことで，その基底に関する $T$ の行列を簡単にすることを考えよう．10 章 (T12) の証明における基底の構成を採用する．すなわち，$\mathrm{Ker}\, T$ の基底を $\langle \mathsf{e}_{r+1}, \dots, \mathsf{e}_n \rangle$ とし，この基底を拡大して（順序を入れ替えて）$V$ の基底 $\mathbf{E} = \langle \mathsf{e}_1, \dots, \mathsf{e}_r, \mathsf{e}_{r+1}, \dots, \mathsf{e}_n \rangle$ を作る．さらに $T\mathsf{e}_i = \mathtt{f}_i \ (i = 1, \dots, r)$ として，$\mathrm{Im}\, T$ の基底 $\langle \mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_r \rangle$ を作る．この基底を拡大して，$W$ の基底 $\mathbf{F} = \langle \mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_m \rangle$ を作る．すると，

$$\begin{aligned} T\mathbf{E} &= \begin{pmatrix} T\mathsf{e}_1 & \dots & T\mathsf{e}_r & T\mathsf{e}_{r+1} & \dots & T\mathsf{e}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathtt{f}_1 & \dots & \mathtt{f}_r & \mathtt{0} & \dots & \mathtt{0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathtt{f}_1 & \dots & \mathtt{f}_r & \mathtt{f}_{r+1} & \dots & \mathtt{f}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix} = \mathbf{F} F_{mn}(r) \end{aligned} \tag{37}$$

より，$\mathbf{E}, \mathbf{F}$ に関する $T$ の行列は $F_{mn}(r)$ となる．特に $T = T_A$ のとき，基底は正則行列とみなせるので，

$$AP = QF_{mn}(r). \qquad \therefore\ Q^{-1}AP = F_{mn}(r). \tag{38}$$

これは，行列 $A$ を基本変形で標準形にしたことに対応する．

次に，$T$ が $V$ の線形変換の場合を考えよう．この場合は始域と終域に同じ基底を取ることになるので，上に述べたような簡単な結果にはならない．その詳細は後に述べるが，ここでは基本的な原理を述べる．$T : V \longrightarrow V$ に対して，$V$ の部分空間 $W$ であって，

$$T(W) \subset W \tag{39}$$

となるものを $V$ の $T$-不変部分空間という．$W$ の基底を $\langle \mathsf{e}_1, \dots, \mathsf{e}_s \rangle$ とし，これを拡大して $V$ の基底 $\mathbf{E} = \langle \mathsf{e}_1, \dots, \mathsf{e}_n \rangle$ を取ると，

$$\begin{aligned} T\mathbf{E} &= \begin{pmatrix} T\mathsf{e}_1 & \dots & T\mathsf{e}_s & T\mathsf{e}_{s+1} & \dots & T\mathsf{e}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathsf{e}_1 & \dots & \mathsf{e}_s & \mathsf{e}_{s+1} & \dots & \mathsf{e}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ O_{n-s,s} & Q_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{E}Q \end{aligned} \tag{40}$$

より，$\mathbf{E}$ に関する $T$ の行列 $Q$ が得られる．

より強く，$V$ が 2 つの $T$-不変部分空間 $W_1$，$W_2$ の直和，すなわち

$$V = W_1 \oplus W_2 \tag{41}$$

となるとき，$W_1, W_2$ の各基底を並べて $V$ の基底 $\mathbf{E} = \langle \mathsf{e}_1, \dots, \mathsf{e}_s, \mathsf{e}_{s+1}, \dots, \mathsf{e}_n \rangle$ を作れば，

$$\begin{aligned} T\mathbf{E} &= \begin{pmatrix} T\mathsf{e}_1 & \dots & T\mathsf{e}_s & T\mathsf{e}_{s+1} & \dots & T\mathsf{e}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathsf{e}_1 & \dots & \mathsf{e}_s & \mathsf{e}_{s+1} & \dots & \mathsf{e}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & O_{s,n-s} \\ O_{n-s,s} & Q_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{E}Q \end{aligned} \tag{42}$$

のように，$Q$ は正方行列を対角線に沿って並べた形になる．これを一般化すれば，$V$ がいくらかの $T$-不変部分空間 $W_1, \dots, W_s$ の直和:

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s \tag{43}$$

となるとき，$W_1, \ldots, W_s$ の各基底を並べて得た $V$ の基底に関する $T$ の行列 $Q$ は

$$\begin{pmatrix} Q_1 & & & O \\ & Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & Q_s \end{pmatrix} \tag{44}$$

の形になる．特に $T = T_A$ のときは基底を並べた行列 $P$ により，

$$AP = PQ. \qquad \therefore\ P^{-1}AP = Q \tag{45}$$

を得る．$P$ は $A$ を $Q$ に移す変換行列と呼ばれる．適当な条件の下では $Q$ を対角行列にでき，このとき線形変換 $T$ または正方行列 $A$ は対角化可能という．(⇒ 12–13 章）ただし，いつも対角化可能とは限らない．対角化できない場合は，ジョルダンの標準形と呼ばれる形にすることができる．(⇒ 14 章）

- 6 -（線形変換の演算とその行列）$V$ の線形変換 $T, S$ について，ある基底 $\mathbf{E}$ に関するそれぞれの行列を $A, B$ とするとき，

$$\begin{aligned} &(T+S)\mathbf{E} = T\mathbf{E} + S\mathbf{E} = \mathbf{E}A + \mathbf{E}B = \mathbf{E}(A+B) \\ &(TS)\mathbf{E} = T(S\mathbf{E}) = T(\mathbf{E}B) = (T\mathbf{E})B = (\mathbf{E}A)B = \mathbf{E}(AB) \\ &(kT)\mathbf{E} = k(T\mathbf{E}) = k(\mathbf{E}A) = \mathbf{E}(kA) \end{aligned} \tag{46}$$

がなりたつ．すなわち，線形変換の和，合成，スカラー倍の演算は，ある基底を決めてやると，そのまま行列の演算に対応することがわかる．特に，線形変換 $T$ の適当な多項式（積は合成と解釈する）$\Phi(T)$ について，(46) を繰り返し用いれば，

$$\Phi(T)\mathbf{E} = \mathbf{E}\Phi(A) \tag{47}$$

を得る．この結果は線形変換に関するハミルトン・ケーリーの定理の証明などに用いる．