異方性特徴の適切な回転変換による 3次元テンソル場の補間手法

石田 明久 † 高橋 成雄 †† 小川 雄太 ‡ 藤代 一成 ‡,‡‡

† 東京大学大学院情報理工学系研究科 †† 東京大学大学院新領域創成科学研究科

‡ 東北大学大学院情報科学研究科 ‡‡ 東北大学流体科学研究所

医療画像による生体組織の物理的性質や微小構造を理解する上で，3 次元テンソル場の可視化は重要になってきた．しかし，適切な補間手法が存在しないため，3 次元テンソル場に内在する連続的特徴を追跡することは，いまだ難しい課題である．本報告では，与えられたデータに内在する異方的構造を考慮に入れた，3 次元テンソル場の補間手法を提案する．本手法の基本アイデアは，テンソルの行列表現から得られる固有値・固有ベクトルを直接用いて，隣接テンソル値間に定義される変換の回転量を最適化することで，既存手法では困難であった swelling effect(テンソルの不必要な変化や異方性の損失) の回避を実現する点にある．DT–MRI などから得られる医用 3 次元テンソル場の可視化への適用結果を示し，既存手法に対する本手法の優位性を示す．

Interpolating 3D Diffusion Tensor Fields with Plausible Rotational Transformations of Anisotropic Properties

Haruhisa Ishida † **Shigeo Takahashi** †† **Yuuta Ogawa** ‡ **Issei Fujishiro** ‡,‡‡

† Graduate School of Information Science and Technology, The University of Tokyo

†† Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo

‡ Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

‡‡ Institute of Fluid Science, Tohoku University

Visualizing 3D diffusion tensor fields has become important especially in medical imaging for understanding physical properties and microscopic structures in biological tissues. However, tracking the underlying continuous behavior of the 3D tensor fields is still challenging due to the lack of appropriate interpolation schemes that can avoid unexpected swelling effects. This report presents an approach to interpolating such 3D diffusion tensor fields by respecting the underlying anisotropic structure of the given datasets. The main idea behind our approach is to alleviate swelling effects by optimizing the rotational transformation between a pair of tensors through the eigenanalysis of associated matrix representations. Comparisons with existing interpolation schemes will be provided to clarify the advantages of the proposed approach together with several visualization results of 3D medical tensor fields.

1 はじめに

近年，拡散テンソル場の可視化を介した生体組織の理解は，例えば神経や心筋の構造の分析や，組織内部の病変部位の特定など，医療の現場において重要な位置を占めるようになってきている．このようなテンソル場は，CT や MRI などの医療計測機器で従来得られていたスカラ場と同様，一般的にはグリッドなどの離散サンプルの集合体として表現される．この状況下において，任意の座標におけるテンソル値を，離散サンプルから適切な補間を介して求める技術は，テンソル場の連続的な特徴を抽出する上で重要な基礎技術となる．離散テンソル値の補間は，テンソル場をリサンプリングによって任意の解像度をもつデータに変換したり，力覚デバイスを介して知覚する [7] 際に必要な解像度の高いテンソル場を得る場合にも，主要な役割を演じることになる．

しかしながら，スカラ値と異なり，拡散テンソル値は 3×3 正定値対称行列で表現されるため，その補間は通常のスカラ値の補間と異なり注意を要する．従来テンソル値の補間には，テンソルの行列表現を要素ごとに線型補間するナイーブな方法

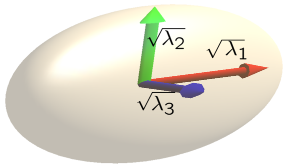


図 1　テンソルの楕円体表現

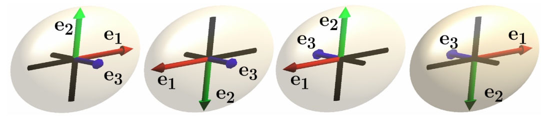


図 2　固有ベクトルによるテンソル表現の曖昧性．色は軸の対応関係を表している．

(component-wise) を始めとする ad-hoc な手法 [4] が使われてきたが，神経の方向など異方性と呼ばれるテンソルの特徴が失われる効果 swelling effects が，大きな問題となっていた．この問題を軽減する手法として，テンソルを対数空間に射影して補間する log-Euclidean という定式化 [2] が提案されているが，その効果も限定的であった．

そこで本報告では，各拡散テンソル値の行列表現から得られる固有値・固有ベクトルを用いて，全体の拡散テンソル場をより系統的に補間する手法を新たに提案する．本手法の重要なアイデアは，データ全体の異方性の分布を考慮に入れながら，隣接するテンソル値サンプル値間の回転角を最小化することにより，離散テンソル値の補間を求めるところにある．テンソル値の固有値・固有ベクトルを用いた手法はいくつか提案されているが [5]，その回転変換を最適化することにより，テンソル場の異方性特徴の補間を実現するのは，我々が知る限り本手法が初めてである．また 2 次元以上のテンソル場において回転補間を計算する場合，回転行列の非可換性が問題となってくる．本手法では，Alexa [1] によって提案された，可換な線型回転変換の近似合成手法を導入することで，固有値，固有ベクトルの対応関係を直接制御しつつも，2 次元以上のテンソル場の補間に適用できる枠組みへと拡張を行っている．

2　拡散テンソル

一般的に，本報告で対象とする 3 次 2 階対称拡散テンソルは，3×3 正定値対称行列，あるいはその 3 つの実数固有値 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$ と，互いに直交する単位固有ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ を用いて表現することができる．これは，テンソルが図 1 のように，各ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ の方向に半径 $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3}$ をもつ，楕円体として表現できることを意味する．

テンソルの異方性とは，この楕円体表現がどれだけ細長い形をもつかを表す．一般的に異方性の高い部分は，神経などの特徴部分に対応し，テンソル場の解析において重要な役割を演ずる．テンソルの異方性を定量的に測る指標はいくつか提案されているが [6]，ここでは下記の式 (1)，(2) で表される 2 つの異方性指標 C_l(線度)，C_p(面度) と式 (3) で表される FA 値を用いる．

$$C_l = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \tag{1}$$

$$C_p = \frac{2(\lambda_2 - \lambda_3)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \tag{2}$$

$$FA = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{(\lambda_1 - \bar{\lambda})^2 + (\lambda_2 - \bar{\lambda})^2 + (\lambda_3 - \bar{\lambda})^2}}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \tag{3}$$

$$\text{ただし}, \bar{\lambda} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{3} \tag{4}$$

3　基本アイデア

本節では，本提案手法の基本的な 2 つのアイデアについて述べる．

3.1　テンソル値間の回転変換

今，2 つのテンソル値を補間するために，その楕円体表現の対応づけを考える．各テンソル値は 3 つの固有ベクトルからなるため，その向きが右手系の座標軸を成すように定めると，ひとつの座標系を構築することになる．テンソル間の補間は，この様な座標系間の回転変換を求めることに相当する．

ただ，テンソルは，各固有ベクトルの方向が定まっても，まだ向きに関して 2 通りの曖昧性が残っている．そのため，上記のように 3 つの固有ベクトルが右手座標系を成すとしても，図 2 の 4 つの固有ベクトルの組が，同じテンソルを表すことになる．さらに，2 つのテンソル間の固有ベクトルの対応づけも，固有値の大きさと関係なく定めると $3! = 6$ 通りが考えられ，先ほどのテンソル表現の曖昧性とあわせて，固有値，固有ベクトル間には $4 \times 6 = 24$ 通りの対応づけが考えられる．

実は，従来の補間手法は，ほとんどがテンソル値の固有値と固有ベクトルの対応づけを明示的に定義しておらず，結果として暗黙のうちに固有ベクトルを固有値の大きさの順に対応づけて，テンソル値間の補間を施している．今回我々が新たに導入す

るアイデアは，上記に述べた通り固有ベクトルの大きさの順番にとらわれず，swelling effect を低減しデータに内在する異方性を保持するように，固有ベクトルの対応づけのパタンを変えていく点にある．つまり，2 つのテンソル値 $\mathbf{D}^S = \{(\lambda_i^S, \mathbf{e}_i^S)\}(i = 1,2,3,\ \lambda_1^S \geq \lambda_2^S \geq \lambda_3^S)$, $\mathbf{D}^T = \{(\lambda_i^T, \mathbf{e}_i^T)\}(i = 1,2,3,\ \lambda_1^T \geq \lambda_2^T \geq \lambda_3^T)$ の間の回転変換が，最小の角度をもつように置換 σ を用いて

$$(\lambda_i^S, \mathbf{e}_i^S) \Leftrightarrow (\lambda_{\sigma(i)}^T, \mathbf{e}_{\sigma(i)}^S), \tag{5}$$

となる対応づけを行っていく．これは，例えば隣接固有値 λ_1 と λ_2 の値に大きな差がなく，連続的なテンソル場の変化においてその値が逆転する場合，その変化を忠実に再現することができる．この考え方は，データのスペクトル解析のレベルでは似たような考え方が導入されている [8] が，テンソルなどの幾何情報を直接制御するのに用いるのは，我々が知る限り本手法が初めてである．

3.2 異方性に基づいた補間

実際の 3 次元テンソル場を補間するためには，上記のようなテンソル値間の対応付けを，3 次元テンソル場を構成する離散サンプル値の，どの 2 つに対して優先的に行っていくかを決める必要がある．本手法では，テンソル場に内在する異方性の高い領域を抽出し，その領域内を優先して対応づけを行う戦略をとる．これは，テンソル場において，異方性の高い領域は何かしら医学的あるいは物理的な意味をもつ場合が多く，それら連続的特徴を注意深く補間することで全体の異方性特徴を効果的に抽出できるとともに，データ全体の swelling effect を最小化できると考えるからである．実際には，すべてのテンソルサンプルに対して異方性の指標を計算し，隣接していてかつ同じ方向の異方性を有するサンプル同士をまとめてクラスタ化し，その個々のクラスタ内を優先して固有値と固有ベクトルの対応づけを行う．詳細は，5.2 節で述べることにする．

以降，このような基本アイデアをテンソル場の補間にどのように適用するかについて，1 次元と，2 次元以上の場合に分けて，順次説明を加えていく．

4 1 次元定義域におけるテンソル補間

定義域が 1 次元の場合は，テンソルサンプル値の並びに応じて，順次補間を施していく．

4.1 固有ベクトルの対応づけの最適化

いま，2 つのテンソル値が，3.1 節のように $\mathbf{D}^S = \{(\lambda_i^S, \mathbf{e}_i^S)\}$, $\mathbf{D}^T = \{(\lambda_i^T, \mathbf{e}_i^T)\}$ のように与えられているとする．2 つのテンソル間の回転変換を表す行列 $\mathbf{R}$ は，$\{1,2,3\}$ のある置換 (permutation)σ を用いて

$$\mathbf{R}=\left(\mathbf{e}_{\sigma(1)}^T\,\mathbf{e}_{\sigma(2)}^T\,\mathbf{e}_{\sigma(3)}^T\right)\left(\mathbf{e}_1^S\,\mathbf{e}_2^S\,\mathbf{e}_3^S\right)^{-1} \tag{6}$$

と表される．このとき，$\mathbf{R}$ の回転角 θ は，

$$\theta = \arccos\left|\frac{1}{2}\left(r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1\right)\right| \tag{7}$$

と書くことができる．ただし，r_{ij} は，行列 $\mathbf{R}$ の (i,j)-成分を表す．本手法では，3.1 節で述べた 24 通りのテンソル間の対応づけに関して，置換 σ を定め θ を計算し，それを最小化する対応づけを最適なものと定める．

4.2 固有値と固有ベクトルに基づいた補間方法

本手法においては，一度上記のように 2 つのテンソル間での固有値と固有ベクトルの対応を定めておけば，任意の座標の補間サンプル値を計算することができる．テンソル $\mathbf{D}^M = (\lambda_i^M, \mathbf{e}_i^M)$ が，テンソル値 $\mathbf{D}^S$ と $\mathbf{D}^T$ を，$t:(1-t)$ に内分する点の補間テンソル値を表すとする．このとき，

$$\lambda_i^M = t\lambda_i^S + (1-t)\lambda_i^T \tag{8}$$

$$\left(\mathbf{e}_1^M\,\mathbf{e}_2^M\,\mathbf{e}_3^M\right) = \mathbf{R}^t\left(\mathbf{e}_1^S\,\mathbf{e}_2^S\,\mathbf{e}_3^S\right) \tag{9}$$

とする．この際，行列 $\mathbf{R}$ のべき乗は，行列の平方根を計算する手法 [1] を利用して求める．

5 多次元定義域におけるテンソル補間

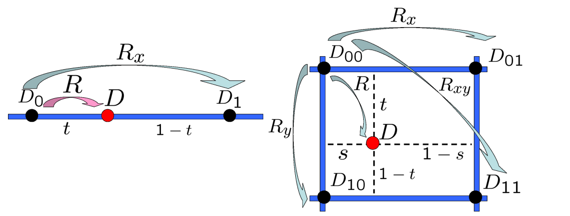
本節では，先に述べた定義域が 1 次元の場合におけるテンソルの補間の枠組みを，どのように 2 次元や 3 次元に拡張していくかについて，説明をしていく．

5.1 多次元定義域における回転合成

図 3(a) に表されるように，定義域が 1 次元の場合には，補間テンソル $\mathbf{D}(t)$ を求めるために，回転行列 $\mathbf{R} = \mathbf{R}_x^t$ を $\mathbf{D}_0$ から $\mathbf{D}_1$ への回転変換を表す行列 $\mathbf{R}_x$ から求めればよい．ところが，図 3(b) のように，定義域が 2 次元の場合，その補間対象領域は 2 つのパラメータ t,s で定義され，それぞれのパラメータごとに回転変換が定義される．そのため，仮に $\mathbf{D}_{00}$ から $\mathbf{D}_{01}, \mathbf{D}_{10}, \mathbf{D}_{11}$ への回転変換を表す行列をそれぞれ $\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y, \mathbf{R}_{xy}$ としたとき，求める回転行列 $\mathbf{R}$ は，

$$R = I^{(1-s)(1-t)} R_x^{s(1-t)} R_y^{(1-s)t} R_{xy}^{st},$$

のように複数の異なる回転行列を掛け合わせる必要がある．しかし，回転行列の乗算は非可換であ



(a) (b)

図 3　補間の際に用いる回転: (a) 定義域が 1 次元の場合，(b) 定義域が 2 次元の場合．

るため，その適用順序によって式 (10) の結果が異なってしまう．

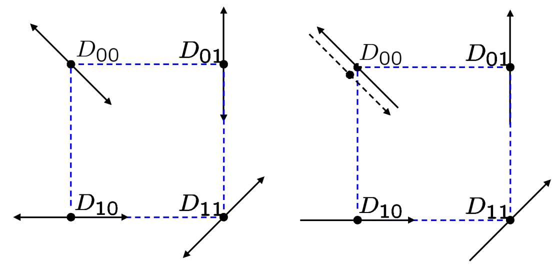
そこで，本手法においては，Alexa [1] が提案した，変換の合成を線型和のように扱うための近似合成変換を計算する手法を導入することで，回転の適用順序によらない回転の合成変換を実現し，2 次元以上の定義域における回転変換の非可換性の問題を解決していく．ところで，Alexa の手法を回転行列 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の補間に適用すると，回転行列の空間において $\mathbf{A}$ から $\mathbf{B}$ への軌跡が最短距離を描く性質 (距離最小性) をもたないことが知られている [3]．しかし，本手法ではテンソル値間の回転角が小さくなるように固有値・固有ベクトルの対応付けを行うため，Alexa の手法を用いても上記の回転のずれによる影響は極力抑えられることに注意する．

5.2　異方性に基づくテンソル値間の対応づけ

本手法では，3.2 節でも述べたように，似たような異方性をもつ隣接するテンソル値間に優先して固有値，固有ベクトルの対応づけを行うことで，最適な回転変換による補間を実現し，テンソル場全体における異方性特徴を可能な限り保持していく．

まず，線度 (式 (1)) の値がある閾値以上であるテンソル値サンプルを抽出し，隣接していてかつ異方性の大きい方向が近いもの同士をまとめてクラスタ化する．そして，そのクラスタ内において優先して，隣接テンソル値間の固有ベクトルの対応づけを決定する．同様に，残りのテンソルサンプルのうち，面度 (式 (2)) の値がある閾値以上の値をとるものを抽出し，異方性の小さい方向が近いもの同士をまとめてクラスタ化し，隣接テンソル同士の固有ベクトルの対応づけを同定する．最後に，残った領域の隣接テンソルにおける固有値，固有ベクトルの対応関係を求める．

上記の処理において，各々のクラスタ内のどの



(a) (b)

図 4　周期性の問題．(a): 固有ベクトルの向きが定まっていない状態．(b): $\mathbf{D}_{00}$ を始点として $\mathbf{D}_{01}$，$\mathbf{D}_{11}$，$\mathbf{D}_{10}$ の順に向きを決定していった場合．

隣接サンプル同士を優先して対応づけを決めていくかに関しては，まだ任意性がある．本手法では，2 つのテンソル $\mathbf{D}^S, \mathbf{D}^T$ の間に，

$$(1\text{–}FA(\mathbf{D}^S))(1\text{–}FA(\mathbf{D}^T))\theta(\mathbf{D}^S, \mathbf{D}^T) \qquad (10)$$

のような類似度を表す距離を定義し，距離の小さいものから貪欲法に基づき対応付けを行うことにした．ここで $FA(\mathbf{D}^S), FA(\mathbf{D}^T)$ は，それぞれテンソルの FA 値 (式 (3)) であり，$\theta(\mathbf{D}^S, \mathbf{D}^T)$ は，その間の回転変換に伴う角度を表す．

5.3　回転の周期性の回避

本手法では，グリッド状に並んだ離散テンソル値サンプルに対し，Alexa の近似合成変換を用いることで，その格子単位で線形 (二重線形または三重線形) 補間を行っている．しかし，回転変換には周期性があるため，固有値，固有ベクトルの対応付けによっては，定義域内の閉路をたどるとテンソルの向きが周期のずれを起こす場合がある．

その例を示したものが図 4(a) である．この図では，分かりやすくするため，各テンソルの 1 つの対応する固有ベクトルのみ描画していることに注意する．この事例において，図 4(b) のように $\mathbf{D}_{00}$ の実線の固有ベクトルの向きを基準にして，$\mathbf{D}_{00}$-$\mathbf{D}_{01}$-$\mathbf{D}_{11}$-$\mathbf{D}_{10}$-$\mathbf{D}_{00}$ の順に回転を最適化しながらその向きの変化をたどると，最終的には $\mathbf{D}_{00}$ において点線の固有ベクトルの向きが得られる．

この問題に対して，既存の固有値・固有ベクトルを用いない手法では，上記のようにたどった閉路上での補間テンソル値が連続になるものの，格子内部においてはテンソルが縮退し，結果 swelling effect を回避できないという問題が生じている．本手法では，この周期性問題を，冗長な回転を挿入することで解決している．具体的には，図 4(b) の

場合が生じた場合には，$\mathbf{D}_{00}$ において実線の固有ベクトルの向きになるように，$\mathbf{D}_{10}$-$\mathbf{D}_{00}$ 間の固有ベクトルの対応づけをしていく．この場合，連続した補間テンソル場も生成することができるが，回転の最適性は保てないという問題点が生じる．しかし，先に述べた通り本手法では，異方性の高い部分を優先して回転の対応づけを行っているため，最終的に冗長な回転を余儀なくされる部分は，テンソル自体が非常に等方的 (対応する楕円体が球に近い状態) であり，実際の冗長な回転による異方性特徴の劣化は少なくて済むことになる．

6 実験結果

本節では，提案手法を用いて DT-MRI データから得られるテンソル場を補間した結果を示し，既存手法の結果と比較することで提案手法の特性について示していく．

図 5 は，定義域が 1 次元の場合において，2 つのテンソル値を補間した場合の，補間テンソル値に対応する楕円体，行列式の変化 (実線)，FA 値 (式 (3))(破線) を示したものである．両端の楕円体が与えられたテンソル値を表しており，図 5(a),(b),(c) それぞれ，component-wise，log-Euclidean，提案手法の結果を示す．提案手法は，component-wise と比較すると，行列式の値が滑らかに変化することが分かる．また，log-Euclidean と比較すると，行列式に関しては大きな違いはないが，FA 値がより異方性を保ちながら補間できていることが分かる．

図 6 に，定義域が 2 次元の場合における補間結果を示す．これは，4 隅のテンソル値を入力として与えた時に，囲まれる領域を補間し，その結果を楕円体で表現したものである．この図からは，提案手法は，2 次元の定義域においても滑らかにテンソル値が補間されていて，かつ既存手法と比べて異方性が低下していない補間結果を示していることが分かる．

図 7 に，構造的特徴を持ったデータの補間結果を示す．図 7(b),(c),(d) は，図 7(a) で与えた入力テンソル値を各手法で補間したものである．このデータは, 実際の神経交差を模擬して, X の形に異方性の高いサンプルを並べたものであるが，提案手法は，異方性の低い (白い) 部分と異方性の高い (黒い) 部分の境界を保ったまま，補間ができていることが分かる．

7 結論と今後の課題

本報告では，テンソル間の固有ベクトルを対応づけを操作することで，隣接テンソル値間の回転を最適化し，テンソル場に置ける異方性特徴を最大限に保持する，テンソル値の補間手法を提案した．2 次元以上の定義域のテンソル補間における，回転変換の非可換性の問題は，Alexa の近似合成変換を用いることで効果的に回避している．本手法は，テンソル間の固有ベクトルの対応づけを異方性の高いテンソルから優先的に行うことで，既存の手法において大きな問題となっていた異方性特徴の歪みである swelling effect を，テンソル場全体において低減することに成功している．

今後の課題として，異方性によるテンソル値サンプルのクラスタリングの際の閾値の自動設定，物理シミュレーションなどにおける応力テンソルなど拡散テンソル以外の補間への拡張が考えられる．

謝辞 本研究の一部は，日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究 (B)(課題番号 18300026) および基盤研究 (B)(課題番号 20300033) の助成による．

参考文献

[1] M. Alexa. Linear combination of transformations. *ACM Trans. Graph*, 21(3):380–387, 2002.

[2] V. Arsigny, P. Fillard, X. Pennec, and N. Ayache. Log-Euclidean metrics for fast and simple calculus on diffusion tensors. *Magnetic Resonance in Medicine*, 56(2):411–421, 2006.

[3] C. Bloom, J. Blow, and C. Muratori. Errors and omissions in Marc Alexa's linear combination of transformations. http://www.cbloom.com/3d/techdocs/lcot_errors.pdf.

[4] C. Chefd'hotel, D. Tschumperlé, R. Deriche, and O. Faugeras. Regularizing flows for constrained matrix-valued images. *J. Math. Imaging Vis.*, 20(1-2):147–162, 2004.

[5] Y. Masutani, S. Aoki, Z. Liu, O. Abe, and K. Ohtomo. A hybrid tensor field interpolation approach for white matter fiber tract modeling. *International Journal of Computer Assisted Radiology and Surgery*, 2(Supp. 1):S22–S24, 2007.

[6] S. Muraki, I. Fujishiro, Y. Suzuki, and Y. Takeshima. Diffusion-based tractography: Visualizing dense white matter connectivity from 3D tensor fields. In *Proc. Volume Graphics*, pp. 119–126, 2006.

[7] Y. Ogawa, I. Fujishiro, Y. Suzuki, and Y. Takeshima. Desining 6DOF haptic transfer functions for effective exploration of 3D diffusion tensor fields. In *Proc. World Haptics Conference 2009*, 2009. accepted.

[8] S. Takahashi, K. Yoshida, T. Kwon, K. H. Lee, J. Lee, and S. Y. Shin. Spectral-based group formation control. *Computer Graphics Forum*, 28(2), 2009. to appear.

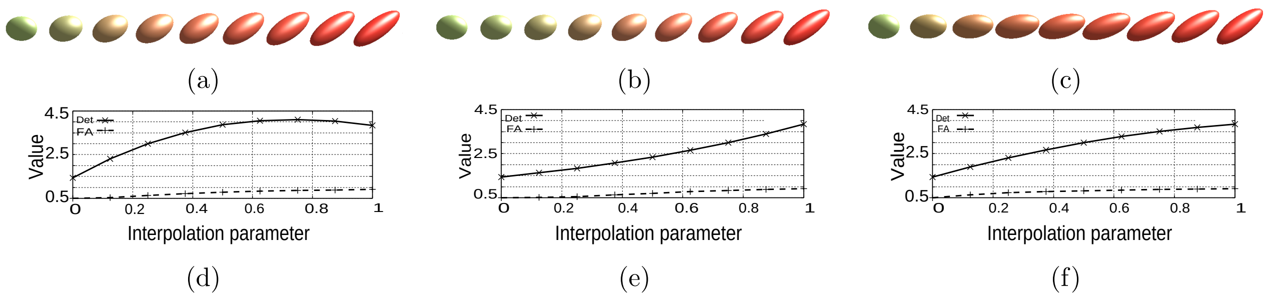


図 5　各手法における補間結果の違い．左列: component-wise，中列: log-Euclidean，右列: 提案手法，上段: 両端のテンソル間を補間した結果，下段: 行列式 (実線) および FA 値 (破線) の変化.

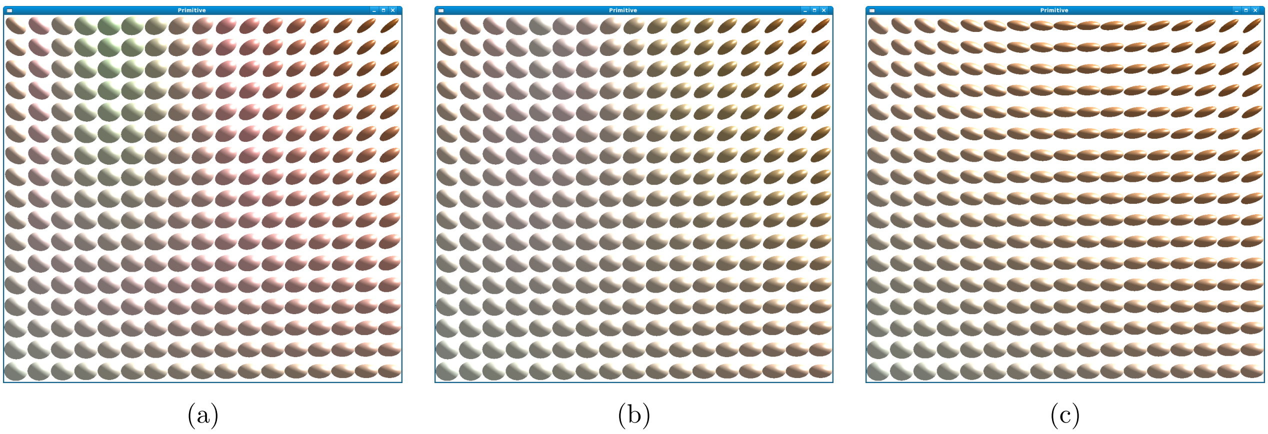


図 6　各手法における補間結果の違い．(a) component-wise，(b) Log-Euclidean，(c) 提案手法.

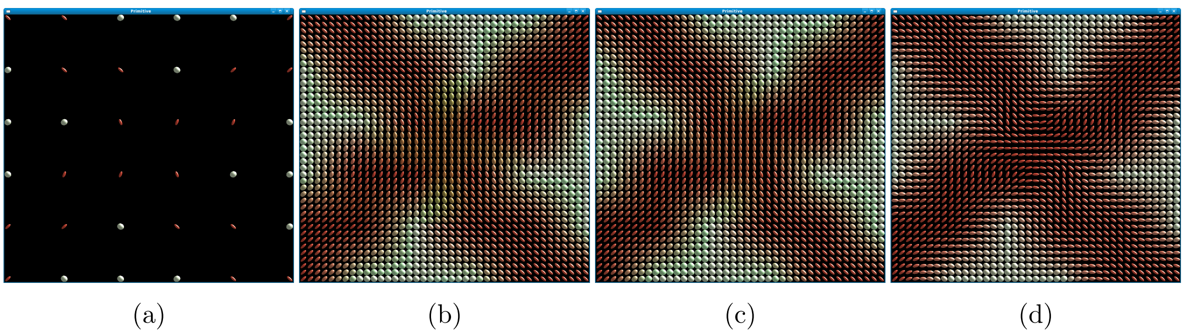


図 7　各手法における補間結果の違い．(a) 入力テンソル値，(b) comonent-wise，(c) Log-Euclidean，(d) 提案手法.